УДК 512.5

К. К. Масутова, Б. А. Омиров (Ин-т математики при Нац. ун-те Узбекистана, Ташкент)

НЕКОТОРЫЕ НУЛЬ-ФИЛИФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ

We present the description of algebras with the maximum nilpotency index given by certain special identities.

Наведено опис алгебр, що задаються деякими спеціальними тотожностями і мають максимальний індекс нільпотентності.

1. Введение. При изучении нильпотентных алгебр естественно возникает задача: описать алгебры, имеющие максимальный нильиндекс. Однако, в силу большого разнообразия классов алгебр, в каждом случае приходится отдельно описывать алгебры максимального нильиндекса данного класса. Поэтому в данной статье предпринята попытка описать алгебры максимального нильиндекса, удовлетворяющие обобщенным тождествам специальных видов.

Введем некоторые тождества и дадим определения алгебр, удовлетворяющих данным тождествам.

Определение 1.1. *Алгебра L над полем F называется обобщенной алгеброй Лейбница (ОАЛ), если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется тождество*

$$a(bc) = A_1(ab)c + A_2(ac)b, \tag{1}$$

где A_1, A_2 — произвольные скаляры поля.

Определение 1.2. *Алгебра L над полем F называется обобщенной алгеброй Зинбиеля (ОАЗ), если для любых элементов $x,\ y,\ z \in L$ выполняется тождество*

$$(ab)c = A_1 a(bc) + A_2 a(cb), \tag{2}$$

где $A_1,\ A_2$ — произвольные скаляры поля.

В данной работе мы описываем ОАЛ и ОАЗ максимального нильиндекса. Отметим, что алгебры Лейбница являются примерами ОАЛ при $A_1 = 1,\ A_2 = -1$. Исследованиям алгебр Лейбница посвящены многочисленные работы (см., например, [1, 4, 5, 7, 9]). В частности, классификация нуль-филиформных алгебр Лейбница, полученная в работе [1], является частным случаем теоремы 2.1 (случай $A_1 + A_2 = 0$).

В монографии [8] с категорной точки зрения рассмотрена связь категории алгебр Лейбница с другими категориями алгебр. В работе [8] также были рассмотрены алгебры Зинбиеля (кошулево дуальные к алгебрам Лейбница). Изучению структуры конечномерных алгебр Зинбиеля посвящены работы [2, 3, 6]. Отметим, в свою очередь, что алгебры Зинбиеля являются примерами ОАЗ при $A_1 = A_2 = 1$. Классификация нуль-филиформных алгебр Зинбиеля, полученная в статье [3], также является частным случаем теорем 3.1 и 3.2 (случай $A_1 = A_2$).

Если рассмотреть ОАЛ при $A_1 = 1,\ A_2 = 0$ (случай $A_1 + A_2 = 1$) или ОАЗ при $A_1 = 1,\ A_2 = 0$ (случай $A_1 + A_2 = 1$), то получим ассоциативные алгебры. Отметим, что нуль-филиформные ассоциативные алгебры произвольной размерности, как алгебры максимального индекса нильпотентности, ранее не выделялись. Поэтому результаты, полученные в данной работе, восполняют данный пробел.

Таким образом, полученные классификации нуль-филиформных ОАЛ и ОАЗ обобщают известные результаты для алгебр Лейбница, алгебр Зинбиеля и ассоциативных алгебр. Кроме того, в связи с развитием современной абстрактной алгебры появляются новые многообразия алгебр, и полученные классификации могут быть использованы для изучения алгебр, которые будут частными случаями ОАЛ и ОАЗ.

Для произвольной алгебры A рассмотрим ряд

$$A^1 = A, \quad A^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} A^i A^{k+1-i}, \qquad k \geq 1. \tag{3}$$

Определение 1.3. *n-Мерная алгебра A называется нуль-филиформной, если* $\dim A^i = (n+1) - i, \quad 1 \leq i \leq n+1$.

Нетрудно видеть, что алгебра имеет максимальный нильиндекс тогда и только тогда, когда она является нуль-филиформной. Кроме того, для нильпотентной алгебры условие нуль-филиформности равносильно однопорожденности алгебры.

