УДК 517.5 + 513.835

Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська, М. В. Ткачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ДЕЯКІ КРИТЕРІЇ ОПУКЛОСТІ КОМПАКТІВ

We establish some criteria of convexity of compact sets in the Euclidean space. Analogs of these results are extended to complex and hypercomplex cases.

Найдены критерии выпуклости компактов в евклидовом пространстве. Аналоги этих результатов перенесены на комплексный и гиперкомплексный случаи.

Метою роботи є узагальнення теореми Ауманна [1] на ациклічні компакти та встановлення опуклості одного з класів гіперкомплексно опуклих поліедрів у багатовимірному гіперкомплексному (кватерніонному) просторі $\mathbb{H}^n$. Терміни, які використовуються в роботі без пояснення, взято з монографій [2, 3].

Лема 1. *Нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ — ациклічний неопуклий компакт. Тоді існує опорна до K гіперплощина, яка перетинає K по множині, що містить ненульовий цикл.*

Доведення. Припустимо, що це не так і всі опорні площини перетинають K по ациклічних множинах. Не порушуючи загальності будемо вважати, що внутрішність опуклої оболонки компакта непорожня (якщо це не так, то можемо перейти до найменшої площини, яка містить його) і початок координат міститься у внутрішності опуклої оболонки $\operatorname{conv} K$ компакта K. Нехай $(\operatorname{conv} K)^*$ — поляра до $\operatorname{conv} K$, яка при накладених на K припущеннях буде компактною множиною. Будемо досліджувати у просторі $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ множину $\operatorname{conv} K \times (\operatorname{conv} K)^*$, а точніше її підмножину F, яку можна задати двома еквівалентними способами

$$F = \{(x, y) \in \operatorname{conv} K \times (\operatorname{conv} K)^* \mid x \in \partial \operatorname{conv} K, y \in \partial[(\operatorname{conv} K)^*]\},$$

де точка y задає опорну гіперплощину до $\operatorname{conv} K$, що проходить через точку x, або, що те ж саме, точка x задає опорну гіперплощину до $(\operatorname{conv} K)^*$, що проходить через точку y. Внаслідок опуклості множин $\operatorname{conv} K$ і $(\operatorname{conv} K)^*$ опорні гіперплощини перетинають їх по опуклих, а отже, ациклічних множинах. Отже, існують два неперервних відображення $p_1 : F \to \partial(\operatorname{conv} K)$ і $p_2 : F \to \to \partial[(\operatorname{conv} K)^*]$, які будуть ациклічними (стягують у точку відповідні перетини з опорними площинами) і згідно з теоремою Вьєторіса – Бегла індукують ізоморфізми відповідних груп когомологій. Оскільки межі опуклих невироджених компактів гомеоморфні $(n-1)$-сфері, то і відповідні групи множини F збігаються з групами сфери. Далі використаємо рівність поляр $K^* = (\operatorname{conv} K)^*$. Розглянемо тепер підмножину множини F, яка має властивості

$$F_0 = \{(x, y) \in F \mid x \in K \cap \partial \operatorname{conv} K, y \in \partial[(\operatorname{conv} K)^*]\},$$

де, як і вище, точка y задає опорну гіперплощину до K, що проходить через точку x, а точка x задає опорну гіперплощину до $(\operatorname{conv} K)^*$, що проходить через точку y. З того, що $K \neq \operatorname{conv} K$, випливає, що F_0 — власна підмножина

F. Як і вище, існують неперервні відображення $h_1 : F_0 \to K \bigcap \partial(\operatorname{conv} K)$ і $h_2 : F_0 \to \to \partial[(\operatorname{conv} K)^*]$. Покажемо їх ациклічність. Проекція h_1 ациклічна, тому що множина опорних площин у точці $x \in K$ збігається з множиною опорних площин у тій же точці до $\operatorname{conv} K$. Проекція h_2 ациклічна, тому що, згідно з припущенням, перетини компакта K з опорними гіперплощинами ациклічні. Отже, як і вище, маємо два ациклічних відображення, які індукують ізоморфізми груп когомологій. Тому

$$H^{n-1}(K \bigcap \partial \operatorname{conv} K) \approx H^{n-1}(F_0) \approx H^{n-1}\left[(\operatorname{conv} K)^*\right] \approx H^{n-1}(S^{n-1}).$$

А це можливо тільки тоді, коли $K \bigcap \partial \operatorname{conv} K = \partial \operatorname{conv} K$ і, отже, внаслідок ациклічності K, $\operatorname{conv} K = K$. Отримана суперечність доводить лему.

