УДК 517.444

О. А. Очаковская (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ШАРОВЫХ СРЕДНИХ

An uniqueness theorem is proved for functions in $\mathbb{R}^n,\ n \geqslant 2,$ with vanishing integrals over balls of fixed radius and a given majorant of growth. The problem of the unimprovability of this theorem is considered.

Доведено теорему єдиності для функцій на $\mathbb{R}^n,\ n \geqslant 2,$ з нульовими інтегралами по кулях фіксованого радіуса та заданою мажорантою зростання. Розглянуто питання про непокращуваність цієї теореми.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Как обычно, символом $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс функций, локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$. Для $r > 0$ преобразование Помпейю P_r (соответствующее шаровым средним) определяется как отображение из $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в $C(\mathbb{R}^n)$, действующее по правилу

$$(P_r f)(x) = \int\limits_{|y|\le r} f(x+y)\,dy, \qquad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Линейное пространство $W(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ называется классом инъективности для преобразования P_r, если из условия $P_r f = 0$ для $f \in W(\mathbb{R}^n)$ следует, что f — нулевая функция.

Проблема изучения классов инъективности для P_r является одной из важнейших в интегральной геометрии и многочисленных приложениях (см. [1–3]). Многие авторы исследовали классы инъективности для P_r в терминах условий на поведение на бесконечности для входящих в них функций. Первый такой результат принадлежит Д. Смиту [4], который установил, что для любого $r > 0$ множество функций $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)\,|x|^{(n-1)/2} = 0 \tag{1}$$

является классом инъективности для P_r. При этом условие (1) нельзя заменить условием $f(x) = O\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$ при $|x| \to \infty$. Известно также, что класс $L^p(\mathbb{R}^n)$ является классом инъективности для P_r тогда и только тогда, когда $1 \leqslant p \leqslant \dfrac{2n}{n-1}$ (см. [5], а также [6], где утверждение сформулировано для сферических средних).

Существенно более общие и точные результаты в этом направлении получены В. В. Волчковым в [1, 7]. Из [7], в частности, следует, что если при некотором $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-1}\right]$ функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{|x|\le r} f(x+y)\,dx = 0 \tag{2}$$

при всех $|y| > r$ и при этом

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{\mu_p(R)} \int\limits_{|x|\leqslant R} |f(x)|^p\,dx = 0, \tag{3}$$

то $f = 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| > r - 1\}$ $\Big($здесь $\mu_p(R) = R^{n-(n-1)p/2}$ при $1 \leqslant p < \dfrac{2n}{n-1}$ и $\mu_p(R) = \ln R$ при $p = \dfrac{2n}{n-1}\Big)$. При этом условие (3) нельзя заменить условием $\displaystyle\int_{|x| \leqslant R} |\, f(x)|^p \, dx = O\big(\mu_p(R)\big)$ при $R \to \infty$. Ряд обобщений этого результата получен в [7] (§ 8), а также в [1], где условие нулевых шаровых средних заменяется уравнением свертки более общего вида.

Некоторые аналоги сформулированных выше результатов на симметрических пространствах получены в [2, 8, 9]. В работах [10, 11] изучались подобные вопросы для функций с нулевыми шаровыми средними, заданных на полупространстве.

Характерной особенностью большинства известных классов инъективности для P_r является их инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$, что позволяет использовать при их изучении аппарат гармонического анализа на компактных группах (см., например, [1]). Первые нетривиальные примеры классов инъективности, не инвариантных относительно вращений, были получены в работе [12]. В частности, в этих классах содержатся функции, у которых по одной из переменных допускается даже экспоненциальный рост, который в некотором смысле компенсируется быстрым убыванием по другим переменным.

Одним из результатов работы [12] является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $r > 0$ имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию* (2) *при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть также существуют возрастающая положительная функция $\kappa \in C^1[0, +\infty)$ и постоянные $c_1,\ c_2 > 0$ такие, что*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\kappa(t)} = +\infty, \tag{4}$$

$$\kappa(t) = o\left(\frac{t}{\ln t}\right), \quad t \to +\infty, \tag{5}$$

$$\kappa(t) = O\left(\kappa\left(\frac{t}{\kappa(t)}\right)\right), \quad t \to +\infty, \tag{6}$$

$$t\kappa'(t) = o\left(\kappa(t)\right), \quad t \to +\infty, \tag{7}$$

$$|f(x)| \leqslant c_1 \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + c_2|x_n|\right) \tag{8}$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f = 0$.

