УДК 517.5

Н. В. Дерев'янко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ H_p^Ω ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_p

We establish upper estimates for the approximation of the classes H_p^Ω of periodic functions of many variables by polynomials constructed by using the system obtained as the tensor product of the systems of functions of one variable. By using these results, we obtain the exact order estimates of the orthoprojective widths for the classes H_p^Ω in the space L_p for $p \in \{1, \infty\}$.

Получены оценки сверху приближения классов H_p^Ω периодических функций многих переменных полиномами, построенными по системе, являющейся тензорным произведением систем функций от одной переменной. С помощью этого результата установлены точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников классов H_p^Ω в пространстве L_p при $p \in \{1, \infty\}$.

1. Вступ. У роботі досліджуються питання наближення періодичних функцій багатьох змінних із класів H_p^Ω поліномами, побудованими по системі функцій, яка є тензорним добутком систем функцій від однієї змінної. Класичним прикладом такої системи є тригонометрична система $\{e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}\}_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^d}$:

$$e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})} = \prod_{j=1}^{d} e^{ik_jx_j}, \qquad \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d),$$

де $\mathbb{Z}^d$ — цілочислова d-вимірна решітка.

Іншим важливим прикладом є система Хаара $\{H_I(\mathrm{x})\}$:

$$H_I(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} H_{I_j}(x_j), \qquad I = I_1 \times \ldots \times I_d, \qquad \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d),$$

де через I_j позначено двійковий інтервал — носій функції Хаара $H_{I_j}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для більш детальної постановки задачі наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0, 2\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі π_d функцій $f(\mathrm{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x} \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x}\in\pi_d} |f(\mathrm{x})|.$$

В роботі будемо розглядати лише ті функції $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\mathrm{x}) dx_j = 0, \qquad j = \overline{1, d}.$$

Далі задля спрощення позначень замість $L_p(\pi_d)$ будемо писати L_p.

Для $f \in L_p$ і $\mathrm{h} \in \mathbb{R}^d$ означимо мішану різницю порядку l за формулою

$$\Delta_{\mathrm{h}}^l f(\mathrm{x}) = \Delta_{h_d}^l (\ldots (\Delta_{h_1}^l f(\mathrm{x}))\ldots),$$

де

$$\Delta_{h_j}^l f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Для $f \in L_p$ і $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = \overline{1,d}$, означимо мішаний модуль гладкості порядку $l \in \mathbb{N}$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f, \mathrm{t})_p = \sup_{|h_j| \leq t_j, j=\overline{1,d}} \|\Delta_{\mathrm{h}}^l f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(\mathrm{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля гладкості порядку l, тобто функція, визначена на $\mathbb{R}_+^d = \{\mathrm{t} \in \mathbb{R}^d\colon\ t_j \geq 0,\ j = \overline{1,d}\}$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathrm{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ і $\Omega(\mathrm{t}) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathrm{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1,d}$, при всіх інших значеннях змінних t_i, $i \neq j$;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j\right)^l \Omega(\mathrm{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(\mathrm{t})$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1,d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Для заданої функції $\Omega \in \Psi_l$ визначимо клас функцій (див., наприклад, [1])

$$H_p^{\Omega} = \{f \in L_p\colon \Omega_l(f, \mathrm{t})_p \leq \Omega(\mathrm{t})\}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, і $\Omega(\mathrm{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, класи H_p^{Ω} збігаються з відомими класами Нікольського H_p^{r} [2]. Також будемо вважати, що Ω належить множинам S^{α} і S_l.

Будемо говорити, що функція однієї змінної φ належить S^{α}, $\alpha > 0$, якщо функція $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція φ належить S_l, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Умови належності функції φ до множин S^{α} і S_l називають умовами Барі–Стєчкіна [3].

Будемо вважати, що Ω належить S^{α} (відповідно Ω належить S_l), якщо $\Omega(t_1, \ldots, t_d)$, як функція змінної t_j, $j = \overline{1,d}$, при всіх значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$, належить множині S^{α} (відповідно множині S_l).

Позначимо $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Далі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують сталі C_3 , $C_4 > 0$ такі, що $C_3 A \leq B \leq C_4 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$ означають, що $C_5 A \leq B$ і $B \leq C_6 A$, $C_5, C_6 > 0$, відповідно. Всі сталі $C_i,\ i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Позначимо через $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kx \ ,$$

і для функції $f \in L_p$ і вектора $\mathrm{s} \in \mathbb{Z}_+^d$ розглянемо поліном вигляду

$$A_{\mathrm{s}}(f) = f * \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j - 1}} - V_{2^{s_j - 2}}).$$

У роботі [1] доведено таку теорему про належність функції до класу H_p^Ω.

