УДК 517.946

А. Б. Бержанов, Е. К. Курмангалиев (Актюб. ун-т, Казахстан)

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ*

We obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution multiperiodic in a part of variables for a countable system of first-order quasilinear partial differential equations.

Отримано достатні умови існування та єдиності багатоперіодичного за частиною змінних розв'язку однієї системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

1. Изучение счетных систем дифференциальных уравнений представляет весьма определенный интерес. Как показано, например, в [1], к решению различных задач, в которых рассматриваются колебания систем с распределенными параметрами, удобно применять аппарат счетных систем дифференциальных уравнений. Систематические исследования в данном направлении изложены во многих работах (см., например, [2–4]). Отметим также монографию [5], посвященую исследованию инвариантных тороидальных многообразий счетных систем дифференциальных уравнений. В работах [6, 7] получены необходимые и достаточные условия существования и единственности многопериодических решений и достаточные условия существования и единственности почти многопериодических решений нелинейных систем в частных производных со счетным множеством переменных.

В настоящей работе изучается вопрос о существовании и единственности многопериодического по части переменных решения счетной системы квазилинейных уравнений в частных производных вида

$$D_\varepsilon^x x \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi} + b(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\psi}\right)x =$$

$$= P(t,\varphi,\psi)x + \mu Q(t,\varphi,\psi,x,\mu), \tag{1}$$

где $x,\ Q$ — счетномерные векторы-столбцы; $x = x(t,\varphi,\psi)$ — искомая вектор-функция; $\varphi,\ a,\ \psi,\ b$ — счетномерные векторы; $P(t,\varphi,\psi) = \{p_{ij}(t,\varphi,\psi)\},\ i,\ j = \overline{1,\infty}$, — бесконечная матрица; векторы $a\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varphi},\ b\cdot\dfrac{\partial}{\partial\psi}$ означают формальные скалярные произведения соответственно счетномерных векторов a, b и символических векторов $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi_1}, \dfrac{\partial}{\partial\varphi_2}, \ldots\right),\ \dfrac{\partial}{\partial\psi} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\psi_1}, \dfrac{\partial}{\partial\psi_2}, \ldots\right)$, координаты которых также являются счетномерными векторами; $\varepsilon > 0,\ \mu > 0$ — малые параметры.

Пусть $t \in R = (-\infty, +\infty);\ \varphi,\ \psi \in R^\infty = \big\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)\colon |\xi_k| < \infty,\ k = 1, 2, \ldots\big\}$, при этом норма $\|\xi\| = \sup\limits_k\{|\xi_k|\};\ x \in R_\Delta$, где R_Δ — множество

*Выполнена при финансовой поддержке Фонда науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (N1-1-1, 2-12(60)).

ограниченных последовательностей с числом Δ, т. е. $R_\Delta = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots)$: $\|x\| \ \leq \Delta, \big\} \subset R^\infty$, $\varepsilon \in E_{\varepsilon_0} = [0, \varepsilon_0]$, $\mu \in M_{\mu_0} = [0, \mu_0]$, Δ, ε_0, μ_0 — некоторые положительные постоянные.

Вектор-функцию $f(t, \varphi, \psi) \in R_\Delta$, определенную и непрерывную в области $\Omega = R \times R^\infty \times R^\infty$, назовем *многопериодической по части переменных*, если она $\big((\theta, \omega) \in R \times R^\infty\big)$-периодична по t, φ равномерно относительно $\psi \in R^\infty$, т. е. найдутся положительные числа θ, ω_k, $k = \overline{1, \infty}$, такие, что равенство

$$f\left(t + \theta, \varphi + \overset{\wedge}{q\omega}, \psi\right) - f(t, \varphi, \psi) = 0,$$

имеет место для любых точек $(t, \varphi, \psi) \in \Omega$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, $\overset{\wedge}{q\omega} = (q_1\omega_1, q_2\omega_2, \ldots)$, $q = (q_1, q_2, \ldots)$ — целочисленный вектор.

Поставим задачу: выяснить достаточные условия существования и единственности многопериодического по части переменных решения системы (1).

