УДК 517.946

С. С. Мирзоев, Р. Ф. Сафаров (Бакин. ун-т, Азербайджан)

О ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

In the class of holomorphic vector functions, we determine conditions of the solvability of boundary-value problem for a class of second-order differential operator equations, which are given in terms of operator coefficients containing in the equation and in the boundary condition.

У класі голоморфних вектор-функцій вказано умови розв'язності крайової задачі для одного класу операторно-диференціальних рівнянь другого порядку, що виражаються у термінах операторних коефіцієнтів, які входять у рівняння і крайову умову.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — положительно определенный самосопряженный оператор в H, а H_γ — шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A, т. е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x,y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $\gamma \geq 0$, $H_0 = H$.

Обозначим через $L_2(R_+;H)$ гильбертово пространство всех вектор-функций $f(t)$, определенных в $R_+ = (0,\infty)$ почти всюду со значениями в H, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int\limits_0^\infty \|f(t)\|^2\,dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Введем гильбертово пространство [1, 2]

$$W_2^2(R_+;H) = \left\{u(t)\colon u''(t) \in L_2(R_+;H),\, A^2u(t) \in L_2(R_+;H)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} = \left(\left\|A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|u''\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}.$$

Здесь производные понимаются в смысле теории распределений [1, 2].

Обозначим через $H_{2,\alpha}$ множество вектор-функций $f(z)$, голоморфных в секторе

$$S_\alpha = \{z\colon\ |\arg z| < \alpha\}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$$

со значениями в H, для которых при любом $\varphi \in (-\alpha,\alpha)$ вектор-функция $f_\varphi(t) = f\left(te^{i\varphi}\right)$ принадлежит $L_2(R_+;H)$, причем

$$\sup_{|\varphi|<\alpha} \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|_{L_2(R_+;H)} < \infty.$$

Легко видеть, что вектор-функции $f(z) \in H_{2,\alpha}$ имеют граничные значения (в смысле сходимости почти всюду или в $L_2(R_+;H)$) $f_{\pm\alpha}(t) \in L_2(R_+;H)$ на лучах $\Gamma_{\pm\alpha} = te^{\pm i\alpha}$, $t > 0$, и $H_{2,\alpha}$ становится гильбертовым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{H_{2,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|f_\alpha(t)\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|f_{-\alpha}(t)\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

Введем гильбертово пространство

$$W^2_{2,\alpha} = \left\{ u(z) \colon u''(z) \in H_{2,\alpha},\ A^2 u(z) \in H_{2,\alpha} \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W^2_{2,\alpha}} = \left(\|u''(z)\|^2_{H_{2,\alpha}} + \left\|A^2 u(z)\right\|^2_{H_{2,\alpha}} \right)^{1/2}.$$

Здесь производные понимаются в смысле комплексного анализа.

Оказывается, функции $u(z)$ из $W^2_{2,\alpha}$ также имеют граничные значения $u_{\pm\alpha}(t) \in W^2_2 (R_+; H)$ и при $u \in W^2_{2,\alpha}$, $Au'(z) \in H_{2,\alpha}$, $u(0) \in H_{3/2}$, $u'(0) \in H_{1/2}$, причем

$$\|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \le \mathrm{const}\ \|u\|_{W^2_{2,\alpha}}, \quad \left\|u^{(j)}(0)\right\|_{2-j-1/2} \le \mathrm{const}\ \|u\|_{W^2_{2,\alpha}}, \quad j = 0, 1.$$

Предположим, что K — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $H_{3/2}$ в $H_{1/2}$, т. е. K принадлежит $L\left(H_{3/2}, H_{1/2}\right)$. Тогда

$$W^2_{2,\alpha}(K) = \left\{ u(z) \colon u(z) \in W^2_{2,\alpha},\ u'(0) = Ku(0) \right\}$$

— подпространство гильбертова пространства $W^2_{2,\alpha}$.