***Приклад* 1.** Розглянемо півсферу $S^- = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \le 0\}$. Опорна площина $x_3 = 0$ перетинає її по одновимірному циклу (колу). Перетини з іншими опорними площинами є відповідними єдиними точками півсфери.

Зауважимо, що при доведенні леми ми скористалися ациклічністю компакта лише в кінці при ствердженні його опуклості. Тому справедливим є наступний наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Якщо кожна опорна до K гіперплощина перетинає K по ациклічній множині, то або K є опуклим компактом, або він містить ненульовий $(n-1)$-цикл.*

Носієм цього циклу буде межа $\partial \operatorname{conv} K$, якщо K має внутрішні пустоти.

Означення 1. *Будемо говорити, що m-площина L, $0 \le m \le n-1$, є опорною до компакта K, якщо $L \bigcap K \subset \partial K$.*

З леми 1 випливає наступне узагальнення теореми Ауманна для ациклічних компактів.

Теорема 1. *Для того щоб ациклічний компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ був опуклим, необхідно і достатньо, щоб усі його перетини опорними m-площинами, $1 \le m \le \le n-1$, були ациклічними.*

Отриманий результат легко переноситься на комплексний випадок. Терміни, які будуть використані, визначено в [2].

Твердження 1 [2, c.132]. *Компакти $K \subset \mathbb{C}^n$, перетини яких опорними гіперплощинами зв'язні, мають сильно лінійно опуклу c-оболонку.*

Теорема 2. *Для того щоб ациклічний компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ з не порожньою внутрішністю був сильно лінійно опуклим, необхідно і достатньо, щоб усі його перетини опорними комплексними m-площинами, $1 \le m \le n-1$, були ациклічними.*

Доведення повторює міркування з доведення леми 1 і теореми 1 з використанням спряженої до K множини. Отриманий результат підсилює теорему 9.1 [2] у випадку ациклічних компактів.

Далі ми будемо переносити теорему 11.1 [2] на гіперкомплексний випадок.

Означення 2. *Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається лінійно гіперкомплексно* *опуклою, якщо її доповнення до* $\mathbb{H}^n$ *є деяким об'єднанням гіперплощин простору* $\mathbb{H}^n$.

Внаслідок некомутативності множення в тілі кватерніонів слід розрізняти площини, які задаються множенням справа чи зліва. Далі будемо розглядати лінійні підмножини, що визначені множенням зліва (для іншого випадку міркування аналогічні).

Означення 3. *Гіперкомплексним поліедром називають множину вигляду*

$$E = \{z : f_j(h) \in E_j, j \in J = \{1, 2, \ldots, N\}\},$$

де множини $E_j \subset H$, $f_j(h) = \sum_{k=1}^n a_{jk} h_k$, *причому будь-які дві функції* f_j, f_k, $k \neq j$, *є лінійно незалежними, а кожна з функцій* f_j *відображає* E *в підмножину* E_j *гіперкомплексної прямої. Множини* E_j *називають твірними гіперкомплексного поліедра* E.

Легко перевірити, що кожен гіперкомплексний поліедр E буде лінійно гіперкомплексно опуклою множиною. Точка $h_0 = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ не належить гіперкомплексному поліедру E тоді і тільки тоді, коли існують натуральне число $j \in J$ і кватерніон b, відмінний від дільників нуля, такі, що $f_j(h_0) = \sum_{k=1}^n a_{jk} h_k = b \notin E_j$. Тоді гіперплощина $\sum_{k=1}^n a_{jk} h_k = b$ проходить через точку h_0 і, очевидно, не перетинає E.

Означення 4. *Множину*

$$\Gamma_j = \{h \in \partial E : f_j(h) \in \partial E_j \text{ а } f_k(h) \in \operatorname{int} E_k,\ k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, N\}$$

називають гранню, а множину

$$\hat{E} = \{h : f_j(h) \in \partial E_j, j \in J = \{1, 2, \ldots, N\}\}$$

— остовом поліедра E.