Пусть счетномерная вектор-функция $f(t, \varphi, \psi)$ в области Ω удовлетворяет следующим условиям, соответствующим условиям из [6]:

а) непрерывна по переменным t, φ, ψ;

б) ограничена по норме, т. е.

$$\big\|f(t, \varphi, \psi)\big\| = \sup_k\{|f_k(t, \varphi, \psi)|\} \leq \alpha,$$

где $\alpha > 0$ — некоторая постоянная, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

в) удовлетворяет усиленному условию Липшица по φ, ψ:

$$\Big\|f(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi'_{m+1}, \ldots; \psi_1, \ldots, \psi_m, \psi'_{m+1}, \ldots) -$$
$$- f(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi''_{m+1}, \ldots; \psi_1, \ldots, \psi_m, \psi''_{m+1}, \ldots)\Big\| \leq$$
$$\leq l_m(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Delta_m\varphi = \sup\Big[|\varphi'_{m+1} - \varphi''_{m+1}|, |\varphi'_{m+2} - \varphi''_{m+2}|, \ldots\Big]$; $\Delta_m\psi = \sup\Big[|\psi'_{m+1} - \psi''_{m+1}|, |\psi'_{m+2} - \psi''_{m+2}|, \ldots\Big]$; $\{l_m\}$ — положительная числовая последовательность, монотонно сходящаяся к нулю, т. е. $l_m \searrow 0$ при $m \to \infty$;

введя проекторы W_m и V_m, которые счетномерному вектору $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ставят в соответствие векторы $W_m\xi = (\xi_1, \ldots \xi_m, 0, 0, \ldots)$ и $V_m\xi = (0, \ldots, 0, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots)$, условие в) запишем в виде

$$\Big\|f(t, W_m\varphi + V_m\varphi', W_m\psi + V_m\psi') - f(t, W_m\varphi + V_m\varphi'', W_m\psi + V_m\psi'')\Big\| \leq$$
$$\leq l_m(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Delta_m\varphi = \big\|V_m(\varphi' - \varphi'')\big\|$, $\Delta_m\psi = \big\|V_m(\psi' - \psi'')\big\|$;

г) имеет ограниченные и непрерывные частные производные первого порядка по всем координатам векторов φ и ψ, причем дифференцирование функции проводится в покоординатном смысле;

д) имеют место неравенства

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} f(t,\varphi',\psi') - \frac{\partial}{\partial \varphi} f(t,\varphi'',\psi'') \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi_k} f(t,\varphi',\psi') - \frac{\partial}{\partial \varphi_k} f(t,\varphi'',\psi'') \right\| \leq$$

$$\leq c^0 \Big(\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\| \Big),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} f(t,\varphi',\psi') - \frac{\partial}{\partial \psi} f(t,\varphi'',\psi'') \right\| = \sum_{r=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi_r} f(t,\varphi',\psi') - \frac{\partial}{\partial \psi_r} f(t,\varphi'',\psi'') \right\| \leq$$

$$\leq c^0 \Big(\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\| \Big),$$

где $c^0 > 0$ — некоторая постоянная.

Отметим, что условие вида д) встречается в работе [2].

Совокупность условий а) – д) назовем условиями (π), а вектор-функции, удовлетворяющие этим условиям, — π-*функциями*, и кратко обозначим их так: $f(t,\varphi,\psi) \in \in \pi(\alpha, l_m, c^0)$.

В качестве примера многопериодической по части переменных π-функции рассмотрим следующую скалярную функцию:

$$f(t,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\psi_1,\psi_2,\ldots) = \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \sin \sqrt{\frac{k}{k+1}}\, \varphi_k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \operatorname{arctg} \psi_j.$$

Непосредственной проверкой можно легко убедиться, что $f(t,\varphi,\psi) \in \pi\Big(3 + + \pi, \dfrac{1}{2^{m-1}}, 2\Big)$.