Рассмотрим в пространстве H краевую задачу

$$P\left(\frac{d}{dz}\right) u(z) = -u''(z) + A^2 u(z) + A_1 u'(z) = f(z), \quad z \in S_\alpha, \tag{1}$$

$$u'(0) = Ku(0), \tag{2}$$

где $f(z) \in H_{2,\alpha}$, $u(z) \in W^2_{2,\alpha}$, а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A — положительно определенный самосопряженный оператор;

2) A_1 — линейный, вобще говоря, неограниченный оператор, причем оператор $B = A_1 A^{-1}$ ограничен в H;

3) оператор K принадлежит $L\left(H_{3/2}, H_{1/2}\right)$.

Определение 1. *Если при $f(z) \in H_{2,\alpha}$ существует вектор-функция $u(z) \in W^2_{2,\alpha}$, удовлетворяющая уравнению* (1) *тождественно в S_α, то будем называть ее регулярным решением уравнения* (1).

Определение 2. *Если при любом $f(z) \in H_{2,\alpha}$ существует регулярное решение $u(z)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее граничному условию* (2) *в смысле сходимости*

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ |\arg z| < \alpha}} \|u'(z) - Ku(z)\|_{1/2} = 0,$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W^2_{2,\alpha}} \le \mathrm{const}\, \|f\|_{H_{2,\alpha}},$$

то задачу (1), (2) *будем называть регулярно разрешимой.*

В данной работе мы установим достаточные условия для коэффициентов операторно-дифференциального уравнения (1) и краевого условия (2), обеспечивающие регулярную разрешимость задачи (1), (2). Отметим, что аналогичные задачи рассмотрены в работе [3] на полуоси, а в работе [4] в секторе S_α с другим краевым условием.

Сначала займемся регулярной разрешимостью задачи

$$P_0\left(\frac{d}{dz}\right)u(z) = -u''(z) + A^2u(z) = f(z), \quad z \in S_\alpha, \tag{3}$$

$$u'(0) = Ku(0). \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1, 3 *и оператор* $E + A^{-1}K$ *ограниченно обратим в* $H_{3/2}$. *Тогда оператор* $P_0 \equiv P_0\,(d/dz)$ *изоморфно отображает пространство* $W^2_{2,\alpha}(K)$ *на* $H_{2,\alpha}$.

Доказательство. Использовав аналогичные выкладки из книги [2], легко показать, что при $x \in H_{3/2}$ вектор-функция $e^{-zA}x$ является общим регулярным решением уравнения (3). Здесь e^{-zA} — голоморфная полугруппа ограниченных операторов, порожденная оператором $-A$. Из условия $u \in W^2_{2,\alpha}(K)$ следует, что $-Ax = Kx$ или $\left(E + A^{-1}K\right)x = 0$. Поскольку оператор $E + A^{-1}K$ обратим в $H_{3/2}$, то $x = 0$. Теперь покажем, что образ оператора P_0 совпадает с пространством $H_{2,\alpha}$. Так как на лучах $\Gamma_\pm = \{z\colon z = te^{\pm i(\pi/2+\alpha)},\ t \geq 0\}$ имеет место оценка $\sum_{j=0}^{2}\left\|z^jA^{2-j}P_0^{-1}(z)\right\| \leq \mathrm{const}$ ([4], лемма 1), то вектор-функция

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k}(-1)^k P_0^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)e^{\lambda z}d\lambda, \quad \Gamma_1 = \Gamma_+, \quad \Gamma_2 = \Gamma_-,$$

где $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(z)$, является частным регулярным решением уравнения (3). Тогда общее регулярное решение уравнения (3) имеет вид

$$u(z) = u_0(z) + e^{-zA}x, \quad x \in H_{3/2}.$$

Отсюда, учитывая условие (4), относительно x получаем уравнение $Ax + Kx = u_0'(0) - Ku_0(0)$ или $\left(E + A^{-1}K\right)x = A^{-1}\left(u_0'(0) - Ku_0(0)\right)$. Поскольку $u_0(z) \in W^2_{2,\alpha}$, то $u(0) \in H_{3/2}$, $u'(0) \in H_{1/2}$, $A^{-1}u'(0) \in H_{3/2}$, $A^{-1}Ku_0(0) \in H_{3/2}$. Следовательно,

$$x = \left(E + A^{-1}K\right)^{-1}A^{-1}\left(u_0'(0) - Ku_0(0)\right) \in H_{3/2}.$$