Теорема A. *Нехай функція Ω належить $\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$. Тоді f належить H_p^Ω, $1 \leq p \leq \infty$, в тому і лише в тому випадку, коли виконується порядкова нерівність*

$$\|A_{\mathrm{s}}(f)\|_p \ll \Omega(2^{-\mathrm{s}}), \tag{1}$$

де $2^{-\mathrm{s}} = (2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Введемо до розгляду множини, які будемо використовувати для побудови наближаючих агрегатів. Для довільного $N \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\kappa(N) = \kappa(\Omega, N) = \left\{ \mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d) \colon s_j \in \mathbb{N}, \Omega(2^{-\mathrm{s}}) \geq \frac{1}{N} \right\}, \tag{2}$$

$$\kappa^{\perp}(N) = \left\{ \mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d) \colon s_j \in \mathbb{N}, \Omega(2^{-\mathrm{s}}) < \frac{1}{N} \right\}, \tag{3}$$

$$\Theta(N) = \kappa^{\perp}(N) \setminus \kappa^{\perp}(2^l N). \tag{4}$$

З (3) і (4) випливає, що $\Theta(N) \subset \kappa^{\perp}(N)$ і $\Theta(N) \cap \kappa^{\perp}(2^l N) = \varnothing$, тобто

$$\frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-\mathrm{s}}) < \frac{1}{N},$$

або

$$\Omega(2^{-\mathrm{s}}) \asymp \frac{1}{N}, \quad \mathrm{s} \in \Theta(N). \tag{5}$$

У статті [4] показано, що має місце співвідношення

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \tag{6}$$

де $|\mathcal{M}|$ — кількість елементів множини $\mathcal{M}$.

Для доведення основних результатів нам знадобиться така лема.

Лема А [4]. *Нехай функція Ω належить $\Psi_l \cap S^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Тоді для $0 < p < \infty$*

$$\sum_{\mathrm{s} \in \kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\mathrm{s}}))^p \ll \sum_{\mathrm{s} \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-\mathrm{s}}))^p.$$

Означимо оператор $\mathbf{F}_{\rho}$ як оператор згортки з ядром Бернуллі

$$F_{\rho}(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\rho} \cos\left(kx - \frac{\rho\pi}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0.$$

Позначимо через $\mathbf{F}_{\rho}(L_p)$ множину функцій, які задаються у вигляді згортки ядра Бернуллі з деякою функцією $\varphi \in L_p$, тобто

$$\mathbf{F}_{\rho}(L_p) = \{f \in L_p \colon f = \varphi * F_{\rho},\ \varphi \in L_p\}.$$

Далі доцільно означити класи функцій Соболєва W_p^{ρ}, про які нижче буде йти мова:

$$W_p^{\rho} = \left\{ f \colon f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pi_1} F_{\rho}(x-y)\varphi(y)dy,\ \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \le 1 \right\}.$$

Розглянемо множину операторів $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, які визначені на $\mathbf{F}_{\rho}(L_p)$ і мають такі властивості:

А) $\|(I - Y_n)\mathbf{F}_{\rho}\|_{p \to p} \ll 2^{-\rho n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де I — тотожний оператор, і $\|T\|_{p\to p} = \|T\|_{L_p \to L_p}$ — норма оператора T з L_p в L_p;

Б) для довільного тригонометричного полінома t порядку 2^{μ} і для деякого $\beta \ge 0$

$$\|Y_n t\|_p \ll 2^{\beta(\mu - n)} \|t\|_p, \qquad \mu \ge n.$$

Наведемо кілька прикладів множин операторів, які задовольняють умови А і Б.

I. $Y_n = S_{2^n}$ — оператор, який кожній функції $f \in L_1$ ставить у відповідність частинну суму ряду Фур'є порядку 2^n. Тоді властивість А для $1 < p < \infty$ випливає з відомих результатів щодо наближення функцій із класів Соболєва тригонометричними поліномами відповідного порядку (див., наприклад, [5, с. 48]). Згідно з теоремою 1.1 [5, с. 26], можемо записати

$$\|S_{2^n}\|_{p\to p} \le C_7(p), \qquad C_7(p) > 0, \quad 1 < p < \infty,$$

і тому для довільного $p \in (1, \infty)$ властивість Б виконується з $\beta = 0$.

