УДК 517.9

О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

НАБЛИЖЕНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

For a problem of optimal stabilization of solutions of a nonlinear parabolic boundary-value problem with small parameter of a nonlinear summand, we justify the form of approximate regulator on the basis of the formula of optimal synthesis of the corresponding linear quadratic problem.

Для задачи оптимальной стабилизации решений нелинейной параболической краевой задачи с малым параметром при нелинейном слагаемом обоснована форма приближенного регулятора на основе формулы оптимального синтеза соответствующей линейно-квадратической задачи.

Вступ. Як відомо з [1, 2], задача оптимального синтезу (тобто знаходження оптимального керування у формі зворотного зв'язку) для розподілених систем зводиться до функціонального рівняння Беллмана, яке для деяких класів лінійно-квадратичних задач допускає явне розв'язання, а отже, знаходження точної формули синтезу. Виникає питання: чи реалізує ця формула хоча б наближений синтез (у сенсі близькості значень цільового функціонала) у випадку малих нелінійних збурень вихідної задачі? Спираючись на загальні результати щодо розв'язності систем типу реакції-дифузії з негладкою нелінійністю [3], позитивну відповідь на це питання у випадку задачі на скінченному проміжку часу отримано в [4].

У даній роботі формулу наближеного синтезу обґрунтовано для задачі оптимального керування на нескінченному проміжку часу. При цьому використано результати про розв'язність у замкненому вигляді задачі оптимальної стабілізації для лінійно-квадратичних параболічних систем [5, 6].

Постановка задачі. Основним об'єктом вивчення є наступна задача оптимальної стабілізації: знайти керування

$$u \in U = L_2([0,+\infty)), \tag{1}$$

що доставляє найменше значення функціоналу

$$J(u) = \int_0^{+\infty} \left(\int_\Omega y^2(t,x)dx + \gamma u^2(t) \right) dt, \quad \gamma > 0, \tag{2}$$

визначеному на розв'язках задачі

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\, y(t,x) = \Delta y(t,x) - \varepsilon f(y(t,x)) + g(x)u(t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &y(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ &y(0,x) = \varphi(x,\varepsilon), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з кусково-гладкою межею, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $g \in L_2(\Omega)$ і нелінійне збурення $f \in C(\mathbb{R})$ задовольняє умову: знайдуться такі сталі $C > 0,\ \alpha > 0,\ p \geq 2$, що для кожного $y \in \mathbb{R}$ справджуються оцінки

$$|f(y)| \leq C(1 + |y|^{p-1}), \quad yf(y) \geq \alpha |y|^p. \tag{4}$$

З [3] маємо, що за умов (4) для довільних $\varepsilon > 0$, $\varphi(x,\varepsilon) \in L_2(\Omega)$, $u \in U$ існує принаймні один (можливо, не єдиний) розв'язок крайової задачі (3) у класі

$$W = L_2^{\mathrm{loc}}([0,+\infty); H_0^1(\Omega)) \cap L_p^{\mathrm{loc}}([0,+\infty); L_p(\Omega)) \cap C([0,+\infty); L_2(\Omega)),$$

тобто існує функція $y(t,x,\varepsilon) \in W$ така, що $y(0,x,\varepsilon) = \varphi(x,\varepsilon)$, і для всіх $T > 0$, $\xi \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $\eta \in C_0^\infty((0,T))$ має місце рівність

$$-\int_0^T \big(y(t,\varepsilon),\xi\big)\eta_t(t)dt + \int_0^T \Big[\big(\big(y(t,\varepsilon),\xi\big)\big) + \varepsilon\big(f(y(t,\varepsilon)),\xi\big)\Big]\eta(t)dt =$$

$$= \int_0^T (g,\xi)u(t)\eta(t)dt. \tag{5}$$

Тут і далі будемо позначати через $|\cdot|$ і $(\cdot,\cdot)$ відповідно норму і скалярний добуток в $L_2(\Omega)$, через $\|\cdot\|$ і $((\cdot,\cdot))$ відповідно норму і скалярний добуток в $H_0^1(\Omega)$. При цьому для майже всіх $t > 0$ виконується рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|y(t,\varepsilon)\big|^2 + \big\|y(t,\varepsilon)\big\|^2 = -\varepsilon\big(f(y(t,\varepsilon)),y(t,\varepsilon)\big) + u(t)\big(g,y(t,\varepsilon)\big), \tag{6}$$