Предположим, что в уравнении (1)

$$a(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon) = a^0(t) + \varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon),$$

$$b(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon) = b^0(t) + \varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon),$$

и будем считать, что относительно его коэффициентов выполнены следующие условия (обозначим их через (N_∞)):

1) вектор-функции $a^0(t)$, $b^0(t)$ непрерывны, ограничены и θ-периодичны в R;

2) вектор-функции a_1, b_1, Q непрерывны и ограничены соответственно в областях $\Omega \times R_\Delta \times E_{\varepsilon_0}$, $\Omega \times R_\Delta \times E_{\varepsilon_0}$, $\Omega \times R_\Delta \times M_{\mu_0}$, многопериодичны по t, φ с вектором-периодом $(\theta,\omega) \in R \times R^\infty$ равномерно относительно $\psi \in R^\infty$, $x \in R_\Delta$, $\varepsilon \in E_{\varepsilon_0}$, $\mu \in M\mu_0$, удовлетворяют условиям по φ, ψ, x равномерно относительно ε, μ;

3) матрица $P(t,\varphi,\psi) = \big\{p_{ij}(t,\varepsilon,\psi)\big\}$, $i,j = \overline{1,\infty}$, непрерывна и ограничена по норме в области Ω, т. е. ряды $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t,\varphi,\psi)$ сходятся абсолютно в Ω, причем

$$\big\|P(t,\varphi,\psi)\big\| = \sup_i \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(t,\varphi,\psi)| \right\} \leq \overline{P_0},$$

где $\overline{P_0} > 0$ — некоторая постоянная, (θ, ω)-периодична по t, φ равномерно относительно $\psi \in R^\infty$, удовлетворяет усиленному условию Липшица по φ, ψ:

$$\Big\|P(t, W_m\varphi + V_m\varphi', W_m\psi + V_m\psi') - P(t, W_m\varphi + V_m\varphi'', W_m\psi + V_m\psi'')\Big\| \leq$$

$$\leq P_m(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $P_m > 0$, $P_m \searrow 0$ при $m \to \infty$, $\Delta_m\varphi = \|V_m(\varphi' - \varphi'')\|$, $\Delta_m\psi = \|V_m(\psi' - \psi'')\|$, имеет ограниченные и непрерывные частные производные в поэлементном списке по координатам векторов φ, ψ, и матричные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial P}{\partial \varphi_k}, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial P}{\partial \psi_r},$$

сходятся абсолютно и равномерно в Ω, причем

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi_k}\right\| \leq P_1', \qquad \left\|\frac{\partial P}{\partial \psi}\right\| = \sum_{r=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial P}{\partial \psi_r}\right\| \leq P_1'',$$

где P_1', P_1'' — некоторые положительные постоянные, кроме того, частные производные по φ, ψ удовлетворяют неравенствам вида

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \varphi} P(t, \varphi', \psi') - \frac{\partial}{\partial \varphi} P(t, \varphi'', \psi'')\right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial}{\partial \varphi_k} P(t, \varphi', \psi') - \frac{\partial}{\partial \varphi_k} P(t, \varphi'', \psi'')\right\| \leq$$

$$\leq P_2'\Big(\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\|\Big),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} P(t, \varphi', \psi') - \frac{\partial}{\partial \psi} P(t, \varphi'', \psi'')\right\| = \sum_{r=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial}{\partial \psi_r} P(t, \varphi', \psi') - \frac{\partial}{\partial \psi_r} P(t, \varphi'', \psi'')\right\| \leq$$

$$\leq P_2''\Big(\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\|\Big),$$

где P_2', $P_2'' > 0$ — некоторые постоянные.

Запишем соотношения, исходящие из условий (N_∞), которые необходимы для получения требуемых оценок:

$$\big\|a^0(t)\big\| \leq a_0, \qquad \big\|b^0(t)\big\| \leq b_0,$$

$$a_1(t, \varphi, \psi, x, \varepsilon) \in \pi(a_{10}, \alpha_m, \overline{a^0}), \qquad b_1(t, \varphi, \psi, x, \varepsilon) \in \pi(b_{10}, \beta_m, \overline{b^0}),$$

$$Q(t, \varphi, \psi, x, \mu) \in \pi(Q_0, q_m, \overline{q^0}), \qquad P(t, \varphi, \psi) \in \pi(\overline{P}_0, P_m, P_2' + P_2''),$$

равномерно относительно ε, μ.