II. $Y_n = I_{2^n}$ — оператор інтерполювання тригонометричними поліномами порядку 2^n у вузлах $\dfrac{2\pi l}{2^{n+1}+1}$, $l = 0, \ldots, 2^{n+1}$. Відомо (див., наприклад, [5, с. 86]), що для таких операторів співвідношення А виконується для $1 < p < \infty$ при $\rho > \dfrac{1}{p}$, а співвідношення Б має місце для $1 < p < \infty$ з $\beta = \dfrac{1}{p}$.

Зауважимо, що у прикладах I і II розглянуто випадок $1 < p < \infty$. Наведемо ще один приклад, який стосується випадків $p \in \{1, \infty\}$.

III. $Y_n = V_{2^n}$ — оператор Валле Пуссена порядку 2^n. Властивість А для $1 \le p \le \infty$ випливає з оцінок найкращого наближення класів Соболєва (див., наприклад, [5, с. 47]). Умова Б виконується для $1 \le p \le \infty$ при $\beta = 0$ (див., наприклад, [5, с. 28]).

Означимо оператор T_N, $N \in \mathbb{N}$, який діє на функцію від d змінних згідно з формулою

$$T_N = \sum_{s \in \kappa(N)} \prod_{i=1}^{d} (Y_{s_i}^i - Y_{s_i - 1}^i), \tag{7}$$

де Y_n^i — оператор Y_n, який діє на функцію від змінної x_i. Будемо вважати, що $Y_{-1} \equiv 0$.

Зазначимо, що оператори вигляду (7) уперше розглядалися в роботі [6]. Подальші результати щодо дослідження і використання операторів такого типу можна знайти, наприклад, у роботах [7 – 10]. У випадку $Y_n = S_{2^n}$ відповідні оператори T_N вивчалися у роботах [5, 11, 12], де можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

2. Наближення функцій із класів $\boldsymbol{H_p^{\Omega}}$. Сформулюємо і доведемо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай оператори* Y_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, *задовольняють умови* А *і* Б. *Тоді для довільної функції* $f \in H_p^{\Omega}$, $1 \le p \le \infty$, *де функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \beta$ *і* $l < \rho$, *похибка її наближення оператором* T_N, *означеним за формулою* (7), *оцінюється так*:

$$\|f - T_N f\|_p \ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{d-1}.$$

Доведення. Для фіксованого вектора $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ означимо оператор Δ_s, який діє з L_p в L_p, $1 \le p \le \infty$, таким чином:

$$\Delta_s = \prod_{i=1}^{d} \Delta_{s_i}, \qquad \Delta_n = Y_n - Y_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta_0 = Y_0.$$

Далі означимо ядро Бернуллі $F_\rho(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, згідно з формулою

$$F_\rho(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} F_\rho(x_j)$$

і

$$\Delta_s \mathbf{F}_\rho = \prod_{i=1}^{d} \Delta_{s_i} \mathbf{F}_\rho. \tag{8}$$

Тоді з властивостей А і Б будуть випливати такі співвідношення для операторів $\{\Delta_s\}_{\mathrm{s} \ge 0}$ [9]:

А$'$) $\|\Delta_s \mathbf{F}_\rho\|_{p \to p} \ll 2^{-\rho \|\mathrm{s}\|_1}$;

Б$'$) для довільного тригонометричного полінома t степеня 2^{v_i} за змінною x_i, $i = \overline{1, d}$, для деякого $\beta \ge 0$ маємо

$$\|\Delta_s t\|_p \ll 2^{\beta(\|\mathrm{v}\|_1 - \|\mathrm{s}\|_1)} \|t\|_p, \qquad \mathrm{v} \ge \mathrm{s}.$$

Тут і далі нерівності $\mathrm{a} > \mathrm{b}$, де $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ і $\mathrm{b} = (b_1, \ldots, b_d)$, означають, що $a_i > b_i$, $i = \overline{1, d}$.

Покажемо, що для кожної функції $f \in H_p^{\Omega}$, $1 \le p \le \infty$, має місце зображення

$$f = \sum_{\mathrm{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \Delta_s f, \tag{9}$$

де збіжність розуміється у метриці простору L_p.

