УДК 519.21

Б. В. Бондарев, С. М. Козырь (Донец. нац. ун-т)

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ „ПО ИБРАГИМОВУ". ОЦЕНКА СКОРОСТИ СБЛИЖЕНИЯ СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С СЕМЕЙСТВОМ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. II

In the first part of this work, we obtain estimates for the rate of approach of integrals of a family of "physical" white noises to a family of the Wiener processes. By using this result, we establish an estimate for the rate of approach of a family of solutions of ordinary differential equations, disturbed by some physical white noises, to a family of solutions of the corresponding Ito equations. We consider the case where the coefficient of random disturbance is separated from zero as well as the case where it is not separated from zero.

На підставі отриманих у першій частині роботи оцінок швидкості зближення інтегралів від сім'ї „фізичних" білих шумів з сім'єю вінерівських процесів встановлено оцінку швидкості зближення сім'ї розв'язків звичайних диференційних рівнянь, збурених деякими „фізичними" білими шумами, з сім'єю розв'язків відповідних рівнянь Іто. Розглянуто як випадок відокремленого від нуля коефіцієнта при випадковому збуренні, так і випадок не відокремленого від нуля коефіцієнта.

Настоящая работа является продолжением работы [1], поэтому в ней продолжается нумерация пунктов, утверждений и формул.

4. Первый способ нахождения оценка скорости сближения решения дифференциального уравнения, возмущенного „физическим" белым шумом, с решением соответствующего уравнения Ито. При рассмотрении физических (см., например, [2]) систем часто возникает интерес к изучению свойств случайного процесса X_t^{ε}, $t \geq 0$, являющегося решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{X}^{\varepsilon}(t) = a(t, X^{\varepsilon}(t)) + b(t, X^{\varepsilon}(t))\dot{W}_t^{\varepsilon}, \quad X_0^{\varepsilon} = X_0, \tag{45}$$

где $\dot{W}_t^{\varepsilon}$ — последовательность „физических" белых шумов, т. е. семейство процессов, интеграл от которого

$$W_t^{\varepsilon} = \int_0^t \dot{W}_s^{\varepsilon} ds$$

при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к некоторому винеровскому процессу W_t на промежутке $0 \leq t \leq T$. При некоторых ограничениях на функции $a(t,x)$, $b(t,x)$ и их производные имеет место (см. [2, 3]) также слабая сходимость при $\varepsilon \to 0$ процесса $X^{\varepsilon}(t)$, $0 \leq t \leq T$, к решению стохастического дифференциального уравнения Ито

$$Y(t) = X_0 + \int_0^t \left[a(s,Y(s)) + \frac{\sigma^2}{2} b_x(s,Y(s)) b(s,Y(s)) \right] ds + \int_0^t \sigma b(s,Y(s))\, dW_s \,.$$

Возник вопрос об оценке скорости сближения в некоторой функциональной метрике решений „предельной” и „допредельной” динамических систем. Несмотря на кажущуюся реальной возможность оценить такую скорость в метрике Леви – Прохорова, практическое воплощение такой идеи весьма затруднительно. Поэтому был выбран метод построения случайных процессов на одном вероятностном пространстве, т. е. метод А. В. Скорохода. Теперь нашей целью является оценка скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения (45) и решения соответствующего уравнения Ито, а именно, построение оценок вида

$$\mathrm{M} \sup_{0 \le t \le T} \left| X^\varepsilon(t) - Y^\varepsilon(t) \right|^{2m} \le \delta_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad m \ge 2\,,$$

где

$$Y^\varepsilon(t) = X_0 + \int_0^t \left[a(s,Y^\varepsilon(s)) + \frac{\sigma^2}{2} b_x(s,Y^\varepsilon(s)) b(s,Y^\varepsilon(s)) \right] ds \; + $$

$$+ \int_0^t \sigma b(s,Y^\varepsilon(s)) d\tilde{W}_\varepsilon(s)\,. \tag{46}$$

Здесь $\tilde{W}_\varepsilon(s)$ — семейство винеровских процессов, соответствующим образом построенных по процессу $\dot{W}_t^\varepsilon$. Для некоторых видов $\dot{W}_t^\varepsilon$ эта задача решалась в работах [4 – 8], причем в работах [4, 7, 8] использован так называемый метод замены, обращающий коэффициент при случайном возмущении в единицу, в работах [5, 6] применялся метод, основанный на представлении интеграла от „физического” белого шума $\dot{W}_t^\varepsilon$ в виде мартингального семейства и асимптотически пренебрежимого процесса. В данной статье в качестве стационарного „физического” белого шума $\dot{W}_t^\varepsilon$ используется процесс

$$\dot{W}_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) - Mf\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) - \bar{f} \right],$$

где $f(x)$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая ограниченная $(|f(x)| \le K < +\infty)$ периодическая с периодом 1 функция, случайный процесс $\xi(t)$ — решение уравнения (3) из [1] (в условиях теоремы 2), $\bar{f}$ подсчитывается по формуле (8) из [1]. Изложим первый способ (см., например, [4, 7]) оценки скорости сближения решений в метрике

$$\rho(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) = \left\{ \mathrm{M} \sup_{0 \le t \le T} \left| X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon \right|^{2m} \right\}^{1/2m},$$

где m — некоторое фиксированное целое число.