При $\varepsilon = 0$ из системы (1) получаем систему

$$D_0x^0 = P(t, \varphi, \psi)x^0 + \mu Q(t, \varphi, \psi, x^0, \mu), \tag{2}$$

которой назовем *условно вырожденной*.

2. Обозначим через $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$ класс (совокупность) счетномерных многопериодических по части переменных π-функций $f(t, \varphi, \psi)$, удовлетворяющих

$\pi(\Delta, \delta_m, \overline{c})$-условиям, где $\delta_m \searrow 0$ при $m \to +\infty$, норма которых определяется соотношением

$$\|f\|_B = \sup_{\Omega} \|f\| + \sup_{\Omega} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\| + \sup_{\Omega} \left\| \frac{\partial f}{\partial \psi} \right\|,$$

$$\Omega = R \times R^{\infty} \times R^{\infty}.$$

Следуя идеям работ [6, 8], для некоторой функции $f(t, \varphi, \psi) \in B_{\infty}(\Delta, \delta_m, \overline{c})$ строим характеристическую функцию $\Gamma_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon) = \big\{\lambda_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon)\big\}$ линеаризованного дифференциального оператора D_{ε}^{f}, компоненты которой допускают следующие интегральные представления:

$$\lambda_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon) = \varphi + \int\limits_t^s \Big\{a^0(\sigma) + \varepsilon a_1\big[\sigma, \lambda_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon),$$

$$f(\sigma, \lambda_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon)), \varepsilon\big]\Big\} d\sigma,$$

$$\xi_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon) = \psi + \int\limits_t^s \Big\{b^0(\sigma) + \varepsilon b_1\big[\sigma, \lambda_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon),$$

$$f(\sigma, \lambda_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(\sigma, t, \varphi, \psi, \varepsilon)), \varepsilon\big]\Big\} d\sigma.$$

Несложно убедиться в правильности следующего утверждения.

Лемма 1. *Для вектор-функций λ и ξ при выполнении условий (N_{∞}) справедливы соотношения*:

1а) $\Big\|\lambda(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi', W_m\psi + V_m\psi', \varepsilon) - \lambda(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi'', W_m\psi + V_m\psi'', \varepsilon)\Big\| + \Big\|\xi(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi', W_m\psi + V_m\psi', \varepsilon) - \xi(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi'', W_m\psi + V_m\psi'', \varepsilon)\Big\| \le$ $\le \left(1 + \frac{l_m}{l_0}\Big[e^{2\varepsilon l_0|t-s|} - 1\Big]\right)(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi)$, *где* $\Delta_m\varphi = \|V_m(\varphi' - \varphi'')\|$, $\Delta_m\psi =$ $= \|V_m(\psi' - \psi'')\|$, $l_m = \alpha_m + \beta_m + (\alpha_0 + \beta_0)\delta_m$, $l_0 = (\alpha_0 + \beta_0)(1 + \delta_0)$;

1б) $\lambda(s + \theta, t + \theta, \varphi + q\hat{\omega}, \psi) = \lambda(s, t, \varphi, \psi) + q\hat{\omega}, \xi(s + \theta, t + \theta, \varphi + q\hat{\omega}, \psi) =$ $= \xi(s, t, \varphi, \psi)$;

1в) $\|\lambda_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon) - \lambda_g(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon)\| + \|\xi_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon) - \xi_g(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon)\| \le$ $\le \frac{\|f - g\|_B}{1 + \delta_0}\left(e^{\varepsilon l_0|t-s|} - 1\right) \quad \forall f,\ g \in B_{\infty}(\Delta, \delta_m, \overline{c})$;

1г) $\left\|\frac{\partial \lambda_f}{\partial \nu} - \frac{\partial \lambda_g}{\partial \nu}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_f}{\partial \nu} - \frac{\partial \xi_g}{\partial \nu}\right\| \le \frac{\overline{d}\|f - g\|_B}{3l_0}\big(e^{3\varepsilon l_0|t-s|} - 1\big)e^{\varepsilon l_0|t-s|} \ \ \forall f,\ g \in$ $\in B_{\infty}(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, *где ν означает вектор φ или ψ*, $\overline{d} = 2\Big(\big(\overline{a^0} + \overline{b^0}\big)(1 + \delta_0) + \alpha_0 + \beta_0\Big)$;