При $d = 1$ з властивості А випливає, що $\|f - \sum_{s=0}^{n} \Delta_s f\|_p \to 0$, $n \to \infty$, отже,

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} \Delta_s f. \tag{10}$$

Покажемо тепер, що цей розклад має місце при $d > 1$. Для цього оцінимо зверху величину $\|\Delta_{\mathrm{s}} f\|_p$. Оскільки довільну функцію $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, можна подати у вигляді [13, с. 304]

$$f = \sum_{\mathrm{v} \ge 1} A_{\mathrm{v}}(f), \tag{11}$$

де для $f \in H_p^\Omega$

$$\|A_{\mathrm{v}}(f)\|_p \ll \Omega(2^{-\mathrm{v}}),$$

то звідси згідно з нерівністю Мінковського отримуємо

$$\|\Delta_{\mathrm{s}} f\|_p \le \sum_{\mathrm{v} \ge 1} \|\Delta_{\mathrm{s}} A_{\mathrm{v}}(f)\|_p. \tag{12}$$

Оцінимо $\|\Delta_s A_{\mathrm{v}}(f)\|_p$, $1 \le p \le \infty$. Нехай D_ρ позначає оператор, визначений на множині тригонометричних поліномів, який є оберненим до оператора F_ρ. Зрозуміло, що це є узагальненням на випадок ненатуральних ρ оператора диференціювання. Таким чином, можемо записати

$$\|\Delta_s A_{\mathrm{v}}(f)\|_p = \|\Delta_s \mathbf{F}_\rho D_\rho A_{\mathrm{v}}(f)\|_p \le \|\Delta_s \mathbf{F}_\rho\|_{p \to p} \|D_\rho A_{\mathrm{v}}(f)\|_p = \mathcal{J}_1.$$

Використавши властивість А$'$ і нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів, яка в даних позначеннях має вигляд

$$\|D_\rho A_{\mathrm{v}}(f)\|_p \le 2^{\rho \|\mathrm{v}\|_1} \|A_{\mathrm{v}}(f)\|_p,$$

продовжимо оцінку величини $\mathcal{J}_1$:

$$\mathcal{J}_1 \ll 2^{-\rho \|\mathrm{s}\|_1} 2^{\rho \|\mathrm{v}\|_1} \|A_{\mathrm{v}}(f)\|_p = 2^{-\rho(\|\mathrm{s}\|_1 - \|\mathrm{v}\|_1)} \|A_{\mathrm{v}}(f)\|_p. \tag{13}$$

З іншого боку, за властивістю Б$'$ для $\mathrm{v} \ge \mathrm{s}$ і деякого $\beta \ge 0$ одержуємо

$$\|\Delta_s A_{\mathrm{v}}(f)\|_p \ll 2^{\beta(\|\mathrm{v}\|_1 - \|\mathrm{s}\|_1)} \|A_{\mathrm{v}}(f)\|_p. \tag{14}$$

Таким чином, згідно з (13), (14) і співвідношенням (1) отримуємо

$$\|\Delta_s A_{\mathrm{v}}(f)\|_p \le \min\left(2^{-\rho(\|\mathrm{s}\|_1 - \|\mathrm{v}\|_1)} \Omega(2^{-\mathrm{v}}), 2^{\beta(\|\mathrm{v}\|_1 - \|\mathrm{s}\|_1)} \Omega(2^{-\mathrm{v}})\right).$$

Повертаючись до (13), можемо записати

$$\|\Delta_s f\|_p \le \sum_{\mathrm{v} \ge 1} \|\Delta_s A_{\mathrm{v}}(f)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{\mathrm{v} < \mathrm{s}} 2^{-\rho(\|\mathrm{s}\|_1 - \|\mathrm{v}\|_1)} \Omega(2^{-\mathrm{v}}) + \sum_{\mathrm{v} \ge \mathrm{s}} 2^{\beta(\|\mathrm{v}\|_1 - \|\mathrm{s}\|_1)} \Omega(2^{-\mathrm{v}}) = \mathcal{J}_2.$$

Оскільки функція Ω належить S^{α}, $\alpha > 0$, то функція $\Omega(2^{-\mathrm{v}})/\prod_{j=1}^{d} 2^{-\alpha v_j}$ майже зростає по кожній змінній. Аналогічно, оскільки функція Ω належить S_l, то функція $\Omega(2^{-\mathrm{v}})/\prod_{j=1}^{d} 2^{-\gamma v_j}$, $0 < \gamma < l$, майже спадає по кожній змінній, тому