Предположим, что коэффициент $b(t,x) \geq -\chi > 0$, причем $b(t,x)$, $b'_x(t,x)$ непрерывны, тогда (см. [9, с. 34]) всегда возможна замена, в результате которой получим уравнение с единичным коэффициентом при „шуме”. Другими словами, положив $Z_t^{\varepsilon} = f(t, X_t^{\varepsilon})$, где

$$f(t,x) = \int_0^x \frac{dy}{b(t,y)},$$

получим уравнение

$$Z_t^{\varepsilon} = X_0 + \int_0^t \bar{a}(s, Z_s^{\varepsilon})\,ds + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) - \mathrm{M} f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right] ds, \tag{47}$$

где

$$\bar{a}(t,x) = f'_t\big(t, g(t,x)\big) + f'_x\big(t, g(t,x)\big) a\big(t, g(t,x)\big),$$

функция $g(t,x)$ обратная по x к функции $f(t,x)$, т. е. функция, для которой $f(t, g(t,x)) = x, g(t, f(t,x)) = x$. В силу того, что в дальнейшем нам понадобятся конкретные постоянные в полученных оценках скорости сближения решений, мы не будем отсылать читателя к источникам (см., например, [4]), где этот вопрос рассматривался, а тезисно изложим доказательство применительно к нашему случаю.

Теорема 3. *Пусть*:

1) $a = a(t,x)$ — *непрерывная по совокупности переменных ограниченная вместе со своей частной производной* $a'_x(t,x)$ *функция*;

2) $b = b(t,x)$ — *непрерывная по совокупности переменных и ограниченная вместе со своими частными производными* $b'_t(t,x)$, $b'_x(t,x)$, $b''_{tx}(t,x)$, $b''_{xx}(t,x)$ *функция* (*будем считать, что функции* $a(t,x)$, $b(t,x)$ *и их частные производные ограничены по модулю постоянной* $L > 0$);

3) *функция* $b(t,x)$ *отделена от нуля, т. е. выполнено* $b(t,x) \geq \chi > 0$;

4) *выполнены условия теоремы* 1 *и теоремы* 2 *из* [1].

Тогда справедлива оценка

$$\mathrm{M} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X_t^{\varepsilon} - Y_t^{\varepsilon} \right|^{2m} \leq \max(\delta_{\varepsilon}^{2m}, \sqrt{\gamma_{\varepsilon}}) D_0(m,T) L^{2m} \exp\left\{ 2mTL^2 \frac{1+2L}{\chi^2} \right\},$$

где δ_{ε}, γ_{ε} *определены в теореме* 2, *а* $D_0(m,T)$ *приведена в следствии* 2 *работы* [1].

Доказательство. Нетрудно заметить, что в условиях теоремы 3 функция $\bar{a}(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица равномерно по $t \geq 0$. Действительно,

$$\bar{a}'_x(t,x) = \left[f''_{tx}\big(t, g(t,x)\big) + f''_{xx}\big(t, g(t,x)\big) a\big(t, g(t,x)\big) + \right.$$
$$\left. + f'_x\big(t, g(t,x)\big) a'_x\big(t, g(t,x)\big) \right] g'_x(t,x) =$$
$$= b\big(t, g(t,x)\big)\left[-\frac{b'_t\big(t, g(t,x)\big)}{b^2\big(t, g(t,x)\big)} - \frac{b'_x\big(t, g(t,x)\big)}{b^2\big(t, g(t,x)\big)} a\big(t, g(t,x)\big) + \frac{a'_x\big(t, g(t,x)\big)}{b\big(t, g(t,x)\big)} \right] \tag{48}$$

(мы воспользовались тем, что производная по x от функции $g(t,x)$, обратной по x к $f(t,x)$, равна $b(t,g(t,x))$). Из (48) имеем оценку

$$\left|\bar{a}'_x(t,x)\right| = L^2\,\frac{1+2L}{\chi^2}.$$

Наряду с (47) рассмотрим уравнение

$$\zeta_t^\varepsilon = X_0 + \int_0^t \bar{a}(s,\zeta_s^\varepsilon)\,ds + \sigma\tilde{W}_\varepsilon(t), \tag{49}$$

где $\tilde{W}_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, — семейство винеровских процессов, построенное в теореме 2 из [1]. Используя условие Липшица, из (47) и (49) получаем оценку

$$\sup_{0\le\tau\le t}\left|Z_\tau^\varepsilon - \zeta_\tau^\varepsilon\right| \le$$

$$\le \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) - \mathrm{M}f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right]ds - \sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|\exp\left\{L^2\,\frac{1+2L}{\chi^2}\right\}. \tag{50}$$