1д) $\left\|\frac{\partial \lambda_f'}{\partial \nu} - \frac{\partial \lambda_f''}{\partial \nu}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_f'}{\partial \nu} - \frac{\partial \xi_f''}{\partial \nu}\right\| \le \frac{d}{4l_0}\left(e^{4\varepsilon l_0|t-s|} - 1\right)e^{\varepsilon l_0|t-s|}\big(\|\varphi' - \varphi''\| +$ $+ \|\psi' - \psi''\|\big)$, *где ν означает вектор φ или ψ*, $d = 2\big(\overline{a^0} + \overline{b^0}\big)(1 + \delta_0)^2 + 2\overline{c}(\alpha_0 +$ $\beta_0)$, $\lambda_f' = \lambda_f(s, t, \varphi', \psi', \varepsilon)$, $\lambda_f'' = \lambda_f(s, t, \varphi'', \psi'', \varepsilon)$, $\xi_f' = \xi_f(s, t, \varphi', \psi', \varepsilon)$, $\xi_f'' =$ $= \xi_f(s, t, \varphi'', \psi'', \varepsilon)$.

3. Пусть $X_f(t_0, t, \varphi, \psi)$ — матрица типа Грина для линеаризованной системы

$$D_\varepsilon^f x = P(t, \varphi, \psi)x, \tag{3}$$

где $f \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, удовлетворяющая условию некритичности [6]:

$$\begin{gathered} \big\|X_f(t_0, t, \varphi, \psi)\big\| \leq B \exp\big\{-\gamma|t - t_0|\big\}, \\ X_f(t - 0, t, \varphi, \psi) - X_f(t + 0, t, \varphi, \psi) = E, \end{gathered} \tag{4}$$

с постоянными $B \geq 1$, $\gamma > 0$, где E — бесконечная единичная матрица.

Систему (3) назовем *некритической относительно класса* $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, если условие (4) выполняется для любой функции $f \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$.

О свойствах матрицы X_f говорится в следующем утверждении.

Лемма 2. *Если система* (3) *некритическая относительно класса* $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$ *и выполнены условия* (N_∞), *то при* $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon} = \dfrac{\gamma}{8 l_0 B}$ *для матрицы типа Грина имеют место соотношения*:

2а) $\left\|\dfrac{\partial X_f}{\partial \varphi}\right\| + \left\|\dfrac{\partial X_f}{\partial \psi}\right\| \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\|\dfrac{\partial X_f}{\partial \varphi_k}\right\| + \sum\limits_{r=1}^{\infty}\left\|\dfrac{\partial X_f}{\partial \psi_r}\right\| \leq B^* e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t_0|}$, *где* $B^* = LB(P_1' + P_1'')$, $L = 2L\gamma^{-1}$;

2б) $\big\|X_f(t_0, t, W_m\varphi + V_m\overline{\varphi}, W_m\psi + V_m\overline{\psi}) - X_f(t_0, t, W_m\varphi + V_m\varphi, W_m\psi + V_m\psi)\big\| \leq L[BK_m + 2\varepsilon B^* l_m] e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t_0|}\,(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi)$, *где* $l_m = \alpha_m + \beta_m + (\alpha_0 + \beta_0)\delta_m$, $l_0 = (\alpha_0 + \beta_0)(1 + \delta_0)$, $K_m = P_m + l_m \dfrac{P_0}{2l_0}$;

2в) $X_f(t_0 + \theta, t + \theta, \varphi + q\hat{\omega}, \psi) = X_f(t_0, t, \varphi, \psi)$;

2г) $\big\|X_f(t_0, t, \varphi, \psi) - X_g(t_0, t, \varphi, \psi)\big\| \leq LB^*\varepsilon(\alpha_0 + \beta_0)\|f - g\|_B e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t_0|}$ $\forall f, g \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$;