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{\mathrm{v}<\mathrm{s}} 2^{-\rho(\|\mathrm{s}\|_1-\|\mathrm{v}\|_1)}\frac{\Omega(2^{-\mathrm{v}})}{\prod_{j=1}^{d} 2^{-\gamma v_j}}\prod_{j=1}^{d} 2^{-\gamma v_j} + \sum_{\mathrm{v}\geq\mathrm{s}} 2^{\beta(\|\mathrm{v}\|_1-\|\mathrm{s}\|_1)}\frac{\Omega(2^{-\mathrm{v}})}{\prod_{j=1}^{d} 2^{-\alpha v_j}}\prod_{j=1}^{d} 2^{-\alpha v_j} \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-\mathrm{s}})}{\prod_{j=1}^{d} 2^{-\gamma s_j}} 2^{-\rho\|\mathrm{s}\|_1}\sum_{\mathrm{v}<\mathrm{s}} 2^{(\rho-\gamma)\|\mathrm{v}\|_1} + \frac{\Omega(2^{-\mathrm{s}})}{\prod_{j=1}^{d} 2^{-\alpha s_j}} 2^{-\beta\|\mathrm{s}\|_1}\sum_{\mathrm{v}\geq\mathrm{s}} 2^{(\beta-\alpha)\|\mathrm{v}\|_1}.$$

Звідси при умові, що $\beta < \alpha$ і $\rho > l$, одержуємо

$$\mathcal{J}_2 \ll \frac{\Omega(2^{-\mathrm{s}})}{2^{-\gamma\|\mathrm{s}\|_1}} 2^{-\rho\|\mathrm{s}\|_1} 2^{(\rho-\gamma)\|\mathrm{s}\|_1} + \frac{\Omega(2^{-\mathrm{s}})}{2^{-\alpha\mathrm{s}}} 2^{-\beta\|\mathrm{s}\|_1} 2^{(\beta-\alpha)\|\mathrm{s}\|_1} \ll \Omega(2^{-\mathrm{s}}). \tag{15}$$

З (12) – (15) випливає, що для довільного вектора $\mathrm{s} \in \mathbb{Z}_+^d$ справджується порядкова нерівність

$$\|\Delta_{\mathrm{s}} f\|_p \ll \Omega(2^{-\mathrm{s}}), \qquad 1 \leq p \leq \infty, \tag{16}$$

з якої в свою чергу випливає справедливість зображення (9).

Далі, використовуючи це зображення, означення $T_N f$ і нерівність Мінковського, одержуємо

$$\|f - T_N f\|_p = \left\| \sum_{\mathrm{s}\in\mathbb{Z}_+^d} \Delta_s f - \sum_{\mathrm{s}\in\kappa(N)} \Delta_s f \right\|_p \leq \sum_{\mathrm{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\Delta_s f\|_p. \tag{17}$$

Підставляючи (16) в (17), згідно з лемою A і співвідношеннями (5) та (6) маємо

$$\|f - T_N f\|_p \ll \sum_{\mathrm{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\mathrm{s}}) \ll \sum_{\mathrm{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\mathrm{s}}) \asymp \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{s}\in\Theta(N)} 1 \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}(\log_2 N)^{d-1}.$$

Таким чином, теорему доведено.

Нехай тепер

$$\Omega(\mathrm{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \tag{18}$$

де ω — задана функція однієї змінної типу модуля гладкості порядку l, яка належить множинам S^{α} та S_l. Зрозуміло, що таким чином задана функція Ω буде належати множині $\Phi_{\alpha,l}$.

Беручи до уваги спеціальний вигляд функції Ω, досліджувані оператори (7) записуємо у вигляді

$$T_m = \sum_{\|\mathrm{s}\|_1\leq m} \prod_{i=1}^{d} (Y_{s_i}^i - Y_{s_i-1}^i), \tag{19}$$

де $m \in \mathbb{N}$, згідно з (2)–(5), визначається із співвідношення

$$\omega(2^{-m}) \asymp \frac{1}{N}. \tag{20}$$

У роботі [14] встановлено ще одне співвідношення, яке пов'язує m і N:

$$\log_2 N \asymp m. \tag{21}$$

Використовуючи теорему 1, оцінки (20) і (21), отримуємо наступне твердження.