Далі будемо розглядати частковий випадок гіперкомплексних поліедрів, які будуть невиродженими декартовими добутками множин, що лежать у гіперкомплексно одновимірних просторах, тобто жоден із співмножників не є точкою, або усім простором.

Означення 5. *Множина* $E \subset \mathbb{H}^n$ *називається сильно лінійно опуклою, якщо її перетини гіперкомплексними прямими ациклічні* (*гомотопно еквівалентні точці*).

У [4] доведено, що сильно лінійно опуклі області і компакти є лінійно гіперкомплексно опуклими множинами.

Наступна теорема характеризує сильно лінійно опуклі компакти, які можна зобразити як декартові добутки.

Теорема 3. *Компакт, який є невиродженим декартовим добутком, сильно лінійно опуклий тоді і тільки тоді, коли він опуклий.*

Доведення. Нехай E — сильно лінійно опуклий компакт. Не порушуючи загальності можна вважати, що $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{H}^2$, інакше досить перейти до перетину E гіперкомплексно двовимірним простором.

Далі для продовження доведення встановимо кілька лем.

Лема 2. *Нехай* K_1 і K_2 *— дві компактні ациклічні підмножини евклідового простору* $\mathbb{R}^4$, *кожна з яких містить не менше двох точок, крім того, множина* K_2 *є опуклим тілом* (*тобто замиканням відкритої множини*). *Якщо для кожного невиродженого лінійного відображення* f *множина* $K_1 \bigcap f(K_2)$ *ациклічна* (*в тому числі порожня*), *то множина* K_1 *теж опукла*.

Доведення. Припустимо, що множина K_1 не є опуклою. Якщо множина K_1 незв'язна, то виберемо дві точки x_1 і x_2, що лежать у різних компонентах K_1. Легко підібрати лінійне відображення f, яке дві точки компакта K_2 переведе в ці дві точки множини K_1. Внаслідок гомеоморфності f перетин $K_1 \bigcap f(K_2)$ незв'язний, що суперечить умові.

Якщо ж множина K_1 зв'язна, то згідно з лемою 1 існує перетин K_1 опорною гіперплощиною, який містить ненульовий цикл. Відображення f виберемо таким, щоб $f(K_2)$ містив всередині кулю достатньо великого радіуса і гіперплощина, паралельна до дотичної, в досить малому околі точки дотику містила в перетині з $f(K_2)$ кулю діаметра більшого, ніж діаметр перетину K_1 з обраною гіперплощиною. Тепер легко підібрати зсув множини $f(K_2)$ так, щоб основна її частина знаходилася в іншому півпросторі, ніж множина K_1, і перетин $K_1 \bigcap$ $\bigcap f(K_2)$ мало відрізнявся від перетину K_1 вибраною опорною площиною, а отже, містив ненульовий цикл. Цим опуклість множини K_1 встановлено.

Легко бачити, що лема залишиться справедливою, якщо чотиривимірний евклідів простір розглядати як гіперкомплексний простір $\mathbb{H}$, а відображення f — як гіперкомплексно лінійне відображення.

Покажемо, що лема 2 не буде правильною, якщо обмежитися лише лінійними зсувами без гомотетій.

***Приклад* 2.** Нехай K_2 — куля одиничного радіуса і K_1 — півсфера одиничного радіуса. Якщо обмежитися тільки лінійними трансляціями множини K_2 без гомотетій, то всі можливі парні перетини $K_1 \bigcap f(K_2)$ множин ациклічні.

Означення 6. 1-*Прапором у просторі* $\mathbb{R}^n$ *назвемо його замкнений півпростір, а його межу — древком прапора. Поширимо означення по індукції*: k-*прапором у просторі* $\mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, *назвемо об'єднання відкритого півпростору з* $(k-1)$-*прапором, що лежить у його межі. При цьому* k-*прапор містить у собі усі менші* m-*прапори,* $1 \le m \le k$, *його древком будемо називати древко найменшого вкладеного* 1-*прапора. Для повноти* 0-*прапором будемо називати сам простір* $\mathbb{R}^n$, *древком для нього будемо вважати його ж. Два прапори будемо називати доповнюючими, якщо їх перетин міститься в древку.*

Лема 3. *Кожен компакт* $K \subset \mathbb{R}^n$ *лежить в деякому* n-*прапорі так, що його перетин з кожним меншим підпрапором не є порожнім.*

Лема очевидно доводиться послідовним викиданням з простору частин, які лежать по іншій бік відповідних опорних площин.