2д) $\left\|\dfrac{\partial X_f}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial X_g}{\partial \varphi}\right\| + \left\|\dfrac{\partial X_f}{\partial \psi} - \dfrac{\partial X_g}{\partial \psi}\right\| \leq 2L\overline{\overline{L}}\|f - g\|_B e^{-\frac{\gamma}{4}|t-t_0|}$ $\forall f, g \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, *где* $\overline{\overline{L}} = 2L\varepsilon(\alpha_0 + \beta_0)(P_1' + P_1'')(1 + l_0 L) + B(P_2' + P_2'') + B^*\Big(\big(\overline{a^0} + \overline{b^0}\big)(2 + \delta_0) + \alpha_0 + \beta_0\Big)$;

2е) $\left\|\dfrac{\partial}{\partial \varphi} X_f(t_0, t, \varphi', \psi') - \dfrac{\partial}{\partial \varphi} X_f(t_0, t, \varphi'', \psi'')\right\| + \left\|\dfrac{\partial}{\partial \psi} X_f(t_0, t, \varphi', \psi') - \dfrac{\partial}{\partial \psi} X_f(t_0, t, \varphi'', \psi'')\right\| \leq 2L\overline{L} e^{-\frac{\gamma}{4}|t-t_0|}(\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\|)$, *где* $\overline{L} = 2L(BK_0 + 2\varepsilon B^* l_0)(P_1' + P_1'')(1 + l_0 L) + B(P_2' + P_2'') + B^*\overline{d}$.

4. Рассмотрим оператор T, отображающий каждую вектор-функцию $f(t, \varphi, \psi) \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c}\,)$ в вектор-функцию

$$\begin{gathered} F_f(t, \varphi, \psi) \equiv T(f) = \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X_f(s, t, \varphi, \psi) Q\Big[s, \lambda_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \\ f(s, \lambda_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon), \xi_f(s, t, \varphi, \psi, \varepsilon)), \mu\Big] ds. \end{gathered} \tag{5}$$

Из свойств матрицы X_f и вектор-функций f, Q следует, что $F_f(t, \varphi, \psi)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема в Ω. В (5) возможно D_ε^f-дифференцирование под знаком интеграла. Действуя дифференциальным оператором D_ε^f на соотношение (5), получаем равенство

$$D_\varepsilon^f F_f(t,\varphi,\psi) = P(t,\varphi,\psi)F_f(t,\varphi,\psi) + \mu Q\big[t,\varphi,\psi,F_f(t,\varphi,\psi),\mu\big].$$

На основании оценок 1а) – 1д), 2а) – 2е), в силу условий (N_∞), (4) аналогично [6] устанавливаем следующие оценки:

3а) $\big\|F_f(t,\varphi,\psi)\big\| \leq \mu L Q_0$;

3б) $\big\|F_f(t,W_m\varphi+V_m\overline{\varphi},W_m\psi+V_m\overline{\psi}) - F_f(t,W_m\varphi+V_m\varphi,W_m\psi+V_m\psi)\big\| \leq$ $\leq \mu\Gamma_m\left(\Delta_m\varphi+\Delta_m\psi\right)$, где $\Gamma_m = L\left\{2\left(\dfrac{q_0}{\alpha_0+\beta_0}l_m + q_m + q_0\delta_m\right) + \right.$ $\left. +LQ_0\left[2K_m + (P_1'+P_1'')\dfrac{l_m}{l_0}\right]\right\}$;

3в) $F_f(t+\theta,\varphi+\overset{\wedge}{q\omega},\psi) = F_f(t,\varphi,\psi)$;

3г) $\left\|\dfrac{\partial}{\partial\nu}F_f(t,\varphi',\psi') - \dfrac{\partial}{\partial\nu}F_f(t,\varphi'',\psi'')\right\| \leq \mu\overline{\overline{C}}\big(\|\varphi'-\varphi''\|+\|\psi'-\psi''\|\big)$, где ν означает вектор φ или ψ, $\overline{\overline{C}} = \dfrac{8}{\gamma}\left\{2L\overline{L}Q_0 + q_0(1+\delta_0)\left(B^* + 2L\left(BK_0 + \dfrac{\gamma}{4}(P_1' + \right.\right.\right.$ $\left.\left.\left. + P_1'')\right)\right) + B\left(\overline{q^0}(1+\delta_0)^2 + q_0\overline{c} + \dfrac{q_0\overline{d}}{3(\alpha_0+\beta_0)}\right)\right\}$;

