УДК 512.552.8

Ю. А. Дрозд, В. В. Зембик (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОБРАЖУВАЛЬНИЙ ТИП НОДАЛЬНИХ АЛГЕБР ТИПУ D

We establish representation types (finite, tame, wild) of nodal algebas of type D.

Определены представленческие типы (конечный, ручной, дикий) нодальных алгебр типа D.

Ця стаття є продовженням роботи [1], в якій було введено нодальні алгебри і встановлено зображувальні типи (скінченний, ручний, дикий) нодальних алгебр типу A, тобто таких, які отримуються роздуттями і склеюваннями з сагайдаків типу A або $\tilde{\mathrm{A}}$. У цій роботі ми встановимо зображувальні типи нодальних алгебр типу D, тобто таких, які отримуються роздуттями і склеюваннями з сагайдаків типу D або $\tilde{\mathrm{D}}$, але не є нодальними алгебрами типу A.

1. Нодальні алгебри. Ми фіксуємо алгебраїчно замкнене поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо лише скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри. Нагадаємо означення й конструкцію нодальних алгебр [1, 2].

Означення 1.1. *Алгебра A називається нодальною, якщо існує спадкова алгебра $H \supset A$ така, що*:

(1) $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} H$;

(2) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leq 2$ *для кожного простого лівого A-модуля U.*

Будемо казати, що нодальна алгебра A пов'язана зі спадковою алгеброю H.

Нагадаємо, що алгебра A називається *базовою* [3], якщо її фактор-алгебра $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$ ізоморфна прямому добутку тіл. А оскільки ми розглядаємо алгебри над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{k}$, то в даному випадку $A/\operatorname{rad} A \simeq \mathbf{k}^m$ для деякого m. З теорема Моріти [3] випливає, що алгебра і її базова алгебра мають однаковий зображувальний тип. У статті [1] встановлено, що якщо алгебра A є нодальною й пов'язана зі спадковою алгеброю H, то й її базова алгебра є нодальною й пов'язаною зі спадковою алгеброю, яка є Моріта-еквівалентною до H. Тому далі ми обмежимося розглядом лише базових нодальних алгебр.

Нагадаємо конструкцію, яка дає всі базові нодальні алгебри [1, 2]. Назвемо *нодальними даними* набір, який складається з:

(1) сагайдака Q;

(2) бінарного симетричного відношення $\sim$ на множині Q_0 (вершин сагайдака Q) такого, що для кожної вершини $i \in Q_0$ є не більше ніж одна вершина $j \in Q_0$ така, що $i \sim j$.

За цими даними будується базова нодальна алгебра $A(Q, \sim)$ у такий спосіб:

1. Розглядаємо спадкову алгебру H із сагайдаком Q і кратностями вершин

$$m_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad j \nsim j, \\ 2, & \text{якщо} \quad j \sim j. \end{cases}$$

2. У фактор-алгебрі $\bar{H} = H/\operatorname{rad} H = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Mat}(m_j, \mathbf{k})$ розглядаємо підалгебру $\bar{A}$, яка складається з таких наборів $(a_1, \ldots, a_s)$, що:

$a_j = a_k$, якщо $j \sim k$ і $k \neq j$; у цьому випадку ми будемо казати, що A отримується з H *склеюванням вершин* j та k сагайдака Q;

a_j є діагональною матрицею, якщо $j \sim j$; у цьому випадку ми будемо казати, що A отримується з H *роздуттям вершини* j сагайдака Q.

3. Розглядаємо підалгебру $A = A(Q, \sim) \subset H$, яка є прообразом підалгебри $\bar{A} \subset \bar{H}$; за побудовою, ця алгебра є базовою.

У [1, 2] доведено, що кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H із сагайдаком Q за допомогою деякої послідовності склеювань і роздуттів вершин цього сагайдака.