2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой возрастающей функции $\kappa \colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такой, что*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\kappa(t)} < +\infty, \tag{9}$$

существует ненулевая функция f класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая (2) *при всех $y \in \mathbb{R}^n$, для которой*

$$|f(x)| \leqslant \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right) \tag{10}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Условия (4) – (7) выполнены для многих медленно растущих функций κ. Например, нетрудно видеть, что они выполнены для любой положительной функции $\kappa \in C^1[0, +\infty)$, совпадающей при достаточно больших t с функцией

$$\kappa_m(t) = (\ln t)(\ln\ln t)\ldots(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{m})$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $\kappa\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ совпадает при больших t с функцией

$$\kappa_m(t)(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{m+1})^{1+\delta}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N},\ \delta > 0$, то выполнено условие (9).

Из второго условия теоремы 1 следует, что условия (4) и (8) в ее первом утверждении являются неулучшаемыми. В то же время вопрос о необходимости условий (5) – (7) остается открытым. В. В. Волчков предположил, что первое утверждение теоремы 1 останется верным, если выполнены только условия (4) и (8) для некоторой возрастающей положительной функции κ на $[0, +\infty)$. Это предположение остается недоказанным в полном объеме до настоящего времени.

В данной работе показано, что первое утверждение теоремы 1 остается верным, если условия (5) и (7) заменить единственным условием

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\kappa(\lambda_0 t)}{\kappa(t)} = 1 \tag{11}$$

для некоторого фиксированного $\lambda_0 > 1$, при этом вместо гладкости κ на $[0, +\infty)$ требуется только ее возрастание (см. теорему 2 ниже).

Другим вопросом, естественно возникающим в связи с теоремой 1, является следующий: для каких функций φ на $[0, +\infty)$ первое утверждение теоремы 1 сохранится, если условие (8) заменить оценкой

$$|f(x)| \leq c_1 \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + c_2\varphi(|x_n|)\right) \tag{12}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$?

Из теоремы 3 данной работы следует, что первое утверждение теоремы 1 станет неверным, если вместо (8) выполнено (12) с функцией φ, удовлетворяющей условию $\varphi(t) > \varepsilon t^2$ при некотором $\varepsilon > 0$.

2. Формулировки основных результатов. Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть f принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию* (2) *при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть также существуют положительная возрастающая функция κ на $[0, +\infty)$ и постоянные $c_1,\ c_2 > 0$ такие, что выполнено условие* (11) *для некоторого фиксированного $\lambda_0 > 1$ и условие* (8) *при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f = 0$.*

Таким образом, если κ удовлетворяет условиям теоремы 2, то функция f, допускающая оценку (8) при некоторых $c_1,\ c_2 > 0$, зависящих от f, образует класс инъективности для преобразования P_r. Отметим, что условия типа (11) естественно возникают в теории медленно меняющихся функций (см. [13]). Из доказательства теоремы 2 также видно (см. п. 3), что ее утверждения остаются верными, если условия (5) – (7) заменить единственным условием

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\kappa(t)}{\kappa\left(\frac{t}{\kappa(t)}\right)}=1.$$

Далее, пусть ν — наименьший положительный корень уравнения $J_1(\nu)=0$, где J_1 — функция Бесселя первого рода.

Теорема 3. *Для любых* $r,\alpha,\beta>0$ *существует ненулевая функция* $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяющая* (2) *при всех* $y\in\mathbb{R}^2$, *для которой*

$$|f(x)|\le\alpha\exp\left(-\beta x_1^2+\beta x_2^2+\frac{\nu}{r}|x_2|\right)$$

при всех $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

3. Доказательство основных результатов. Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $u\colon[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ — *возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t\to+\infty}u(\alpha t)/u(t)=1$$

при всех $\alpha>0$. *Тогда*

$$u(t)=\exp\left(\int\limits_0^t\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+\psi(t)\right),\quad t\ge0, \tag{13}$$

где $\varphi\in C[0,+\infty)$ *и* ψ — *ограниченная измеримая функция на* $[0,+\infty)$. *При этом* $\varphi(t)\to0$ *при* $t\to\infty$, $\varphi(t)=0$ *в некоторой окрестности точки* $t=0$ *и существует конечный предел* $\lim_{t\to+\infty}\psi(t)$.