3д) $\big\|F_f(t,\varphi,\psi) - F_g(t,\varphi,\psi)\big\| \leq \mu N^*\|f-g\|_B$ $\forall f,g\in B_\infty(\Delta,\delta_m,\overline{c})$, где $N^* = L\left(2q_0 + LQ_0\dfrac{P_1'+P_1''}{2(1+\delta_0)}\right)$;

3е) $\left\|\dfrac{\partial}{\partial\nu}F_f(t,\varphi,\psi) - \dfrac{\partial}{\partial\nu}F_g(t,\varphi,\psi)\right\| \leq \mu\overline{N^*}\|f-g\|_B$ $\forall f,g\in B_\infty(\Delta,\delta_m,\overline{c})$, где ν означает вектор φ или ψ, $\overline{N^*} = \dfrac{1}{\gamma}\left\{16L\overline{\overline{L}}Q_0 + 8q_0B^* + L^2q_0\gamma(P_1'+P_1'') + \right.$ $\left. + 8B\left(\overline{q^0}(1+\delta_0) + q_0 + \dfrac{q_0\overline{d}}{3(\alpha_0+\beta_0)}\right)\right\}$.

5. Положим $\mu_1 = \dfrac{\Delta}{LQ_0}$, $\mu_2(m) = \dfrac{\delta_m}{\Gamma_m}$, $m=0,1,2,\ldots$, $\mu_3 = \overline{c}/\overline{\overline{C}}$, $\mu_4 = \dfrac{1}{2N^*}$, $\mu_5 = \dfrac{1}{2\overline{N^*}}$.

Выберем теперь значение параметра так, чтобы

$$0<\mu<\overline{\mu}(m) = \min\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\}, \quad m=0,1,2,\ldots.$$

При этих значениях параметра μ из оценок 3а) – 3е) следуют сотношения:

4а) $\big\|F_f(t,\varphi,\psi)\big\| \leq \Delta$;

4б) $\big\|F_f(t,W_m\varphi+V_m\overline{\varphi},W_m\psi+V_m\overline{\psi}) - F_f(t,W_m\varphi+V_m\varphi,W_m\psi+V_m\psi)\big\| \leq$ $\leq \delta_m(\Delta_m\varphi+\Delta_m\psi)$;

4в) $F_f(t+\theta,\varphi+\overset{\wedge}{q\omega},\psi) = F_f(t,\varphi,\psi)$;

4г) $\left\|\dfrac{\partial}{\partial\nu}F_f(t,\varphi',\psi') - \dfrac{\partial}{\partial\nu}F_f(t,\varphi'',\psi'')\right\| \leq \mu\overline{c}\big(\|\varphi'-\varphi''\|+\|\psi'-\psi''\|\big)$, где ν означает вектор φ или ψ;

4д) $\big\|F_f(t,\varphi,\psi) - F_g(t,\varphi,\psi)\big\| \leq \dfrac{1}{2}\|f-g\|_B$;

4е) $\left\| \dfrac{\partial}{\partial\varphi} F_f(t,\varphi,\psi) - \dfrac{\partial}{\partial\varphi} F_g(t,\varphi,\psi) \right\| \leq \dfrac{1}{2}\|f-g\|_B$, $\left\| \dfrac{\partial}{\partial\psi} F_f(t,\varphi,\psi) - \dfrac{\partial}{\partial\psi} F_g(t, \varphi,\psi) \right\| \leq \dfrac{1}{2}\|f-g\|_B$.

Кроме того, при этих значениях μ

$$F_f(t,\varphi,\psi) \in C^{(1,1,1)}_{t,\varphi,\psi}\left(R \times R^\infty \times R^\infty\right) \subset C^{(0,1,1)}_{t,\varphi,\psi}\left(R \times R^\infty \times R^\infty\right)$$

и

$$\left\| \frac{\partial F_f}{\partial\varphi} \right\| + \left\| \frac{\partial F_f}{\partial\psi} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial F_f}{\partial\varphi_k} \right\| + \sum_{r=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial F_f}{\partial\psi} \right\| \leq \delta_0,$$

причем эти ряды сходятся абсолютно и равномерно на множестве Ω.