з якої внаслідок (4) для довільних $t \geq s \geq 0$ випливають апріорні оцінки

$$\frac{d}{dt}\big|y(t,\varepsilon)\big|^2 + \big\|y(t,\varepsilon)\big\|^2 + \delta\big|y(t,\varepsilon)\big|^2 + 2\varepsilon\alpha\big\|y(t,\varepsilon)\big\|_{L_p}^p \leq C_1|u(t)|^2, \tag{7}$$

$$\big|y(t,\varepsilon)\big|^2 \leq \big|y(s,\varepsilon)\big|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1\int_s^t e^{-\delta(t-\tau)}|u(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \big|y(s,\varepsilon)\big|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1\|u\|_U^2, \tag{8}$$

$$\int_s^t \big|y(\tau,\varepsilon)\big|^2 d\tau \leq \frac{1}{\delta}\left(\big|y(s,\varepsilon)\big|^2 + C_1\int_s^t |u(\tau)|^2 d\tau\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\Big(\big|y(s,\varepsilon)\big|^2 + C_1\|u\|_U^2\Big), \tag{9}$$

де $\|u\|_U^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt$ і константи $\delta > 0$, $C_1 > 0$ залежать лише від Ω, g, C, α, p. Оцінки (8), (9) гарантують, що для всіх $\varepsilon > 0$, $u \in U$, $\varphi(x,\varepsilon) \in L_2(\Omega)$ функціонал (2) на розв'язках задачі (3) визначено коректно.

Нехай $\big\{\tilde{y}(t,x,\varepsilon),\tilde{u}(t,\varepsilon)\big\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3), $\widetilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{u}(t,\varepsilon))$ — відповідне значення функціонала.

Припустимо, що $\varphi(x,\varepsilon) \to \varphi(x)$ при $\varepsilon \to 0$ слабко в $L_2(\Omega)$, і розглянемо задачу (1)–(3) з $\varepsilon = 0$ і початковою умовою $\varphi(x)$. У цьому випадку (1)–(3) — лінійно-квадратична задача без обмежень, яка згідно з [5, 6] має єдиний оптимальний регулятор $u[y]$, що стабілізує розв'язки задачі (3) і має вигляд

$$u[y] = (\mathcal{R}, y), \tag{10}$$

де

$$\mathcal{R}(x) = -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i X_i(x)}{\lambda_i^2(1+\gamma_i)} \in L_2(\Omega),$$

$\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ — додатні розв'язки нелінійної системи

$$\gamma_i = \frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j^2}{\lambda_j^2(\lambda_i^2+\lambda_j^2)(1+\gamma_i)}.$$

Тут $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\lambda_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ — власні функції та власні числа спектральної задачі

$$-\Delta X(x) = \lambda^2 X(x),$$

$$X(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$g_i = \int_{\Omega} g(x)X_i(x)dx$, $i \geq 1$.

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t,x) = \Delta y(t,x) - \varepsilon f(y(t,x)) + g(x)u[y], \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &y(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \\ &y(0,x) = \varphi(x,\varepsilon), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Нехай $\widehat{y}(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (11), $\widehat{u}(t,\varepsilon) := u\big[\widehat{y}(t,x,\varepsilon)\big]$, $\widehat{J}_\varepsilon := J(\widehat{u}(t,\varepsilon))$.

Мета даної роботи — обґрунтувати граничну рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\widetilde{J}_\varepsilon - \widehat{J}_\varepsilon| = 0, \tag{12}$$

тобто показати, що керування $\widehat{u}(t,\varepsilon)$ реалізує близьке до оптимального значення цільового функціонала (2).

Основний результат.

Лема 1. *Для для довільних $\varepsilon > 0$, $\varphi(x,\varepsilon) \in L_2(\Omega)$ задача оптимального керування* (1)–(3) *має принаймні один розв'язок* $\{\tilde{y}(t,x,\varepsilon), \tilde{u}(t,\varepsilon)\}$.