Нагадаємо, що склеювання вершин i та j сагайдака Q називають *неістотним*, якщо не існує стрілок, які входять у вершину i (відповідно, виходять із вершини i), та стрілок, які виходять із вершини j (відповідно, входять у вершину j). Відомо [1], що такі склеювання не впливають на зображувальний тип алгебри A.

2. Нодальні алгебри типу D. Якщо Q — сагайдак типу A або $\tilde{\mathrm{A}}$, то кажуть, що нодальна алгебра A є *нодальною алгеброю типу* A. У цьому випадку зображувальний тип алгебри A (скінченний, ручний, дикий) визначено в роботі [1]. Нас цікавитиме випадок, коли Q — сагайдак типу D або $\widetilde{\mathrm{D}}$:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 1 \arrow[dr, dash, "\alpha"] & & & & \\
\mathrm{D}_{n+3}: & & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \dots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\
 & 2 \arrow[ur, dash, "\beta"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 1 \arrow[dr, dash, "\alpha"] & & & & & 1' \\
\widetilde{\mathrm{D}}_{n+3}: & & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \dots \arrow[r, dash, "\gamma_{n-1}"] & (n+2) \arrow[ur, dash, "\alpha'"] \arrow[dr, dash, "\beta'"'] & \\
 & 2 \arrow[ur, dash, "\beta"'] & & & & & 2'
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

з довільною орієнтацією ребер. Далі ми використовуватимемо позначення вершин і стрілок з (2.1).

Позначимо через Q' сагайдак, який одержується з Q вилученням вершини 2 і ребра β. Якщо сагайдак Q є типу D, то сагайдак Q' має тип A; якщо ж Q є типу $\widetilde{\mathrm{D}}$, то Q' матиме тип D.

***Зауваження* 2.1.** Припустимо, що жодна з вершин $1, 2$ не бере участь у склеюваннях. Якщо обидві стрілки α, β починаються (або обидві закінчуються) у вершині 3, то алгебру A можна одержати із сагайдака Q', зробивши ті самі склеювання й роздуття та додавши ще роздуття вершини 1. Нехай тепер одна з цих стрілок починається у вершині 3, а друга там закінчується. Якщо α (або β) не входить до співвідношень алгебри A, то до вершини 1 (відповідно, 2) можна застосувати віддзеркалення з роботи [4], одержавши зображення алгебри, яка відрізняється від A лише орієнтацією стрілки α (відповідно, β). Але неважко переконатися, що за будь-яких склеювань, у яких вершини 1 та 2 не беруть участі, та роздуттів вершин, відмінних від 3, принаймні одна зі стрілок α чи β не увійде до співвідношень. Отже, цей випадок зводиться до попереднього. Звичайно, те саме стосується вершин $1'$ і $2'$ у випадку сагайдака типу $\widetilde{\mathrm{D}}$.

З огляду на це зауваження введемо таке означення.

Означення 2.1. *Назвемо нодальну алгебру A нодальною алгеброю типу* D, *якщо у відповідних нодальних даних сагайдак Q має тип* D *або* $\widetilde{\mathrm{D}}$, *причому або одна з вершин* $1, 2$ *бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини* 3. *У випадку сагайдака типу* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *ми, крім того, вважаємо, що або одна з вершин* $1', 2'$ *бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини* $(n+2)$.

Наступні теореми описують зображувальні типи нодальних алгебр типу D. При цьому напрямок стрілок, не вказаний явно на діаграмах, є довільним і не впливає на зображувальний тип.

Теорема 2.1. *Нехай нодальна алгебра A є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* D *деякими неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій*:

(1) *склеюванням вершин* 1 *і* 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\ & 3 \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\ 2 \arrow[ur, "\beta"'] & & & & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

при $n \leq 2$;

(2) *склеюванням вершин* 1 *і* 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\ & 3 \arrow[dl, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma_1"'] \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\ 2 & & & & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

при $n \leq 4$;

(3) *склеюванням вершин* 1 *і* $(n+2)$ *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\ & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"] \arrow[dl, dash, "\beta"] & \ldots \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] & (n+2) \arrow[r, "\gamma_n"] & (n+3) \\ 2 & & & & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

при $2 \leq n \leq 4$.