В силу следствия 2 к теореме 2 из [1] имеем

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) - \mathrm{M}f\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right]ds - \sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{2m} \le$$

$$\le \max(\delta_\varepsilon^{2m}, \sqrt{\gamma_\varepsilon})D_0(m,T).$$

Тогда из (50) с учетом последней оценки получаем оценку

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|Z_t^\varepsilon - \zeta_t^\varepsilon\right|^{2m} \le \max(\delta_\varepsilon^{2m}, \sqrt{\gamma_\varepsilon})D_0(m,T)\exp\left\{2mTL^2\,\frac{1+2L}{\chi^2}\right\}. \tag{51}$$

Нетрудно показать (см., например, [4]), что случайный процесс $Y_t^\varepsilon = g(t,\zeta_t^\varepsilon)$, $t \ge 0$, является решением уравнения (46). Действительно, используя формулу Ито и то, что

$$g''_{xx}(t,x) = b(t,g(t,x))b'_x(t,g(t,x)),\ f(t,g(t,x)) = x,$$

$$f'_t(t,g(t,x)) + f'_x(t,g(t,x))g'_t(t,x) = 0, \qquad g'_t(t,x) = -\frac{f'_t(t,g(t,x))}{f'_x(t,g(t,x))},$$

находим

$$dY_t^\varepsilon = dg(t,\zeta_t^\varepsilon) = g'_t(t,\zeta_t^\varepsilon)\,dt + g'_x(t,\zeta_t^\varepsilon)\bar{a}(t,\zeta_t^\varepsilon)\,dt + \frac{\sigma^2}{2}\,g''_{xx}(t,\zeta_t^\varepsilon)\,dt +$$

$$+ g'_x(t,\zeta_t^\varepsilon)\sigma\,d\tilde{W}_t^\varepsilon = b(t,g(t,\zeta_t^\varepsilon))\sigma\,d\tilde{W}_t^\varepsilon -$$

$$-\frac{f_t'(t,g(t,\zeta_t^\varepsilon))}{f_x'(t,g(t,\zeta_t^\varepsilon))}dt + b(t,g(t,\zeta_t^\varepsilon))\overline{a}(t,\zeta_t^\varepsilon)dt + \frac{\sigma^2}{2}b(t,g(t,\zeta_t^\varepsilon))b_x'(t,g(t,\zeta_t^\varepsilon)) =$$

$$= a(t,Y_t^\varepsilon)dt + \frac{\sigma^2}{2}b(t,Y_t^\varepsilon)b_x'(t,Y_t^\varepsilon)\,dt + b(t,Y_t^\varepsilon)\sigma\,d\tilde{W}_t^\varepsilon\,,$$

так как

$$-\frac{f_t'(t,g(t,x))}{f_x'(t,g(t,x))}dt + b(t,g(t,x))\overline{a}(t,x) =$$

$$= b(t,g(t,x))\big[-f_t'(t,g(t,x)) + f_t'(t,g(t,x)) + f_x'(t,g(t,x))a(t,g(t,x))\big] = a(t,g(t,x))\,.$$

Аналогично показывается, что

$$dX_t^\varepsilon = dg(t,Z_t^\varepsilon) = g_t'(t,Z_t^\varepsilon)\,dt + g_x'(t,Z_t^\varepsilon)\overline{a}(t,Z_t^\varepsilon)\,dt + g_x'(t,Z_t^\varepsilon)\sigma\dot{W}_t^\varepsilon\,dt =$$

$$= b(t,g(t,Z_t^\varepsilon))\sigma\dot{W}_t^\varepsilon dt - \frac{f_t'(t,g(t,Z_t^\varepsilon))}{f_x'(t,g(t,Z_t^\varepsilon))}dt + b(t,g(t,Z_t^\varepsilon))\overline{a}(t,Z_t^\varepsilon)\,dt =$$

$$= a(t,X_t^\varepsilon)\,dt + b(t,X_t^\varepsilon)\sigma\dot{W}_t^\varepsilon\,dt = a(t,X_t^\varepsilon)dt + b(t,X_t^\varepsilon)\sigma\,dW_t^\varepsilon\,.$$

Поскольку

$$\left|g_x'(t,x)\right| = \left|b(t,g(t,x))\right| \le L\,,$$

из (51) следует

$$\mathrm{M}\sup_{0\le\tau\le T}\left|X_\tau^\varepsilon - Y_\tau^\varepsilon\right|^{2m} \le \mathrm{M}\sup_{0\le\tau\le T}\left|g(t,Z_\tau^\varepsilon) - g(t,\zeta_\tau^\varepsilon)\right|^{2m} \le$$

$$\le L^{2m}\,\mathrm{M}\sup_{0\le\tau\le T}\left|Z_\tau^\varepsilon - \zeta_\tau^\varepsilon\right|^{2m} \le L^{2m}\max(\delta_\varepsilon^{2m},\sqrt{\gamma_\varepsilon})D_0(m,T)\exp\left\{2mTL^2\,\frac{1+2L}{\chi^2}\right\}.$$

Теорема 3 доказана.