Доведення проводиться стандартним чином шляхом вибору мінімізуючої послідовності з подальшим обґрунтуванням граничного переходу і доведенням оптимальності отриманого керування.

Лема 2. *За умови*

$$|g|^2 < 2\gamma\lambda_1^4 \tag{13}$$

задача (11) *для кожного $\varepsilon > 0$ та $\varphi(x,\varepsilon) \in L_2(\Omega)$ має принаймні один розв'язок $y(t,x,\varepsilon) \in W$, причому для будь-якого розв'язку* (11) *з W*

$$J(u[y(t,x,\varepsilon)]) < \infty.$$

Доведення. Доведення глобальної розв'язності задачі (11) повторює відповідні міркування для задачі (3). При цьому для кожного розв'язку $y(t,x,\varepsilon) \in W$ задачі (11) справджується оцінка

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|y(t,\varepsilon)\big|^2+\big\|y(t,\varepsilon)\big\|^2+\alpha\varepsilon\big\|y(t,\varepsilon)\big\|^p_{L_p}\leq |g||\mathcal{R}|\big|y(t,\varepsilon)\big|^2. \tag{14}$$

Оскільки для кожного $i\geq 1$ числа $\gamma_i>0$, то $|\mathcal{R}|\leq\dfrac{|g|}{2\gamma\lambda_1^2}$. Отже, з умови (13) та нерівності Пуанкаре випливає, що існує $\kappa>0$ таке, що

$$\frac{d}{dt}\big|y(t,\varepsilon)\big|^2+\kappa\big|y(t,\varepsilon)\big|^2\leq 0.$$

Таким чином, для всіх $t\geq s\geq 0$ виконуються нерівності

$$\big|y(t,\varepsilon)\big|^2\leq e^{-\kappa(t-s)}\big|y(t,\varepsilon)\big|^2,\qquad \Big|u[y(t,x,\varepsilon)]\Big|\leq e^{-\kappa(t-s)/2}|\mathcal{R}|\big|y(t,\varepsilon)\big|, \tag{15}$$

зокрема,

$$J\Big(u\big[y(t,x,\varepsilon)\big]\Big)<\infty.$$

Лему доведено.

Наведені вище леми дозволяють сформулювати основний результат роботи.

Теорема. *Нехай виконано умови* (4), (13), $\varphi(x,\varepsilon)\xrightarrow{w}\varphi(x)$ *в* $L_2(\Omega)$, $\big\{\widetilde{y}(t,x,\varepsilon),\ \widetilde{u}(t,\varepsilon)\big\}$ *— оптимальний процес у задачі* (1)–(3), $\widetilde{J}_\varepsilon=J\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big)$, $\widehat{y}(t,x,\varepsilon)$ *— розв'язок задачі* (11), $\widehat{J}_\varepsilon=J\big(\widehat{u}(t,\varepsilon)\big)$. *Тоді*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\widetilde{J}_\varepsilon-\widehat{J}_\varepsilon|=0. \tag{16}$$

Доведення. Граничну рівність (16) буде доведено, якщо показати, що виконуються граничні рівності

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\widetilde{J}_\varepsilon-J_0|=0, \tag{17}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\widehat{J}_\varepsilon-J_0|=0, \tag{18}$$

де $J_0=J\big(\widetilde{u}(t)\big)$, $\big\{\widetilde{y}(t,x),\widetilde{u}(t)\big\}$ — (єдиний) оптимальний процес у задачі (1)–(3) з $\varepsilon=0$ та початковою функцією $\varphi(x)$.

Спочатку доведемо рівність (17). Нехай $z(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (3) з керуванням $u=0\in U$. Тоді з (8), (9) та оптимальності $\widetilde{u}(t,\varepsilon)$ маємо оцінку

$$\big\|\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big\|_U^2\leq\frac{1}{\gamma}J\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big)\leq\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{+\infty}\big|z(t,\varepsilon)\big|^2dt\leq\frac{\big|\varphi(\varepsilon)\big|^2}{\gamma\delta}. \tag{19}$$

Таким чином, існує $\widetilde{u}(t)\in U$ таке, що по підпослідовності

$$\widetilde{u}(t,\varepsilon)\xrightarrow{w}\widetilde{u}(t)\quad\text{в}\quad L_2([0,+\infty)).$$