В дальнейшем мы будем рассматривать алгебры над полем F характеристики нуль.

2. Алгебры, определенные тождеством $a(bc) = A_1(ab)c + A_2(ac)b$. Пусть A — произвольная n-мерная ОАЛ. Нетрудно видеть, что для алгебры A ряд (3) сводится к последовательности

$$A^1 = A, A^{k+1} = A^k A^1, \qquad k \geq 1. \tag{4}$$

Поэтому в дальнейшем вместо этого ряда мы будем использовать последовательность (4).

В следующей теореме представлена классификация нуль-филиформных ОАЛ.

Теорема 2.1. *n-Мерная нуль-филиформная ОАЛ A существует только при $A_1 + A_2 = 0$ или $A_1 + A_2 = 1$. Более того, в каждом случае существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ алгебры A такой, что умножение имеет вид*

$$\begin{aligned} &\textit{случай} \quad A_1 + A_2 = 0\colon e_i e_1 = e_{i+1}, \qquad 1 \leq i \leq n-1, \\ &\textit{случай} \quad A_1 + A_2 = 1\colon e_i e_j = e_{i+j}, \qquad 2 \leq i + j \leq n. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть A — нуль-филиформная ОАЛ размерности n и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис алгебры A такой, что $e_i \in A^i \setminus A^{i+1}$, $1 \leq i \leq n$. Тогда имеем

$$e_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i e_i\right) = \gamma_1 \delta_1 e_1 e_1 + f,$$

где $f \in A^3$. Заметим, что $\gamma_1\delta_1 \neq 0$ и $e_1e_1 \in A^2 \setminus A^3$, в противном случае $e_2 \in A^3$. Переобозначая $e_2' = \dfrac{1}{\gamma_1\delta_1}(e_2 - f)$, можем полагать, что $e_2 = e_1e_1$.

Пусть $e_2e_1 = \alpha_1e_3, e_1e_2 = \beta_1e_3$, где $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$. Если $\alpha_1 = 0$, то $e_2e_1 = 0$, следовательно,

$$e_1e_2 = e_1(e_1e_1) = A_1(e_1e_1)e_1 + A_2(e_1e_1)e_1 = (A_1 + A_2)e_2e_1 = 0,$$

т. е. $\beta_1 = 0$. Тогда алгебра не является нуль-филиформной.

Таким образом, $\alpha_1 \neq 0$. Выполняя замену базисного элемента вида $e_3' := \alpha_1e_3$, можно полагать, что $\alpha_1 = 1$. Следовательно, $e_2e_1 = e_3, e_1e_2 = \beta_1e_3$, где $\beta_1 = A_1 + A_2$.

Обозначим $e_ie_1 = \alpha_{i-1}e_{i+1},\ 2 \leq i \leq n-1$. Рассмотрим равенства

$$e_ie_2 = e_i(e_1e_1) = A_1(e_ie_1)e_1 + A_2(e_ie_1)e_1 = \beta_1(e_ie_1)e_1 = \beta_1\alpha_{i-1}e_{i+1}e_1 = \beta_1\alpha_{i-1}\alpha_ie_{i+2}.$$

Индукцией по j для произвольного i доказывается равенство

$$e_ie_j = \alpha_{i-1}\alpha_i\ldots\alpha_{i+j-2}\beta_1^{j-1}e_{i+j},\ \ 2 \leq i+j \leq n.$$

Если существует j_0 $(2 \leq j_0 \leq n-1)$ такой, что $\alpha_{j_0-1} = 0$, то $e_{j_0-i+1}e_i = 0$ для любых $2 \leq i \leq j_0$. Следовательно, пришли к противоречию. Таким образом, $\alpha_{j_0-1} \neq 0$ для любых $2 \leq j_0 \leq n-1$. При замене базисных элементов $e_{j_0+1}' := \alpha_{j_0-1}e_{j_0+1}$ можно полагать, что $\alpha_{j_0-1} = 1$ для любых $2 \leq j_0 \leq n-1$. Поэтому имеем

$$e_ie_1 = e_{i+1},\ \ 1 \leq i \leq n-1, \quad e_ie_j = \beta_1^{j-1}e_{i+j},\ \ 2 \leq i+j \leq n.$$