Отсюда видно, что оператор T при значениях параметров $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$, $0 < \mu < \overline{\mu}(m)$ отображает класс $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$ в себя, т. е. $F_f(t,\varphi,\psi) \equiv T(f) \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, и является сжимающим оператором с коэффициентом сжатия $\dfrac{1}{2}$.

Выберем любую функцию $f_0 \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$ и построим последовательность функций

$$f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, \tag{6}$$

определяемых рекуррентным соотношением $f_k = T(f_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из изложенного выше следует, что $f_k \in B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$. Теперь покажем, что последовательность функций (6) равномерно сходится и ее предел является функцией этого же класса.

Для этого рассмотрим ряд

$$f_0 + (f_1 - f_0) + \ldots + (f_{k+1} - f_k) + \ldots . \tag{7}$$

Заметим, что $\|f_0\| \leq \Delta$, $\|f_1 - f_0\| \leq \|f_1\| + \|f_0\| \leq 2\Delta$. Далее, на основе оценки 4д) для каждого $k \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \frac{\Delta}{2^{k-1}}.$$

Следовательно, ряд (7) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\Delta + 2\Delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^{k-1}}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что последовательность (6) равномерно сходится к некоторой предельной функции $f^* = f^*(t,\varphi,\psi)$. В силу равномерной сходимости ее предел f^* имеет те свойства, что и f_k, кроме дифференцируемости.

Осталось показать дифференцируемость f^* по координатам векторов φ, ψ.

Рассмотрим последовательность

$$\frac{\partial f_0}{\partial\varphi_j}, \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_j}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial\varphi_j}, \ldots, \tag{9}$$

получаемую из (6) дифференцированием по φ_j итерационной формулы $f_k = T(f_{k-1})$, где φ_j — j-я координата вектора φ. Теперь, как и выше, составим ряд

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varphi_j} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial f_0}{\partial \varphi_j}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial f_{k+1}}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial f_k}{\partial \varphi_j}\right) + \ldots . \tag{10}$$

На основе оценки 4е) аналогично предыдущему заметим, что этот ряд мажорируется тем же числовым рядом (8). Следовательно, ряд (10) сходится равномерно и абсолютно. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности (9).

Пусть $\Phi(t, \varphi, \psi)$ — равномерный предел этой последовательности. Тогда, в силу известной теоремы о почленном дифференцировании ряда, получаем

$$\Phi(t, \varphi, \psi) = \frac{\partial f^*(t, \varphi, \psi)}{\partial \varphi_j}.$$

Тем самым доказана дифференцируемость f^* по координатам вектора φ. Дифференцируемость по координатам вектора ψ доказывается аналогично.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Каччиополи – Банаха [8] о принципе сжатых отображений.

Следовательно, в силу этой теоремы в классе $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$ существует единственная неподвижная точка $f^* = f^*(t, \varphi, \psi, \varepsilon, \mu)$ оператора T, т. е.

$$T(f^*) = f^*,$$

которая является решением системы (1).

Сформулируем основной результат этой статьи.

Теорема. *Если система* (3) *некритическая относительно класса* $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, *то при условиях* (N_∞) *существуют числа* $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\mu}$ *такие, что при всех значениях параметров* $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$, $0 < \mu < \overline{\mu}(m)$ *система* (1) *допускает единственное многопериодическое по части переменных решение из класса* $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, *обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в многопериодическое по части переменных решение условно вырожденной системы* (2), *а при* $\mu = 0$ — *в тривиальное решение* $x \equiv 0$.

1. *Митропольский Ю. А.* Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 3. – С. 334 – 337.
2. *Персидский К. П.* Избранные труды. – Алма-Ата: Наука, 1976. – Т. 2.
3. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата, 1974.
4. *Халилов З. И.* Докл. АН СССР. – 1952. – **84**. – С. 229 – 232.
5. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1993.
6. *Умбетжанов Д. У.* Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979. – 211 с.
7. *Умбетжанов Д. У., Сартабанов Ж. А.* // Вопросы математики и прикл. математики. – Алма-Ата, 1977. – С. 102 – 108.
8. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

Получено 10.01.08