Лема 4. *Для кожного неопуклого компакта* $K \subset \mathbb{R}^n$ *існує вкладення в деякий* k*-прапор так, що його перетин з кожним меншим підпрапором не порожній, а перетин з древком є носієм* $(n-k-1)$*-вимірного циклу.*

Доведення. Згідно з наслідком 1, якщо перетин з древком, яке є $(n-k)$-вимірним евклідовим простором, містить цикл розмірності меншої за $n-k-1$, то буде існувати вкладення компакта в $(k+1)$-прапор і так далі, поки не одержимо ненульовий цикл максимально можливої розмірності в древку.

Лема 5. *Нехай* $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ *— два компакти, що містять ненульові* $(n-1)$*-цикли і початок координат,* $n \geq 2$. *Тоді існує відображення* f *таке, що* $K_1 \bigcap f(K_2)$ *є носієм ненульового циклу, де* f *є суперпозицією повороту простору* $\mathbb{R}^n$ *і його гомотетії відносно початку координат.*

Доведення. З умов леми і формули Кюнетта [5] у вигляді точної послідовності груп когомологій

$$0 \to H^{n-1}(K_1) \otimes H^{n-1}(K_2) \to H^{2n-2}(K_1 \times K_2)$$

випливає, що $(2n-2)$-вимірна група когомологій декартового добутку $K_1 \times K_2$ відмінна від нуля. Графіком описаного в лемі відображення буде перетин цього декартового добутку з n-вимірною площиною, що проходить через початок координат. Припустимо, що для кожного відображення f множини $K_1 \bigcap f(K_2)$ ациклічні. Об'єднання множини перетинів збігається з декартовим добутком $K_1 \times K_2$. Далі аналогічно теоремі 4.2 [3] одержуємо ациклічність $K_1 \times K_2$, що суперечить встановленому вище.

Тепер повернемося до доведення теореми 3. Якщо один із співмножників опуклий, то у випадку, коли він містить внутрішні точки, досить застосувати лему 2, щоб одержати неациклічний перетин гіперплощиною. Якщо ж не містить внутрішніх точок, то він знаходиться в дійсній гіперплощині простору $\mathbb{H}$. Тоді його можна розмістити в опорній гіперплощині до K_1, яка перетинає K_1 по циклу, і гомотетією K_2 можна добитися циклу в перетині $K_1 \bigcap f(K_2)$, який еквівалентний перетину вихідного компакта гіперкомплексною прямою.

Якщо обидва співмножники неопуклі, то згідно з лемою 4 розмістимо співмножники у прапорах так, щоб цикли максимальної розмірності лежали у відповідних древках, а внутрішності компактів — у доповнюючих прапорах. Якщо ці древка мають різну розмірність, то зафіксуємо меншу з них (нехай це m), а в древку більшої розмірності виділимо підпростір цієї ж розмірності, який цикл древка розбиває. Це можливо, адже ми показали, що ненульовий цикл розбиває древко. Отже, згідно з лемою 5, досить підбирати відображення в евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$, внутрішності компактів при цьому перетинатися не будуть. Тепер існування неациклічного перетину підмножин древків, яке встановлене в лемі 5, суперечить сильній гіперкомплексній опуклості компакта K і завершує доведення теореми.

Критерій опуклості області евклідового простору можна знайти в [6].

1. *Aumann G.* On a topological characterization of compact convex sets // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 3. – P. 443 – 447.
2. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем. – М.: Наука., 1985. – 336 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
4. *Мкртчян Г. А.* О сильной гиперкомплексной выпуклости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 182 – 187.
5. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
6. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю.* Критерий выпуклости области евклидова пространства // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 708 – 712.

Одержано 30.12.10