Тоді A *має скінченний зображувальний тип.*

Теорема 2.2. *Нехай нодальна алгебра A є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* D *або* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій*:

(1) *склеюванням вершин* 1 *і* 3 *у сагайдаку* (2.3) *при* $n = 5$;

(2) *склеюванням вершин* 1 *і* 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & 3 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[dl, "\beta"] & 4\ ; \\ 2 & & \end{tikzcd}$$

(3) *склеюванням вершин* 1 *і* 4 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\ & 3 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[dl, dash, "\beta"] & 4 \arrow[r, "\gamma_2"] & 5 \arrow[r, dash, "\gamma_3"] & 6\ ; \\ 2 & & & & \end{tikzcd}$$

(4) *склеюванням вершин* 1 *і* $(n+2)$ *у сагайдаку* (2.4) *при* $n=5$;
(5) *роздуттям вершини* 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & 3 \arrow[dl, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \\ 2 & & \end{tikzcd} ; \tag{2.5}$$

(6) *роздуттям вершини* 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & 4 \arrow[dl, "\gamma"'] \\ & 3 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ 2 & & 5 \end{tikzcd} . \tag{2.6}$$

Тоді A *є ручною, нескінченного зображувального типу.*

Теорема 2.3. *Якщо нодальна алгебра* A *типу* D *не є ані ізоморфною, ані антиізоморфною до алгебри, яка підпадає під випадки, описані у теоремах* 1 *і* 2, *то вона є дикою.*

3. Доведення теорем. Будемо доводити теореми 2.1 – 2.3 одночасно. При цьому розглянемо окремі випадки склеювання й роздуття. З точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму можна вважати (і ми це робитимемо), що стрілка α направлена від вершини 1 до вершини 3, причому або вершина 1 бере участь у склеюванні, або відбувається роздуття вершини 3.

Випадок 3.1. Склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (2.2).

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha^2=0,\ \alpha\beta=0.$

Після зведення $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ рядки β розділяться на три частини, причому внаслідок умови $\alpha\beta=0$ останній рядок буде нульовим. Зведемо β :

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді γ_1 розіб'ється на шість стовпчиків, причому стовпчики 1 і 2, а також стовпчики 5 і 6 *пов'язані*, тобто в них відбуваються однакові перетворення. Після зведення стрілок $\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ рядки матриці γ_1 розділяться на n частин, причому вони будуть лінійно впорядковані. Після зведення перших двох стовпчиків цієї матриці стовпчики 5 і 6 поділяться кожен на $n+1$ частину. Усього зі стовпчиків $3-6$ отримаємо $2n+4$ ненульові стовпчики. Додавання цих стовпчиків задається частково впорядкованою множиною S вигляду

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, dash] \\
2 \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & 3 \arrow[d, dash] \\
4 \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & \vdots \arrow[d, dash] \\
\vdots \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & 2n+3 \\
2(n+2) \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd} .$$

З [5] випливає, що наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка є лінійно впорядкованою і має $n-1$ елемент. З робіт [5, 6] випливає, що ця задача є скінченною при $n \leq 2$ і дикою при $n > 2$. Отже, такою є й алгебра A. Це дає перше твердження теореми 2.1.

Будь-яке додаткове істотне склеювання або роздуття дає додатковий поділ матриці β або γ_1, що робить задачу дикою. Розглянемо, наприклад, випадок, коли склеюються ще вершини 4 і 5 за умови, що стрілка γ_2 направлена до вершини 5 (інакше це склеювання є неістотним). Результуючий сагайдак зі співвідношеннями містить підсагайдак

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[loop above, "\gamma_2"]
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\quad \alpha^2 = 0, \quad \alpha\beta = 0, \quad \gamma_2^2 = 0.$

Після зведення α і γ_2 до вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матриці β і γ_1 розіб'ються в такий спосіб:

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\uparrow \qquad \gamma_1 = \overrightarrow{\begin{pmatrix} G_{11}^* & G_{12} & G_{13}^* \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31}^* & G_{32} & G_{33}^* \end{pmatrix}} \Big\uparrow .$$

Стрілки показують напрямок перетворень, причому перетворення рядків у матриці β і стовпчиків у матриці γ_1 є *контрагредієнтними*[1], а у матриць, позначених зірочками, перетворення рядків і стовпчиків є спільними. Розглянемо зображення, в яких $B_1 = 0$, $B_2 = I$, у матриці γ_1 немає другої горизонтальної смуги $\left(\text{тобто } \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $G_{33} = I$, а матриці G_{31}, G_{32} та G_{13} є нульовими. Легко переконатися, що таке зображення ізоморфне зображенню аналогічного вигляду з матрицями G'_{11} і G'_{12} на відповідних місцях тоді й тільки тоді, коли існують невироджені матриці C_1 і C_2 такі, що $G'_{11} = C_1 G_{11} C_1^{-1}$, а $G'_{12} = C_1 G_{12} C_2$. Інакше кажучи, матриці G_{11} і G_{12} задають зображення дикого сагайдака

[1] Це означає, що коли матриця β домножується зліва на невироджену матрицю C, то матриця γ_1 домножується справа на C^{-1}.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}.$$

Отже, алгебра A є дикою. При інших додаткових склеюваннях або роздуттях доведення дикості є аналогічним (навіть, як правило, легшим). Звідси випливає твердження теореми 2.3 у випадку, коли наявне склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (2.2).

Випадок 3.2. Склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (2.3).

В результаті отримаємо сагайдак

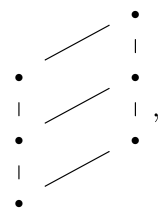
$$\begin{tikzcd} 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[loop above, "\alpha"] & 4 \arrow[l, "\gamma_1"'] \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

$$\text{зі співвідношеннями} \quad \alpha^2 = 0, \quad \alpha\gamma_1 = 0.$$

Після зведення $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ стовпчики β і, відповідно, рядки γ_1 розділяться на 3 частини, причому внаслідок умови $\alpha\gamma_1 = 0$ остання частина в γ_1 буде нульовою. Перетвореннями, які не змінюють вигляд матриці α, матрицю β можна звести до вигляду

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ_1 розділиться на 10 горизонтальних частин, з яких лише шість перших будуть ненульовими. Після зведення матриць $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ матриця γ_1 розділиться ще на n вертикальних частин, тобто в γ_1 буде шість ненульових рядків і n стовпчиків. Легко бачити, що тепер додавання рядків задається частково впорядкованою множиною S вигляду



а додавання стовпчиків — лінійно впорядкованою множиною, яка складається з n елементів. Отже, згідно з [5], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка є лінійно впорядкованою і має $n-1$ елемент. Згідно з [5, 6], при $n \leq 4$ ця задача має скінченний тип, при $n = 5$ є ручною (нескінченного типу), а при $n > 5$ — дикою. Отже, такою є й алгебра A. Це дає друге твердження теореми 2.1 і перше твердження теореми 2.2. Знов-таки, будь яке додаткове істотне склеювання або роздуття дає дику матричну задачу. Це доводить теорему 2.3 у випадку, коли відбувається склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (2.3).