5. Второй способ нахождения оценки скорости сближения решения дифференциального уравнения, возмущенного „физическим" белым шумом, с решением соответствующего уравнения Ито. Рассмотрим совокупность случайных процессов $\{X_t^\varepsilon,\ \varepsilon>0,\ 0\le t\le T\}$ — решений дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_t^\varepsilon = a(t,X_t^\varepsilon) + b(t,X_t^\varepsilon)\dot{W}_t^\varepsilon\,, \qquad X_0^\varepsilon = X_0\,, \tag{52}$$

где совокупность случайных процессов — „физических" белых шумов $\dot{W}_t^\varepsilon$ — представима в виде

$$\dot{W}_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \overline{f}\right] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \mathrm{M}f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right]$$

(случайный процесс $\xi(t)$ — решение уравнения (3) из [1] в условиях теоремы 2), и семейство процессов

$$Y_t^{\varepsilon} = X_0 + \int_0^t \left[a(s, Y_s^{\varepsilon}) + \frac{\sigma^2}{2} b'_x(s, Y_s^{\varepsilon}) b(s, Y_s^{\varepsilon}) \right] ds + \sigma \int_0^t b(s, Y_s^{\varepsilon})\, d\tilde{W}_{\varepsilon}(s), \quad (53)$$

где $\tilde{W}_{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, — винеровский процесс, построенный в теореме 2 из [1].

Изложим еще один способ оценки скорости сближения решений (52) и (53) в метрике

$$\rho(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}) = \left\{ \mathrm{M} \sup_{0 \le t \le T} \left| X_t^{\varepsilon} - Y_t^{\varepsilon} \right|^{2m} \right\}^{1/2m},$$

при котором не требуется ограничения $b(t,x) \ge \chi > 0$, но требуется дополнительная гладкость коэффициента $\beta(x)$ уравнения (1) из [1], а именно, потребуем существования производной $\beta''(x)$, которая будет непрерывна и ограничена $\left(|\beta''(x)| \le K < +\infty \right)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*:

1) $a = a(t,x)$ — *непрерывная по совокупности переменных ограниченная вместе со своей частной производной* $a'_x(t,x)$ *функция*;

2) $b = b(t,x)$ — *непрерывная по совокупности переменных и ограниченная вместе со своими частными производными* $b'_t(t,x)$, $b'_x(t,x)$, $b''_{tx}(t,x)$, $b''_{xx}(t,x)$ *функция*;

3) *функции* $a(t,x)$, $b(t,x)$ *и их частные производные ограничены постоянной* $L > 0$;

4) *выполнены условия теоремы* 2 *из* [1].

Тогда справедлива оценка

$$\mathrm{M} \sup_{0 \le t \le T} \left| X_t^{\varepsilon} - Y_t^{\varepsilon} \right|^{2m} \le \max\left(\left(\delta_{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\, \frac{6cK}{\gamma} \right)^{2m}, \sqrt{\gamma_{\varepsilon}}, \varepsilon^m \right) \times$$

$$\times \left[3^{2m-1} D(m,T,K,L) + D_1(m,T,K) D_2(m,T,K,L) \right] \exp\left\{ T D_3(m,T,K) \right\},$$

где δ_{ε}, γ_{ε} *определены в теореме* 2,

$$D(m,T,K,L) = 3^{2m-1} \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{LKc}{\gamma} \right)^{2m} \left[2 + T + LT + \frac{16 C^4 K^2 L}{\lambda^2} \left(1 + T + TL + LKT \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{Kc}{\gamma} \left(2T + TL + 2LK \right) \right]^{2m} + \left(16 \left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} \frac{m(2m-1) 16 c^2 T C^4 L^4 K^5}{\gamma^2 \lambda^2} \right)^m +$$

$$\left. + \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} m(2m-1) T\, \frac{(64)^2 C^{12} K^7 L^4}{\lambda^6} \right)^m \right\},$$

$$D_1(m,T,K) =$$

$$= 1+4^m T^m \left(\frac{4m}{4m-1}\right)^m \left[\left(2m(2m-1)\right)^m + \sqrt{(4m-1)!!}\right]\frac{16^m C^{4m} K^{3m}}{\lambda^{2m}},$$

$$D_2(m,T,K,L) = 3^{2m-1}\left(\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m} m[2m-1]L^2 4m\right)^m,$$

$$D_3(m,T,K,L) = 3^{2m-1}L^{2m}\left(1+\frac{16C^4K^3}{\lambda^2}\right)^{2m} T^{2m-1} +$$

$$+ 3^{2m-1} K^m L^{2m} \frac{16^m C^{4m} K^{2m}}{\lambda^{2m}}\left(\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m} m[2m-1]\right)^m T^{m-1}\Bigg].$$

Доказательство. Пусть $U(x)$ — решение задачи (11) из [1], тогда, дифференцируя по формуле Ито [9] функцию $U(\xi(t))$, получаем

$$dU(\xi(t)) = [f(\xi(t))-\bar{f}]\,dt + \beta(\xi(t))\psi(\xi(t))\,dW(t). \tag{54}$$

Из (54) следует представление

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)-\bar{f}\right]dt =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}dU\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)-\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t), \tag{55}$$

где $W_\varepsilon(t)=\sqrt{\varepsilon}W(t/\varepsilon)$.