Крім того, оцінки (7)–(9), (19) дозволяють для послідовності $\big\{\widetilde{y}(t,x,\varepsilon)\big\}$ повторити міркування з [4] (теорема 1) і стверджувати, що існує $\widetilde{y}(t,x)$ — розв'язок задачі (3) при $\varepsilon=0$ з керуванням $\widetilde{u}(t)$ та початковою функцією $\varphi(x)$ такий, що по підпослідовності для довільних $0<\tau<T$

$$\widetilde{y}(t,x,\varepsilon)\to\widetilde{y}(t,x)\quad\text{в}\quad L_2([0,T];L_2(\Omega))\cap C([\tau,T];L_2(\Omega)).$$

Тоді для всіх $T > 0$

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon \geq \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} J_T\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big) \geq J_T(\widetilde{u}(t)),$$

отже,

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon \geq J(\widetilde{u}(t)). \tag{20}$$

За принципом оптимальності Беллмана для кожного $T > 0$ процес $\big\{\widetilde{y}(t,x,\varepsilon), \widetilde{u}(t,\varepsilon)\big\}$ на $[T,+\infty)$ є оптимальним для задачі (1)–(3) з початковими даними $\big(T,\widetilde{y}(T,x,\varepsilon)\big)$. Тоді для довільного $T > 0$ виконується нерівність

$$\int\limits_T^{+\infty} \big|\widetilde{y}(t,\varepsilon)\big|^2 dt + \gamma \int\limits_T^{+\infty} \big|\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big|^2 dt \leq \int\limits_T^{+\infty} \big|p(t,\varepsilon)\big|^2 dt, \tag{21}$$

де $p(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (3) на $[T,+\infty)$ з керуванням $u = 0$ та початковими даними $\big(T,\widetilde{y}(T,x,\varepsilon)\big)$.

З оцінок (8), (9) одержимо

$$\int\limits_T^{+\infty} \big|p(t,\varepsilon)\big|^2 dt \leq \frac{1}{\delta}\big|\widetilde{y}(T,\varepsilon)\big|^2. \tag{22}$$

Тепер зафіксуємо довільне $u \in U$ і відповідний йому розв'язок $\omega(t,x,\varepsilon)$ задачі (3).

Проводячи аналогічні до попередніх міркування, переконуємося, що по підпослідовності для кожного $T > 0$

$$\omega(t,x,\varepsilon) \to \omega(t,x) \quad \text{в} \quad L_2([0,T];L_2(\Omega)) \cap C([\tau,T];L_2(\Omega)),$$

де $\omega(t,x)$ — єдиний розв'язок задачі (3) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $u(t)$ та початковою функцією $\varphi(x)$. Крім того,

$$\int\limits_T^{+\infty} \big|\omega(t,\varepsilon)\big|^2 dt \leq \frac{1}{\delta}\left(\big|\omega(T,\varepsilon)\big|^2 + C_1 \int\limits_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt\right). \tag{23}$$

Тоді з нерівності $\widetilde{J}_\varepsilon \leq J(u)$ та оцінок (21)–(23) для довільного $T > 0$ отримуємо

$$J_T\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big) \leq \int\limits_0^T |\omega(t,\varepsilon)|^2 dt + \gamma \int\limits_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta}|\omega(T,\varepsilon)|^2 + \frac{C_1}{\delta} \int\limits_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt. \tag{24}$$

Звідси

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, J_T\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big) \geq \int\limits_0^T \big|\widetilde{y}(t)\big|^2 dt + \gamma\, \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T \big|\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big|^2 dt \geq J_T\big(\widetilde{u}(t)\big), \tag{25}$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, J_T\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big) \leq \frac{1}{\delta}\big|\omega(T,\varepsilon)\big|^2 +$$

$$+\int_0^T |\omega(t)|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt + \frac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt. \tag{26}$$

Таким чином, з нерівностей (25), (26) при $T \to \infty$ випливає, що

$$J(\widetilde{u}(t)) \leq J(u(t)),$$

отже, $\{\widetilde{y}(t,x), \widetilde{u}(t)\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3) з $\varepsilon = 0$ та початковою функцією $\varphi(x)$, причому внаслідок єдиності керування $\widetilde{u}(t)$ має вигляд (10).

Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u(t) = \widetilde{u}(t)$. Тоді для відповідних розв'язків $\widetilde{\omega}(t,x,\varepsilon)$ задачі (3) внаслідок єдиності розв'язку в задачі (3) з $\varepsilon = 0$ маємо, що $\widetilde{\omega}(t,x,\varepsilon) \to \widetilde{y}(t,x)$ і з (21)–(24) отримуємо оцінку

$$\int_0^T \left|\widetilde{y}(t,\varepsilon)\right|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t,\varepsilon)\right|^2 dt \leq$$

$$\leq \gamma \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt + \int_0^T \left|\widetilde{\omega}(t,\varepsilon)\right|^2 dt + \int_T^{+\infty} \left|\widetilde{\omega}(t,\varepsilon)\right|^2 dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left|\widetilde{\omega}(T,\varepsilon)\right|^2 + \gamma \int_0^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|\widetilde{\omega}(t,\varepsilon)\right|^2 dt + \frac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t)\right|^2 dt. \tag{27}$$

Тоді

$$\gamma \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t,\varepsilon)\right|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t)\right|^2 dt + \frac{1}{\delta}\left|\widetilde{y}(T)\right|^2 + \frac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t)\right|^2 dt$$

і при $T \to \infty$ одержуємо

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t,\varepsilon)\right|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \left|\widetilde{u}(t)\right|^2 dt, \tag{28}$$

що разом зі слабкою збіжністю гарантує сильну збіжність $\widetilde{u}(t,\varepsilon)$ до $\widetilde{u}(t)$ в $L_2([0, +\infty))$.

Далі з нерівностей (21), (22) одержуємо нерівність

$$\widetilde{J}_\varepsilon \leq J_T\big(\widetilde{u}(t,\varepsilon)\big) + \frac{1}{\delta}\left|\widetilde{y}(T,\varepsilon)\right|^2.$$

Тоді

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon \leq J_T\big(\widetilde{u}(t)\big) + \frac{1}{\delta}\left|\widetilde{y}(T)\right|^2$$

і при $T \to \infty$

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon \leq J\big(\widetilde{u}(t)\big), \tag{29}$$

що разом з (20) означає, що по деякій підпослідовності

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon = J\big(\widetilde{u}(t)\big).$$

Припускаючи від супротивного, що ця збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon \to 0$, можемо повторити попередні міркування і внаслідок єдиності оптимального процесу $\big\{\widetilde{y}(t,x), \widetilde{u}(y)\big\}$ прийти до суперечності.

Таким чином, з (19), (20), (29) маємо

$$\begin{gathered}\widetilde{u}(t,\varepsilon) \to \widetilde{u}(t) \quad \text{в} \quad L_2([0,+\infty)), \\ \widetilde{y}(t,x,\varepsilon) \to \widetilde{y}(t,x) \quad \text{в} \quad L_2([0,+\infty); L_2(\Omega)), \\ \widetilde{J}_\varepsilon \to J_0, \quad \varepsilon \to 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Доведемо граничну рівність (18). Оцінки (13) – (15) дозволяють стверджувати, що для кожного $T > 0$

$$\begin{gathered}\big\{\widehat{y}(t,x,\varepsilon)\big\} \quad \text{обмежена в} \quad L_2([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L_\infty([0,+\infty); L_2(\Omega)), \\ \big\{\varepsilon^{1/p}\,\widehat{y}(t,x,\varepsilon)\big\} \quad \text{обмежена в} \quad L_p([0,T]; L_p(\Omega)), \\ \big\{\varepsilon^{1/q} f(\widehat{y}(t,x,\varepsilon))\big\} \quad \text{обмежена в} \quad L_q([0,T]; L_q(\Omega)), \\ \big\{\widehat{y}_t(t,x,\varepsilon)\big\} \quad \text{обмежена в} \quad L_q([0,T]; H^{-s}(\Omega)),\end{gathered} \tag{31}$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $s \geq \max\left\{1, \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) n\right\}$.