Таким образом, $u(z)$ принадлежит $W^2_{2,\alpha}(K)$, т. е. образ оператора P_0 совпадает с пространством $H_{2,\alpha}$. Далее, учитывая, что при $u \in W^2_{2,\alpha}(K)$ имеет место оценка

$$\|P_0u\|_{H_{2,\alpha}} = \left\|-u'' + A^2u\right\|_{H_{2,\alpha}} \leq \mathrm{const}\,\|u\|_{W^2_{2,\alpha}},$$

и применяя теорему Банаха об обратном операторе, завершаем доказательство теоремы.

Из этой теоремы следует, что $\|P_0u\|_{H_{2,\alpha}}$ является нормой в пространстве $W^2_{2,\alpha}(K)$, эквивалентной исходной норме $\|u\|_{W^2_{2,\alpha}}$. Тогда согласно теореме о промежуточных производных конечна следующая норма:

$$N_{1,\alpha}(K) = \sup_{0\neq u\in W^2_{2,\alpha}(K)} \|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \|P_0 u\|^{-1}_{H_{2,\alpha}} .$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1 – 3, $E + A^{-1}K$ *ограниченно обратим в* $H_{3/2}$ *и* $\|B\| < N_{1,\alpha}(K)$. *Тогда задача* (1), (2) *регулярно разрешима.*

Доказательство. Запишем задачу (1), (2) в виде уравнения

$$Pu = P_0 u + P_1 u = f,$$

где $u \in W^2_{2,\alpha}(K)$, $f \in H_{2,\alpha}$, $P_0 = P_0(d/dz)$, $P_1 = P_1(d/dz) = A_1 d/dz$.

Поскольку по теореме 1 оператор P_0 является изоморфным, после замены $u = P_0^{-1}v$ получаем относительно v уравнение $v + P_1P_0^{-1}v = f$ в пространстве $H_{2,\alpha}$. В силу того, что при любом $v \in H_{2,\alpha}$

$$\left\|P_1P_0^{-1}v\right\|_{H_{2,\alpha}} = \|A_1u'\|_{H_{2,\alpha}} \le \|B\|\,\|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \le N_{1,\alpha}(K)\,\|B\|\,\|P_0u\|_{H_{2,\alpha}} =$$

$$= N_{1,\alpha}(K)\,\|B\|\,\|v\|_{H_{2,\alpha}} = q\,\|v\|_{H_{2,\alpha}} ,$$

где $q = N_{1,\alpha}(K)\,\|B\| < 1$, оператор $E + P_1P_0^{-1}$ обратим в $H_{2,\alpha}$, $u = P_0^{-1}(E + P_1P_0^{-1})^{-1}$ и $\|u\|_{W^2_{2,\alpha}} \le \text{const}\,\|f\|_{H_{2,\alpha}}$.

Теорема доказана.

Таким образом, для нахождения условий регулярной разрешимости задачи (1), (2) мы должны выразить норму $N_{1,\alpha}(K)$ через операторные коэффициенты.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 1 – 3, *оператор* $E+A^{-1}K$ *обратим в* $H_{3/2}$. *Тогда имеет место оценка* $\mathrm{N}_{1,\alpha}(K) \le \alpha_K$, *где*

$$\alpha_K =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\cos\alpha} & \textit{при } \operatorname{Re}(A^{-1}Ky,y)_{3/2} \ge 0, \\ \dfrac{1}{2\cos\alpha}\left(1 - 4\left|\inf\limits_{\|y\|_{3/2}=1} \dfrac{\operatorname{Re}\left(A^{-1}Ky,y\right)_{3/2}}{1+\|A^{-1}Ky\|_{3/2}}\right|^2\right)^{-1/2} & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Используя аналогичные выкладки из работы [4], получаем, что при любом $\beta \in [0; 4\cos^2\alpha)$ и $u \in W^2_{2,\alpha}(K)$ имеет место равенство

$$\|P_0u\|^2_{H_{2,\alpha}} - \beta\,\|Au'\|^2_{H_{2,\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\Phi(d/dt;\beta;A)u_\alpha\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|\Phi(d/dt;\beta;A)u_{-\alpha}\|^2_{L_2(R_+;H)}\right) + Q(\beta,y), \quad (5)$$