Дифференцируя по формуле Ито процесс $U^2(\xi(t))$, находим

$$dU^2(\xi(t)) = 2[f(\xi(t))-\bar{f}]U(\xi(t))\,dt +$$

$$+\beta^2(\xi(t))\psi^2(\xi(t))\,dt + 2U(\xi(t))\beta(\xi(t))\psi(\xi(t))\,dW(t),$$

откуда следует представление

$$\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)-\bar{f}\right]U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dt = \frac{\varepsilon}{2}dU^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dt-$$

$$-\sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t). \tag{56}$$

Обозначим

$$\sigma^2 = \int_0^1 \beta^2(x)\psi^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_0^1 \beta^2(x)\psi^2(x)\rho(x)\,dx \le KD_\psi^2,$$

где $D_\psi = \dfrac{4C^2}{\lambda}K$ определено в (17) работы [1].

Из (52), используя представления (55) и (56), получаем

$$dX_t^\varepsilon = a(t,X_t^\varepsilon)dt - b(t,X_t^\varepsilon)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t) +$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}b'_x(t,X_t^\varepsilon)b(t,X_t^\varepsilon)dt + dR_\varepsilon(t), \tag{57}$$

где

$$dR_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}d\left[b(t,X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] - \sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b'_t(t,X_t^\varepsilon)\,dt -$$

$$-\sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b'_x(t,X_t^\varepsilon)a(t,X_t^\varepsilon)\,dt -$$

$$-b'_x(t,X_t^\varepsilon)b(t,X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \overline{f}\right] =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}d\left[b(t,X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] - \sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b'_t(t,X_t^\varepsilon)dt -$$

$$-\sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b'_x(t,X_t^\varepsilon)a(t,X_t^\varepsilon)dt +$$

$$+\frac{1}{2}b'_x(t,X_t^\varepsilon)b(t,X_t^\varepsilon)\left[\beta^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \sigma^2\right]dt +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}b'_x(t,X_t^\varepsilon)b(t,X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}b'_x(t,X_t^\varepsilon)b(t,X_t^\varepsilon)dU^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}d\left[b(t,X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] - \sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b'_t(t,X_t^\varepsilon)dt -$$

$$-\sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b'_x(t,X_t^\varepsilon)a(t,X_t^\varepsilon)dt -$$

$$-\sqrt{\varepsilon}b'_x(t,X_t^\varepsilon)b(t,X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t) -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} d\left[b'_x(t, X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon) U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] + \frac{\varepsilon}{2} U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_t(X_t^\varepsilon)dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_x(X_t^\varepsilon)a(t, X_t^\varepsilon)dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_x(X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \overline{f}\,\right]dt +$$

$$+ \frac{1}{2} b'_x(t, X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon)\left[\beta^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \sigma^2\right]dt\,. \tag{58}$$

Пусть $U_1(x)$ — решение задачи

$$\frac{1}{2}\beta^2(x)\frac{d^2U_1}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dU_1}{dx} = \beta^2(x)\psi^2(x) - \sigma^2\,,$$

$$U_1(x+1) = U_1(x), \qquad \frac{dU_1}{dx}(x+1) = \frac{dU_1}{dx}(x)\,. \tag{59}$$

Поскольку $\beta^2(x)\psi^2(x) \le D_\psi^2 K$ и существуют непрерывные производные $\beta''(x)$, $\psi''(x)$, аналогично тому, как обосновывалось представление (9) работы [1], убеждаемся в том, что имеет место представление

$$U_1(x) = -\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{M}\left[\beta^2(\xi_x(t))\psi^2(\xi_x(t)) - \sigma^2\right]dt\,.$$

Нетрудно заметить, что функция $U_1(x)$ 1-периодическая. Аналогично (14) убеждаемся в справедливости оценки

$$|U_1(x)| \le \frac{D_\psi^2 K c}{\gamma} < +\infty\,.$$

Обозначим $\psi_1(x) = \dfrac{dU_1(x)}{dx}$, тогда аналогично (15) рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\beta^2(x)\frac{d\psi_1}{dx} + \alpha(x)\psi_1 = \beta^2(x)\psi^2(x) - \sigma^2\,,$$

$$\psi_1(x+1) = \psi_1(x)\,,$$

решением которой будет 1-периодическая функция

$$\psi_1(x) = -2\vartheta^{-1}(x)\int\limits_x^1 \frac{\vartheta(z)}{\beta^2(z)}\left[\beta^2(z)\psi^2(z) - \sigma^2\right]dz\,. \tag{60}$$