Теорема 1′. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і функція* Ω *визначається співвідношенням* (18). *Тоді для довільної функції* $f \in H_p^\Omega$, $1 \le p \le \infty$, *похибка її наближення оператором* T_m, *означеним за формулою* (19), *оцінюється таким чином*:

$$\|f - T_m f\|_p \ll \omega(2^{-m}) m^{d-1}.$$

3. Оцінки ортопроекційних поперечників класів H_p^Ω у просторі L_p при $p \in \{1, \infty\}$. В якості наслідку з теореми 1′ і відомих результатів встановимо порядок ортопроекційного поперечника класів H_p^Ω.

Нагадаємо, що для функціонального класу $F \subset L_q$ ортопроекційний поперечник цього класу у просторі L_q означається згідно з формулою

$$d_m^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i \right\|_q, \tag{22}$$

де інфімум береться за всіма ортонормованими системами функцій $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset L_\infty$, $i = \overline{1, m}$. Поперечник $d_m^\perp(F, L_q)$ увів В. М. Темляков [15].

Паралельно з поперечниками $d_m^\perp(F, L_q)$ будемо розглядати величини $d_m^B(F, L_q)$, які також уведені В. М. Темляковим (див., наприклад, [16]) і означаються за формулою

$$d_m^B(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f - Gf\|_q. \tag{23}$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься у підпросторі розмірності m простору L_q;

б) існує таке число $B \ge 1$, що для всіх векторів $\mathrm{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ виконується нерівність

$$\|G e^{i(\mathrm{k}, \cdot)}\|_2 \le B.$$

Оскільки до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, то, згідно з означенням величин $d_m^\perp(F, L_q)$ і $d_m^B(F, L_q)$, вони пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^B(F, L_q) \le d_m^\perp(F, L_q). \tag{24}$$

З інформацією щодо дослідження величин (22) і (23) для тих або інших функціональних класів можна ознайомитися у роботах [12, 17, 18], а також у монографіях [5, 16].

Справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\Omega(\mathrm{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де* ω *— функція однієї змінної, що належить до множини* $\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$. *Тоді при* $p \in \{1,\ \infty\}$ *має місце порядкова оцінка*

$$d_m^{\perp}(H_p^{\Omega},\ L_p) \asymp \omega(2^{-l})l^{d-1}, \tag{25}$$

де $m \asymp 2^l l^{d-1}$.

Доведення. Спочатку встановимо у (25) оцінку зверху. Для цього візьмемо довільний базис $\{P_k\}_{|k|=1}^{\infty}$, який має такі властивості:

1) для довільного $|k| \geq 1$ $P_k(x)$ є тригонометричним поліномом степеня не більше $|k|$;

2) для довільного $k \neq l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ $(P_k, P_l) = 0$ і $(P_k, P_k) = 1$;

3) $L_N = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} \left|\sum_{|k|=1}^{N} P_k(t)P_k(x)\right| dt \leq C_8$, $C_8 > 0$, для довільного $N \in \mathbb{N}$;

4) для довільної функції $f \in L_p,\ 1 \leq p \leq \infty$,

$$\left\| f - \sum_{|k|=1}^{N} (f, P_k)P_k \right\|_p \leq KE_{C_9 N}(f)_p\ ,$$

де $K, C_9 > 0$ і $E_l(f)_p$ — найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами степеня не більше l у метриці простору L_p.

Приклади побудови таких базисів із відповідними сталими можна знайти в роботах [19, 20].

Покладемо

$$Y_n f = \sum_{|k|=1}^{2^n} (f, P_k)P_k, \quad n \geq 0, \tag{26}$$

і покажемо, що така послідовність операторів $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ буде задовольняти умови А і Б.

Покажемо спочатку, що для операторів $Y_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, виконується умова Б при $\beta = 0$. Розглянемо випадок $p = 1$ (при $p = \infty$ доведення аналогічне). Отже, нехай t — довільний тригонометричний поліном. Тоді

$$\|Y_n t\|_1 = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{|k|=1}^{2^n} (t, P_k)P_k(x) \right| dx =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{|k|=1}^{2^n} (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} t(y)P_k(y)dyP_k(x) \right| dx =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \left| (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} t(y) \sum_{|k|=1}^{2^n} P_k(y)P_k(x)dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \left| \max_{y\in[0,2\pi]} \left(\sum_{|k|=1}^{2^n} P_k(y)P_k(x) \right) (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |t(y)|dy \right| dx =$$

$$= \|t\|_1 \int\limits_0^{2\pi} \left| \max_{y\in[0,2\pi]} \sum_{|k|=1}^{2^n} P_k(y)P_k(x) \right| dx = \mathcal{J}_3.$$