Доказательство. Поскольку u возрастает, она является измеримой на $[0,+\infty)$. Используя теорему 1.2 из [13], получаем, что существует число $B>0$ такое, что при всех $t\ge B$

$$u(t)=\exp\left(\int\limits_0^t\frac{\varepsilon(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+\eta(t)\right),$$

где $\varepsilon\in C[B,+\infty)$, $\varepsilon(t)\to0$ при $t\to+\infty$ и η — ограниченная измеримая функция на $[B,+\infty)$, для которой существует конечный предел $\lim_{t\to\infty}\eta(t)$. Продолжим ε на $[0,+\infty)$ по непрерывности, полагая $\varepsilon(t)=0$ в некоторой окрестности точки $t=0$. Полученное продолжение обозначим через φ. Положим теперь

$$\psi(t)=\begin{cases}\eta(t) & \text{при}\quad t\in[B,+\infty),\\ \ln(u(t))-\displaystyle\int_0^t\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta & \text{при}\quad t\in[0,B).\end{cases}$$

Тогда выполнено (13), и лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Из (11) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\kappa(\alpha t)/\kappa(t)=1 \tag{14}$$

при любом $\alpha>0$ (см. [13], лемма 1.15). Следовательно, существует $\beta>0$ такое, что при всех $x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{R}^1$

$$\frac{|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|}{\kappa(|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)}>\beta\frac{\rho}{\kappa(\rho)},$$

где $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}$. Оценка (8) показывает, что при $\gamma=c_2$, всех $q\in\mathbb{N}$ и почти всех $x_n\in\mathbb{R}^1$ неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1,\ldots,x_n)(1+|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)^q\,dx_1\ldots x_{n-1}\le M_q e^{\gamma|x_n|}$$

выполнено с постоянной

$$M_q=\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta t}{\kappa(t)}\right)\frac{(1+nt)^{q+n}}{(1+t)^2}\,dt.$$

Докажем, что имеет место условие

$$\sum_{m=1}^\infty\left(\inf_{q\ge m}M_q^{1/q}\right)^{-1}=+\infty. \tag{15}$$

При любом $q\in\mathbb{N}$ имеем

$$M_q\le n^{q+n}N_{q+n}+c_3^q, \tag{16}$$

где

$$N_q=\int\limits_1^\infty\frac{t^q\exp\left(-\dfrac{\beta t}{\kappa(t)}\right)}{(1+t)^2}\,dt$$

и постоянная $c_3>0$ не зависит от q.

Оценим N_q сверху при достаточно больших q. Положим

$$H_q(t)=q\ln t-\beta\frac{t}{\kappa(t)},\quad t\ge 1. \tag{17}$$

Используя (14) и лемму 1, получаем равенство

$$\kappa(t)=\exp\left(\int\limits_0^t\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+\psi(t)\right),\quad t\ge 0,$$

где φ и ψ удовлетворяют условиям, указанным в лемме 1. Положим

$$g(t)=\exp\left(\int\limits_0^t\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right),\quad h(t)=\exp\psi(t).$$

Тогда $g \in C^1[0,+\infty),\ g > 0$ и

$$tg'(t) = o(g(t)) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{18}$$

Кроме того, существуют положительные постоянные $c_4,\ c_5$ такие, что

$$c_4 < h(t) < c_5 \quad \text{для всех} \quad t \geq 0. \tag{19}$$

Отсюда и из (17) следует оценка

$$H_q(t) \geq \Theta_q(t), \quad t \geq 1,$$

где

$$\Theta_q(t) = q \ln t - \beta_1 \frac{t}{g(t)}, \quad \beta_1 = \beta / c_4. \tag{20}$$

Учитывая (19), из (14) и [13] (п. 1.5) получаем

$$g(t) = o(t^\lambda) \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad \text{и при любом} \quad \lambda > 0.$$

Тогда $\Theta_q(1) < 0$ и $\Theta_q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ (см. (5)). Если $\Theta_q(t) \leq 0$ при всех $t \geq 1,$ то из (20) и определения N_q имеем

$$N_q \leq 1. \tag{21}$$

В противном случае существует точка $t_q \in (1,+\infty)$, в которой функция Θ_q достигает максимума (если таких точек несколько, выбираем одну из них произвольно). Тогда $\Theta_q'(t_q) = 0,$ откуда

$$q = \frac{\beta_1 t_q}{g(t_q)} \left(1 - t_q \frac{g'(t_q)}{g(t_q)} \right).$$

В частности, $t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$ и из (18) следует, что

$$\beta_1 t_q \sim q\kappa(t_q), \quad q \to +\infty. \tag{22}$$

Кроме того, согласно (20)

$$\frac{\Theta_q(t)}{q} \leq \ln t_q - \beta_1 \frac{t_q}{q g(t_q)}, \quad t \geq 1. \tag{23}$$

Учитывая (23), (22), (14) и неравенство (21), которое, вообще говоря, может выполняться при некоторых $q,$ убеждаемся, что существует $c_6 > 0$ такое, что

$$N_q^{1/q} < c_6 q g(q)$$

при всех $q \in \mathbb{N}.$ Теперь из условия (4) и оценки (16) следует (см. [1], гл. 1, следствие 2.1), что числа M_q удовлетворяют (15).