Используя 1-периодичность функции $\psi_1(x)$ и представление (60), аналогично (17) убеждаемся в справедливости оценки

$$\left|\psi_1(x)\right| \le \frac{4C^2 D_\psi^2 K}{\lambda}.$$

Используя формулу Ито и равенство (59), получаем

$$dU_1(\xi(t)) = \left[\beta^2(\xi(t))\psi^2(\xi(t)) - \sigma^2\right]dt + \psi_1(\xi(t))\beta(\xi(t))\,dW(t),$$

откуда следует представление

$$\left[\beta^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \sigma^2\right]dt =$$

$$= \varepsilon dU_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \sqrt{\varepsilon}\psi_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t). \tag{61}$$

С учетом (61) имеем

$$\frac{1}{2}b_x'(t, X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)\left[\beta^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \sigma^2\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}b_x'(t, X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)\varepsilon\, dU_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}b_x'(t, X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}\psi_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t) =$$

$$= -\frac{1}{2}b_x'(t, X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}\psi_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}d\left[b_x'(t, X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b_x'(t,x)b(t,x)]_t'(x = X_t^\varepsilon)\,dt -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b_x'(t,x)b(t,x)]_x' a(t,x)(x = X_t^\varepsilon)\,dt -$$

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b_x'(t,x)b(t,x)]_x'(x = X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f}\right]dt. \tag{62}$$

Из (58) с учетом (62) находим

$$dR_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}d\left[b(t, X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] - \sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b_t'(t, X_t^\varepsilon)dt -$$

$$-\sqrt{\varepsilon}U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)b_x'(t, X_t^\varepsilon)a(t, X_t^\varepsilon)\,dt +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}b_x'(t, X_t^\varepsilon)b(t, X_t^\varepsilon)U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(t) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} d\left[b'_x(t, X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon) U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_t(x = X_t^\varepsilon) dt +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_x(X_t^\varepsilon) a(t, X_t^\varepsilon) dt +$$

$$+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} U^2\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_x(x = X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon)\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f}\right] dt +$$

$$+\frac{1}{2} b'_x(t, X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}\psi_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(t) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} d\left[b'_x(t, X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon) U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_t(x = X_t^\varepsilon)\, dt -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_x a(t,x)(x = X_t^\varepsilon)\, dt -$$

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} U_1\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)[b'_x(t,x)b(t,x)]'_x(x = X_t^\varepsilon) b(t, X_t^\varepsilon)\left[f\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f}\right] dt . \qquad (63)$$

Из (63) следует оценка

$$|R_\varepsilon(t)| \le \sqrt{\varepsilon}\left[L\frac{Kc}{\gamma}(2 + T + LT) + L^2\left(\frac{Kc}{\gamma}\right)^2 (1 + T + TL + 2LKT) + \right.$$

$$\left. + \frac{Kc}{\gamma}\frac{16C^4K^2}{\lambda^2} L^2 (1 + T + TL + 2TLK)\right] +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^t b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon) U\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s)\right| +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^t b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon)\psi_1\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s)\right| . \qquad (64)$$

В силу того, что справедливы оценки [10, с. 174]

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon) U\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s)\right|^{2m} \le$$

$$\leq \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} m(2m-1) \right)^m \times$$

$$\times \mathrm{M} \left[\int_0^T \left(b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon) U\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \right)^2 ds \right]^m \leq$$

$$\leq \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} \frac{m(2m-1)c^2 T L^4 K^3 D_\psi^2}{\gamma^2} \right)^m,$$

$$\mathrm{M} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon) \psi_1\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dW_\varepsilon(s) \right|^{2m} \leq$$

$$\leq \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} m(2m-1) \right)^m \times$$

$$\times \mathrm{M} \left[\int_0^T \left(b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon) \psi_1\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \right)^2 ds \right]^m \leq$$

$$\leq \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} m(2m-1) T \frac{16 C^4 D_\psi^4 K^3 L^4}{\lambda^2} \right)^m,$$

из (64) получаем оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |R_\varepsilon(t)|^{2m} \leq \varepsilon^m D(m, T, K, L),$$

где

$$D(m,T,K,L) = 3^{2m-1} \left\{ \left[L \frac{Kc}{\gamma} (2 + T + LT) + L^2 \left(\frac{Kc}{\gamma} \right)^2 (1 + T + TL + 2LKT) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{Kc}{\gamma} \frac{16 C^4 K^2}{\lambda^2} L^2 (1 + T + TL + 2TLK) \right]^{2m} +$$

$$+ \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} \frac{m(2m-1)c^2 T L^4 K^3 D_\psi^2}{\gamma^2} \right)^m +$$

$$\left. + \left(\left[\frac{2m}{2m-1} \right]^{2m} m(2m-1) T \frac{16 C^4 D_\psi^4 K^3 L^4}{\lambda^2} \right)^m \right\}.$$