Випадок 3.3. Склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\ & 3 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3)\ . \\ 2 & & & & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

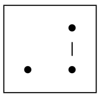
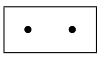
В результаті одержимо сагайдак

$$\begin{tikzcd} 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma_1"'] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

із співвідношенням $\alpha^2 = 0$. Зведемо матрицю α так само, як у попередніх випадках. Стовпчики матриць β і γ_1 розділяться на три частини, які можна додавати зліва направо, причому перетворення першої й третьої частин мають бути однаковими. Після зведення матриць $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ рядки матриці γ_1 розділяться на n частин, перетворення яких задаються лінійно впорядкованою множиною. Якщо $n = 1$, то одержимо задачу про зображення в'язки ланцюгів $\mathfrak{E} = \{\, e \,\}$, $\mathfrak{F} = \{\, f_1 < f_2 < f_3 \,\}$ з відношенням $\sim$ таким, що $e \sim e$, $f_1 \sim f_3$[2]. Ця задача є ручною (нескінченного типу), тому такою ж є й алгебра A. Якщо ж $n > 1$, розглянемо такі зображення, в яких $\gamma_3 = \ldots = \gamma_n = 0$, другої вертикальної частини матриць β і γ_1 немає $\left(\text{тобто } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, а перша й третя вертикальні частини зведені до вигляду

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & G_1 & G_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & G_3 & G_4 \\ \hline 0 & 0 & G_5 & G_6 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тут подвійна горизонтальна лінія показує розділ між матрицями β і γ_1, а одинична — між частинами матриці γ_1, які утворилися після зведення матриці γ_2. Неважко переконатися, що тоді матриці G_i утворюють зображення пари частково впорядкованих множин

$S =$  і $T =$ .

З роботи [9] випливає, що ця задача, а тому й алгебра A, є дикою. Це дає друге твердження теореми 2.2 і теорему 2.3 у випадку, коли має місце склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (3.1).

Випадок 3.4. Склеювання вершин 1 і $(m+3)$ $(1 \le m < n)$ у сагайдаку

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & & & & \\ & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & \ldots \arrow[r, "\gamma_m"] & (m+3) \arrow[r, "\gamma_{m+1}"] & (m+4) \arrow[r, dash] & \ldots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3)\ . \\ 2 \arrow[ur, dash, "\beta"'] & & & & & & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

---

[2]Ми користуємося означенням в'язок ланцюгів з роботи [7]. У роботі [8] для таких самих задач використовувалися термін „*в'язка напівланцюгів*" й інше кодування.

Зауважимо, що якщо стрілка γ_m направлена від вершини $(m+3)$, то навіть при $m = n$ ми одержимо в алгебрі A дикий підсагайдак без співвідношень

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"'] & \cdots & (m+3) \arrow[l, "\gamma_m"] \arrow[ll, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd} .$$

Якщо ж стрілок, направлених від вершини $(m+3)$, немає, то склеювання 1 і $(m+3)$ є неістотним. Отже, можна вважати, що $n > m$, стрілка γ_m направлена до вершини $(m+3)$, а стрілка γ_{m+1} — від цієї вершини. Напрямок стрілки β не впливає на зображувальний тип, оскільки ця стрілка напевно не входить у співвідношення, а тому можна зробити віддзеркалення за [4] в точці 2 і змінити її напрямок. У наступних обчисленнях ми вважаємо, що $\beta\colon 2 \to 3$.

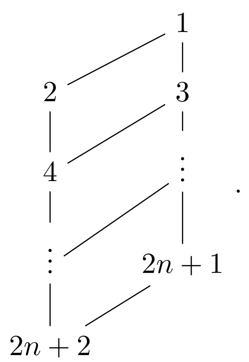
В результаті отримаємо сагайдак

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"'] & \cdots \arrow[r, "\gamma_m"'] & (m+3) \arrow[ll, bend right, "\alpha"'] \arrow[r, "\gamma_{m+1}"] & (m+4) \arrow[r, dash, "\gamma_{m+2}"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

зі співвідношенням $\alpha\gamma_m = 0$. Після зведення матриць β та γ_i, які утворюють сагайдак типу A_{n+2}, матриця α розіб'ється на $2(n+1)$ горизонтальну смугу й кілька вертикальних смуг. Зі співвідношення $\alpha\gamma_2 = 0$ випливає, що ненульовими в матриці α є лише ті вертикальні смуги, які відповідають зображенням підсагайдака

$$\begin{tikzcd} (m+3) \arrow[r, "\gamma_3"] & (m+4) \arrow[r, dash, "\gamma_4"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd} ,$$