Применяя теперь теорему 1 из [12], получаем $f = 0,$ что и требовалось доказать.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть $t \in \mathbb{R}^1,\ \gamma = \beta/4,\ \varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\gamma/\pi},\ \lambda = \nu/r.$ Рассмотрим функцию

$$f(x) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^1} e^{-itx_1} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + t^2} x_2) e^{-\gamma t^2} \, dt, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

Из (24) следует, что $\Delta f + \lambda^2 f = 0$ в $\mathbb{R}^2$, где Δ – оператор Лапласа. По теореме о среднем для решений уравнения Гельмгольца имеем

$$\int_{|x| \le r} f(x+y) \, dx = 2\pi \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda} f(y) = 0$$

для любого $y \in \mathbb{R}^2$ (см. [1], формула (1.7.9)). Кроме того,

$$f(0) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^1} e^{-\gamma t^2} \, dt > 0.$$

Докажем, что f удовлетворяет требуемой оценке. Используя голоморфность подынтегральной функции в (24) и формулу Коши, перенесем контур интегрирования в (24) на прямую $t - \dfrac{x_1}{2\gamma} i$. В результате получим

$$f(x) = \varepsilon e^{-\beta x_1^2} \int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda^2 + \left(t - \frac{x_1}{2\gamma} i \right)^2} x_2 \right) e^{-\gamma t^2} \, dt. \tag{25}$$

Положим $E_1 = \left\{ t \in \mathbb{R}^1 \colon \left| \sqrt{\lambda^2 + \left(t - \dfrac{x_1}{2\gamma} i \right)^2} + t - \dfrac{x_1}{2\gamma} i \right| \ge \lambda \right\}$, $E_2 = \mathbb{R}^1 \setminus E_1$, где выбирается ветвь $\sqrt{z}$, принимающая положительные значения при положительных z. Из определения E_1 и E_2 имеем

$$\left| \sqrt{\lambda^2 + \left(t - \frac{x_1}{2\gamma} i \right)^2} - \left(t - \frac{x_1}{2\gamma} i \right) \right| \le \lambda \quad \text{при} \quad t \in E_1,$$

$$\left| \sqrt{\lambda^2 + \left(t - \frac{x_1}{2\gamma} i \right)^2} + \left(t - \frac{x_1}{2\gamma} i \right) \right| \le \lambda \quad \text{при} \quad t \in E_2.$$

Используя эти оценки, из (25) получаем

$$f(x) = \varepsilon e^{-\beta x_1^2} \left(\int_{E_1} \operatorname{ch} \left(x_2 \left(t - \frac{x_1}{2\gamma} i + \varphi(t, x_1) \right) \right) e^{-\gamma t^2} \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{E_2} \operatorname{ch} \left(x_2 \left(\frac{x_1}{2\gamma} i - t + \psi(t, x_1) \right) \right) e^{-\gamma t^2} \, dt \right),$$

где $|\varphi(t, x_1)| \le \lambda$ и $|\psi(t, x_2)| \le \lambda$. Тогда

$$|f(x)| \le \varepsilon e^{-\beta x_1^2} e^{\lambda |x_2|} \int_{\mathbb{R}^1} e^{|t x_2|} e^{-\gamma t^2} \, dt < 2\varepsilon e^{-\beta x_1^2} e^{\lambda |x_2|} \int_{\mathbb{R}^1} e^{t |x_2|} e^{-\gamma t^2} \, dt =$$

$$= 2\varepsilon\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}e^{-\beta x_1^2}e^{\beta x_2^2}.$$

Таким образом, функция f удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.

1. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – Springer London Limited, 2009. – 671 p.
3. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’ // Radon Transforms and Tomography, Contemp. Math. – 2001. – **278**. – P. 69 – 74.
4. *Smith I. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1972. – **72**. – P. 403 – 416.
5. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Ill. J. Math. – 1984. – **28**, № 2. – P. 339 – 347.
6. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. – 1994. – **63**.– P. 255 – 286.
7. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 9. – С. 13 – 30.
8. *Shahshahani M., Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric space // Contemp. Math. – 1987. – **63**. – P. 267 – 277.
9. *Волчков В. В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 9. – С. 17 – 38.
10. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве // Докл. РАН. – 2001. – **381**, № 6. – С. 745 – 747.
11. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 493 – 501.
12. *Очаковская О. А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 1. – С. 47 – 66.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Получено 24.09.10