Вычитая из (53) равенство (57), имеем

$$Y_t^\varepsilon - X_t^\varepsilon = \int_0^t \left[a(s, Y_s^\varepsilon) - a(s, X_s^\varepsilon) + \frac{\sigma^2}{2}\left(b'_x(s, Y_s^\varepsilon) b(s, Y_s^\varepsilon) - b'_x(s, X_s^\varepsilon) b(s, X_s^\varepsilon)\right)\right] ds +$$

$$-\sigma \int_0^t \left[b(s, Y_s^\varepsilon) d\tilde{W}_\varepsilon(s) + b(s, X_s^\varepsilon)\beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s)\right] + R_\varepsilon(t),$$

откуда

$$\left| X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon \right| \le \int_0^t \left| X_s^\varepsilon - Y_s^\varepsilon \right| \left(L + L^2 \sigma^2 \right) ds +$$

$$+ \left| \int_0^t \left[b(s, X_s^\varepsilon) - b(s, Y_s^\varepsilon) \right] \beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s) \right| +$$

$$+ \sup_{0 \le t \le T} |R_\varepsilon(t)| + \left| \int_0^t b(s, Y_s^\varepsilon) \left[\beta\left(\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(\tau) + \sigma d\tilde{W}_\varepsilon(t) \right] \right|.$$

Заметим, что имеет место представление

$$\varsigma_\varepsilon(t) = \int_0^t b(s, Y_s^\varepsilon) \left[\beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s) + \sigma d\tilde{W}_\varepsilon(s) \right] = \int_0^t b(s, Y_s^\varepsilon) d\nu_\varepsilon(s),$$

где

$$\nu_\varepsilon(t) = \int_0^t \beta\left(\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(\tau) + \sigma \tilde{W}_\varepsilon(t)$$

— квадратично интегрируемый мартингал с характеристикой $\langle \nu_\varepsilon, \nu_\varepsilon \rangle_t$.

Тогда

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \left| X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon \right| \le L \int_0^t \sup_{0 \le \tau \le s} \left| X_\tau^\varepsilon - Y_\tau^\varepsilon \right| (1 + K D_\psi^2 L)\, ds +$$

$$+ \sup_{0 \le \tau \le t} \left| \int_0^t \left[b(s, X_s^\varepsilon) - b(s, Y_s^\varepsilon) \right] \beta\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right) dW_\varepsilon(s) \right| +$$

$$+ \sup_{0 \le t \le T} |R_\varepsilon(t)| + \sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t b(s, Y_s^\varepsilon)\, d\nu_\varepsilon(s) \right|. \tag{65}$$

Характеристика квадратично интегрируемого мартингала $\varsigma_\varepsilon(t)$ очевидно (см. [10, с. 148], теорема 5) будет иметь вид

$$\langle \varsigma_\varepsilon, \varsigma_\varepsilon \rangle_t = \int_0^t b^2(s, Y_s^\varepsilon) d\langle \nu_\varepsilon, \nu_\varepsilon \rangle_s \le L^2 \langle \nu_\varepsilon, \nu_\varepsilon \rangle_T, \quad 0 \le t \le T. \tag{66}$$

Отсюда, используя оценку для моментов супремума стохастического интеграла

Ито [10, с. 174], с учетом (66) получаем оценку

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b(s,Y_s^{\varepsilon})\,d\nu_{\varepsilon}(s)\right|^{2m}\le$$

$$\le\left(\frac{2m(2m-1)}{2}\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}\right)^m \mathrm{M}\left[\int_0^T b^2(s,Y_s^{\varepsilon})d\langle\nu_{\varepsilon},\nu_{\varepsilon}\rangle_s\right]^m=$$

$$\le\left(\frac{2m(2m-1)}{2}e^2\right)^m \mathrm{M}\left[\int_0^T b^2(s,Y_s^{\varepsilon})\,d\langle\nu_{\varepsilon},\nu_{\varepsilon}\rangle_s\right]^m\le$$

$$\le\left(\frac{2m(2m-1)}{2}\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}\right)^m L^{2m}\,\mathrm{M}\left[\langle\nu_{\varepsilon},\nu_{\varepsilon}\rangle_T\right]^m\le$$

$$\le\left(\frac{2m(2m-1)}{2}\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}\right)^m L^{2m}(4m)^m\,\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}|\nu_{\varepsilon}(t)|^{2m}. \qquad (67)$$

Здесь использована оценка $\mathrm{M}[\langle\nu_{\varepsilon},\nu_{\varepsilon}\rangle_T]^m\le(4m)^m\,\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}|\nu_{\varepsilon}(t)|^{2m}$ (см. [11, с. 118]).