Тоді за лемою про компактність [7] по даній підпослідовності при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered}\widehat{y}(t,x,\varepsilon) \to \widehat{y}(t,x) \quad \text{слабко в} \quad L_2([0,T]; H_0^1(\Omega)), \\ \widehat{y}(t,x,\varepsilon) \to \widehat{y}(t,x) \quad \text{сильно в} \quad L_2([0,T]; L_2(\Omega)), \\ \widehat{y}(t,x,\varepsilon) \to \widehat{y}(t,x) \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{для всіх} \quad t \in [0,T], \\ \widehat{y}(t,x,\varepsilon) \to \widehat{y}(t,x) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T).\end{gathered} \tag{32}$$

Тому, скориставшись оцінкою

$$\varepsilon \int\limits_0^T (f(\widehat{y}(t,\varepsilon)), \xi)\eta(t)dt \leq \varepsilon^{1/p} \left\| \varepsilon^{1/q} f(\widehat{y}(t,\varepsilon)) \right\|_{L_q([0,T];L_q)} \|\xi\eta\|_{L_p([0,T];L_p)},$$

можемо перейти до границі у співвідношенні (5) з $u(t) = u\big[\widehat{y}(t,x,\varepsilon)\big] = \big(\mathcal{R}, \widehat{y}(t,\varepsilon)\big)$ і одержати, що $\widehat{y}(t,x)$ — розв'язок задачі (11) з $\varepsilon = 0$ та початковою функцією $\varphi(x)$. Але ця задача має єдиний розв'язок $\widetilde{y}(t,x)$, отже, $\widetilde{y}(t,x) \equiv \widehat{y}(t,x)$, $u\big[\widehat{y}(t,x,\varepsilon)\big] \to \to \widetilde{u}(t)$ для всіх $t \geq 0$ і збіжність йде по всій послідовності $\varepsilon \to 0$.

Крім того, оскільки для довільних $t \geq s \geq 0$ мають місце нерівності $\big|\widehat{y}(t,\varepsilon)\big| \leq \leq \big|\widehat{y}(s,\varepsilon)\big|$, $\big|\widetilde{y}(t)\big| \leq \big|\widetilde{y}(s)\big|$, то з неперервності $\widehat{y}(t,\varepsilon)$ і $\widetilde{y}(\cdot)$ та (32) випливає, що

$$\widehat{y}(t,\varepsilon) \to \widetilde{y}(t) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{для всіх} \quad t > 0.$$

Внаслідок (15) для будь-якого $t \geq 0$

$$\big|\widehat{y}(t,\varepsilon)\big|^2 + \gamma\Big|u\big[\widehat{y}(x,t,\varepsilon)\big]\Big|^2 \leq \big(1 + \gamma|\mathcal{R}|^2\big)\big|\varphi(\varepsilon)\big|^2 e^{-\kappa t}.$$

Тоді за теоремою Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{J}_\varepsilon = J(\widetilde{u}) = J_0,$$

і при цьому

$$\widehat{y}(t,x,\varepsilon)\to\widetilde{y}(t,x) \quad \text{в} \quad L_2([0,+\infty);L_2(\Omega)),$$
$$u\big[\widehat{y}(t,\varepsilon)\big]\to\widetilde{u}(t) \quad \text{в} \quad L_2([0,+\infty)).$$

Теорему доведено.

Висновки. У роботі доведено розв'язність задачі оптимальної стабілізації для нелінійної крайової задачі параболічного типу з квадратичним критерієм якості. При малих нелінійностях обґрунтовано формулу наближеного синтезу на основі точної формули оптимального керування зі зворотним зв'язком для відповідної лінійно-квадратичної задачі.

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
3. *Valero J., Kapustyan O. V.* On the connectedness and asymptotic behaviour of solutions of reaction-diffusion systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2006. – **323**. – P. 614 – 633.
4. *Капустян О. В., Капустян О. А., Сукретна А. В.* Наближений обмежений синтез для однієї слабконелінійної крайової задачі // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 291 – 298.
5. *Бублик Б. Н., Невидомский А. И.* Синтез оптимального сосредоточенного управления для уравнения теплопроводности // Модели и системы обработки информации. – 1982. – Вып. 1. – С. 78 – 87.
6. *Сукретна А. В.* Наближена оптимальна стабілізація розв'язків параболічної крайової задачі обмеженим керуванням // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 2. – С. 264 – 279.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Одержано 12.10.10