ненульовим у вершині $(m+3)$. Таких смуг буде $n - m + 1$, причому їх додавання керується лінійно впорядкованою множиною. Додавання ж горизонтальних смуг керується частково впорядкованою множиною S:



Згідно з [5], одержана задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та лінійно впорядкованої множини з $n-m$ елементів. З робіт [5, 6] випливає, що ця задача, а тому й алгебра A, має скінченний тип при $m \leq 3$, $n = m+1$, є ручною при $m = 1$, $n = 3$ або $m = 4$, $n = 5$ і дикою в усіх інших випадках. Це дає третє твердження теореми 2.1, третє та четверте твердження теореми 2.2. Знов-таки, додаткові склеювання чи роздуття дають дикі алгебри, що доводить теорему 2.3 у випадку, коли наявне склеювання вершин 1 і $(m+3)$ $(m > 0)$ у сагайдаку (3.2).

Випадок 3.5. Роздуття вершини 3 у сагайдаку (2.6).

В результаті одержимо сагайдак

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\alpha''"] & 4 \arrow[d, "\gamma''"] \arrow[dl, "\gamma'"'] \\
3' \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, "\delta'"] & 3'' \arrow[d, "\delta''"] \arrow[dl, "\beta''"'] \\
2 & 5
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$, $\delta'\gamma' = \delta''\gamma''$, $\beta'\gamma' = \beta''\gamma''$, $\delta'\alpha' = \delta''\alpha''$. У роботі [10] доведено, що ця алгебра є ручною. Це дає шосте твердження теореми 2.2, а також п'яте твердження цієї ж теореми, оскільки сагайдак (2.5) є підсагайдаком у сагайдаку (2.6).

Отже, ми повністю довели теореми 2.1 і 2.2. Для доведення теореми 2.3 залишилося довести, що наступні операції дають дику алгебру:

(1) склеювання крайніх вершин за умови, що воно є істотним, тобто з однієї з цих вершин стрілка виходить, а в другу входить;

(2) роздуття вершини 3 у сагайдаку типу D_{n+3} або $\widetilde{\mathrm{D}}_{n+3}$, якщо або $n > 1$, або принаймні три стрілки входять до цієї вершини або з неї виходять;

(3) істотні склеювання, в яких бере участь принаймні одна з вершин $1, 2$ і принаймні одна з вершин $1', 2'$ у сагайдаку типу $\tilde{\mathrm{D}}$.

Операції (1) і (2), як одразу видно, завжди дають дикий підсагайдак без співвідношень. Операція (3) поділяється на випадки, аналогічні випадкам 3.1 – 3.4, розглянутим вище. Неважко переконатися, що в усіх цих випадках відбувається додатковий поділ матриць, який перетворює відповідні задачі на дикі. Це завершує доведення теореми 2.3.

1. *Drozd Y. A., Zembyk V. V.* Representations of nodal algebras of type A // Algebra and Discrete Math. – 2013. – **15**, № 2. – P. 179 – 200.
2. *Зембик В. В.* Будова скінченновимірних нодальних алгебр // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 415 – 419.
3. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – Киев: Вища шк., 1980.
4. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 2. – С. 19 – 33.
5. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32 – 41.
6. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**. – С. 963 – 991.
7. *Burban I., Drozd Y.* Derived categories of nodal algebras // J. Algebra. – 2004. – **272**. – P. 46 – 94.
8. *Бондаренко В. М.* Связки полуцепных множеств и их представления. – Киев, 1988. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88.60).
9. *Kleiner M. M.* Pairs of partially ordered sets of tame representation type // Linear Algebra and Appl. – 1988. – **104**. – P. 103 – 115.
10. *Geiss C., de la Peña J. A.* An interesting family of algebras // Arch. Math. – 1993. – **60**. – P. 25 – 35.

Одержано 18.09.13