Из (65) с учетом (66) и (67) получаем

$$\mathrm{M}\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{\varepsilon}-Y_s^{\varepsilon}\right|^{2m}\le 3^{2m-1}\Bigg\{\Bigg[L^{2m}(1+KLD_{\psi}^2)^{2m}T^{2m-1}+$$

$$+K^mL^{2m}D_{\psi}^{2m}\left(\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}m[2m-1]\right)^m T^{m-1}\Bigg]\times$$

$$\times\int_0^t \mathrm{M}\sup_{0\le\tau\le s}\left|X_{\tau}^{\varepsilon}-Y_{\tau}^{\varepsilon}\right|^{2m}ds+\varepsilon^m D(m,T,K,L)+$$

$$+\left(\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}m[2m-1]L^2\right)^m\mathrm{M}\left[\langle\nu_{\varepsilon},\nu_{\varepsilon}\rangle_T\right]^m\Bigg\}\le$$

$$\le 3^{2m-1}\Bigg\{\Bigg[L^{2m}(1+KLD_{\psi}^2)^{2m}T^{2m-1}+$$

$$+K^mL^{2m}D_{\psi}^{2m}\left(\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}m[2m-1]\right)^m T^{m-1}\Bigg]\times$$

$$\times\int_0^t \mathrm{M}\sup_{0\le\tau\le s}\left|X_{\tau}^{\varepsilon}-Y_{\tau}^{\varepsilon}\right|^{2m}ds+\varepsilon^m 3^{2m-1}D(m,T,K,L)+$$

$$+\chi_\varepsilon^{2m}3^{2m-1}\left(\left[\frac{2m}{2m-1}\right]^{2m}m[2m-1]L^2 4m\right)^m\Bigg\}, \tag{68}$$

где

$$\chi_\varepsilon^{2m} = \mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left[\int_0^t \beta\left(\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)\psi\left(\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)dW_\varepsilon(\tau)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(s)\right]^{2m}.$$

Воспользовавшись оценкой из следствия 3 работы [1], запишем неравенство (68) в виде

$$\mathrm{M}\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^\varepsilon - Y_s^\varepsilon\right|^{2m} \le D_3(m,T,K)\int_0^t \sup_{0\le\tau\le s}\left|X_\tau^\varepsilon - Y_\tau^\varepsilon\right|^{2m}ds +$$

$$+\max\left(\left(\delta_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{4cK}{\gamma}\right)^{2m},\sqrt{\gamma_\varepsilon},\varepsilon^m\right)\times$$

$$\times\left[3^{2m-1}D(m,T,K,L)+D_1(m,T,K)D_2(m,T,K,L)\right]. \tag{69}$$

Из неравенства (69) и леммы Гронуолла следует утверждение теоремы 4.

6. Выводы. На практике уравнения Ито, как правило, появляются в результате предельного перехода в системах, подверженных воздействию „физического" белого шума, зависящего от параметра. Удалось заметить, что 1-периодическая дважды непрерывно дифференцируемая ограниченная функция от решения диффузионного уравнения с 1-периодическими коэффициентами, имеющими производные, которые удовлетворяют условию Гельдера, с отделенным от нуля коэффициентом диффузии, будет процессом, удовлетворяющим условию равномерного сильного перемешивания с экспоненциально быстрой скоростью перемешивания, что значительно пополняет класс известных процессов, перемешивающихся по „Ибрагимову"! Использовав эти факты, удалось установить оценку скорости сходимости в соответствующем принципе инвариантности, что позволило построить оценку скорости сближения решений предельной и допредельной систем в „сильной" метрике, причем коэффициент при случайном возмущении не обязательно должен быть отделенным от нуля! Эти оценки могут быть полезны при решении многих практически важных задач, например при изучении свойств оценок неизвестных параметров, входящих в коэффициенты допредельного уравнения, при нахождении ε-достаточных управлений допредельной системой и других.

1. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Перемешивание „по Ибрагимову". Оценка скорости сближения семейства интегральных функционалов от решения дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами с семейством винеровских процессов. Некоторые приложения. I // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 733 – 753.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. –1989. – **45**. – С. 159 – 251.
3. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.

4. *Bondarev Boris V., Zoobko Maxim L.* The application of the invariance principle for stationary sequences with mixing // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2001. – № 1. – С. 49 – 59.
5. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и решения соответствующего уравнения Ито. I // Тм же. – 2006. – № 2. – С. 63 – 91.
6. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и решения соответствующего уравнения Ито. II // Там же. – 2007. – № 1. – С. 68 – 97.
7. *Бондарев Б. В., Ковтун Е. Е.* Оценка скорости сближения в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 435 – 457.
8. *Бондарев Б. В., Ковтун Е. Е.* Принцип инвариантности для стационарных процессов. Оценка скорости сходимости // Вісн. Донец. ун-ту. Природничі науки. – 2004. – № 1. – С. 31 – 55.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
11. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Получено 24.10.08,
после доработки — 21.12.10