Використовуючи властивість (3), завершуємо оцінку $\mathcal{J}_3$:

$$\mathcal{J}_3 \le \|t\|_1 \max_{y\in[0,2\pi]} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{|k|=1}^{2^n} P_k(y)P_k(x) \right| dx = L_{2^n}\|t\|_1 \ll \|t\|_1 \, .$$

Далі покажемо, що для операторів Y_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, виконується умова А з довільним $\rho > 0$. Використовуючи оцінки найкращого наближення функцій із класів Соболєва тригонометричними поліномами з відповідним спектром (див. [5, с. 47]) і властивість (4), маємо

$$\|(I - Y_n)\mathbf{F}_\rho\|_{p\to p} = \sup_{\|\varphi\|_p\le 1} \|(I - Y_n)\mathbf{F}_\rho\varphi\|_p = \sup_{f\in W_p^\rho} \|f - Y_n f\|_p =$$

$$= \sup_{f\in W_p^\rho} \|f - \sum_{|k|=1}^{2^n} (f, P_k)P_k\|_p \ll \sup_{f\in W_p^\rho} E_{2^n}(f)_p \ll 2^{-\rho n}.$$

Візьмемо $m \in \mathbb{N}$ і підберемо $l = l(m) \in \mathbb{N}$ таке, що $m \asymp 2^l l^{d-1}$. Згідно з теоремою $1'$ для довільної $f \in H_p^\Omega$, $p \in \{1, \ \infty\}$, має місце оцінка

$$\|f - T_l f\|_p \ll \omega(2^{-l})l^{d-1}.$$

З (26) випливає, що $T_l f$ є оператором взяття частинних сум ряду Фур'є по системі $\{P_{\mathrm{k}}\}_{|\mathrm{k}|\ge 1}$, де

$$P_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) = P_{k_1}(x_1)\ldots P_{k_d}(x_d).$$

Звідси згідно з означенням ортопроекційного поперечника отримуємо

$$d_m^\perp(H_p^\Omega, L_p) \ll \sup_{f\in H_p^\Omega} \|f - T_l f\|_p \ll \omega(2^{-l})l^{d-1}, \qquad p \in \{1, \infty\},$$

де $m \asymp 2^l l^{d-1}$.

Оцінка знизу в (25) випливає з нерівності (24) і результатів роботи [21].

Теорему доведено.

***Зауваження*. 1.** Якщо $\Omega(\mathrm{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, то аналогічні твердження до теорем 1 і 2 встановлено у роботі [9].

2. Теорема 2 доповнює результати робіт [21, 22].

1. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
2. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1342 – 1364.
3. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
4. *Пустовойтов Н. Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 1. – С. 107 – 117.

5. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ., 1993.
6. *Смоляк С. А.* Квадратурные и интерполяционные формулы для тензорных произведений некоторых классов функций // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 5. – С. 1042 – 1045.
7. *Темляков В. Н.* Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 2. – С. 256 – 268.
8. *Dinh Dung.* Optimal recovery of functions of a certain mixed smoothness // J. Math. – 1992. – **20**, № 2. – P. 18 – 32.
9. *Андрианов А. В., Темляков В. Н.* О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 32 – 43.
10. *Sickel W., Ullrich T.* The Smolyak algorithm, sampling on sparse grids and function spaces of dominating mixed smoothness // E. J. Approxim. – 2007. – **13**, № 4. – P. 387 – 425.
11. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**, № 3. – С. 143 – 161.
12. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**, № 3. – P. 181 – 213.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения . – М.: Наука, 1977. – 456 с.
14. *Стасюк С. А.* Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^\Omega_{p,\theta}$ // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 1. – С. 108 – 121.
15. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 314 – 317.
16. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 3 – 113.
17. *Галеев Э. М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 2. – С. 197 – 211.
18. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1348 – 1366.
19. *Привалов Ал. А.* Об одном ортогональном тригонометрическом базисе // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 3. – С. 384 – 394.
20. *Offin D., Oskolkov K. I.* A note on orthonormal polinomial bases and wavelets // Constr. Approxim. – 1993. – **9**, № 2. – P. 319 – 325.
21. *Федуник О. В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^\Omega_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 268 – 294.
22. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^\Omega_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.

Одержано 12.07.13