где $\Phi(\lambda;\beta;A) = \lambda^2E + \sqrt{4\cos^2\alpha - \beta}\lambda A + A^2$, $u(0) = y$,

$$Q(\beta,y) = 4\cos\alpha \operatorname{Re}\left(A^{-1}Ky,y\right)_{3/2} + \sqrt{4\cos^2\alpha - \beta}(\|y\|^2_{3/2} + \left\|A^{-1}Ky\right\|^2_{3/2}). \quad (6)$$

Из равенства (5) следует, что если $\operatorname{Re}\left(A^{-1}Ky,y\right)_{3/2} \ge 0$, то $Q(\beta,y) \ge 0$ при любом $\beta \in (0; 4\cos^2\alpha)$ и $y \in H_{3/2}$. Тогда при всех $u \in W^2_{2,\alpha}(K)$ и $\beta \in (0; 4\cos^2\alpha)$

$$\|P_0 u\|^2_{H_{2,\alpha}} - \beta \|Au'\|^2_{H_{2,\alpha}} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\beta \to 4\cos^2\alpha$, получаем, что $N_{1,\alpha}(K) \leq \dfrac{1}{2\cos\alpha}$.

Теперь предположим, что существует вектор $y_0 \in H_{3/2}$ такой, что $\operatorname{Re}(A^{-1}Ky_0, y_0)_{3/2} < 0$. В этом случае $\inf_{\|y\|_{3/2}} Q\left(\alpha_K^{-2}\right) = 0$ [3–5]. С другой стороны, из обратимости оператора $E + A^{-1}K$ в $H_{3/2}$ следует, что $Q(0, y) > 0$. Тогда при малых $\beta > 0$ из интервала $(0; 4\cos^2\alpha)$ $Q(0, y) > 0$. А если $N_{1,\alpha}(K) > \dfrac{1}{2\cos\alpha}$, то $N^{-2}_{1,\alpha}(K) \in (0; 4\cos^2\alpha)$. Тогда при $\beta \in (N^{-2}_{1,\alpha}(K); 4\cos^2\alpha)$, по определению нормы $N_{1,\alpha}(K)$, существует вектор-функция $u_\beta(z) \in W^2_{2,\alpha}(K)$ такая, что

$$\|P_0 u_\beta\|^2_{H_{2,\alpha}} - \beta \left\|Au'_\beta\right\|^2_{H_{2,\alpha}} < 0,$$

т. е. $\inf_{\|y\|_{3/2}} Q(\beta, y) < 0$ при $\beta \in (N^{-2}_{1,\alpha}(K); 4\cos^2\alpha)$. Поскольку $\inf_{\|y\|_{3/2}} Q(\alpha_K^{-2}, y) = 0$, получаем, что $N^{-2}_{1,\alpha}(K) \geq \alpha_K^{-2}$, т. е. $N_{1,\alpha}(K) \leq \alpha_K$.

Теорема доказана.

При $K = 0$ получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть выполняются условия* 1, 2 *и* $\|B\| < 2\cos\alpha$. *Тогда задача*

$$-u''(z) + A^2 u(z) + A_1 u'(z) = f(z), \quad z \in S_\alpha,$$

$$u'(0) = 0,$$

регулярно разрешима.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. *Гасымов М. Г., Мирзоев С. С.* О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 4. – С. 651 – 661.
4. *Мирзоев С. С., Велиев С. Г.* О решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в классе голоморфных вектор-функций // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 801 – 813.
5. *Mirzoev S. S., Veliev S. G.* On the estimation of the norms of intermediate derivatives in some abstract space // J. Math. Phys., Anal. and Geom. – 2010. – **6**, № 1. – P. 73 – 83.

Получено 02.10.10