Рассмотрение тождества (1) для элементов $\{e_1, e_1, e_2\}$ влечет $\beta_1e_1e_3 = \beta_1^2e_4$, т. е. $\beta_1 \in \{0, 1\}$. Следовательно, получаем следующие алгебры:

$$\mathrm{I}:\ e_ie_1 = e_{i+1},\ \ 1 \leq i \leq n-1 \text{ при } \beta_1 = 0;$$

$$\mathrm{II}:\ e_ie_j = e_{i+j},\ \ 2 \leq i+j \leq n \text{ при } \beta_1 = 1.$$

Поскольку размерность правого аннулятора алгебры I равна $n-1$, а размерность правого аннулятора алгебры II – 1, алгебры I и II не изоморфны.

Теорема 2.1 доказана.

3. Алгебры, определенные тождеством $(ab)c = A_1a(bc) + A_2a(cb)$. Пусть задана ОАЗ A, тогда из тождества (2) видно, что в алгебре A вместо ряда (3) достаточно рассмотреть последовательность

$$A^1 = A, \qquad A^{k+1} = AA^k, \quad k \geq 1.$$

Следующая теорема описывает нуль-филиформные ОАЗ.

Теорема 3.1. *n-Мерная нуль-филиформная ОАЗ A существует только при $A_1 = A_2$, либо $A_1 = -A_2$, либо $A_1 + A_2 = 1$. Более того, в алгебре A существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ такой, что умножение имеет вид*

$$e_i e_j = B_{i,j} e_{i+j},$$

где $B_{1,j} = 1,\ 1 \leq j \leq n-1$ и $B_{i,j} = A_1 B_{i-1,j} + A_2 B_{j,i-1},\ \ 2 \leq i \leq n-j.$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1, существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ алгебры A такой, что $e_i \in A^i \backslash A^{i+1},\ 1 \leq i \leq n$ и $e_1 e_1 = e_2$. Положим $e_1 e_2 = \alpha_1 e_3,\ e_2 e_1 = \beta_1 e_3$, где $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$. Если $\alpha_1 = 0$, то $e_1 e_2 = 0$. Из равенства

$$e_2 e_1 = (e_1 e_1) e_1 = A_1 e_1 (e_1 e_1) + A_2 e_1 (e_1 e_1) = (A_1 + A_2) e_1 e_2 = 0$$

следует $\beta_1 = 0$. Пришли к противоречию. Таким образом, $\alpha_1 \neq 0$. Выполняя замену базисного элемента вида $e_3' := \alpha_1 e_3$, можно полагать, что $\alpha_1 = 1$, т. е. $e_1 e_2 = e_3, e_2 e_1 = \beta_1 e_3$, где $\beta_1 = A_1 + A_2$.

Пусть $e_1 e_3 = \alpha_2 e_4$. Применяя тождество (2) к произведениям

$$(e_1 e_1) e_2, \ \ (e_1 e_2) e_1, \ (e_2 e_1) e_1,$$

получаем $e_2 e_2 = (A_1 + A_2 \beta_1) e_1 e_3$, $e_3 e_1 = (A_1 \beta_1 + A_2) e_1 e_3$.

Если $\alpha_2 = 0$, то $e_2 e_2 = e_3 e_1 = 0$ — противоречие. Поэтому $\alpha_2 \neq 0$ и, выполняя замену $e_4' := \alpha_2 e_4$, можно полагать, что $\alpha_2 = 1$ и $e_2 e_2 = (A_1 + A_2 \beta_1) e_4,\ e_3 e_1 = (A_1 \beta_1 + A_2) e_4$.

При рассмотрении тождества (2) для базисных элементов $\{e_2, e_1, e_1\}$ получаем три возможных случая для параметров A_1 и A_2:

$$1)\ A_1 = A_2\ \ (\beta_1 = 2 \cdot A_1 \neq 0); \qquad 2)\ A_1 = -A_2\ \ (\beta_1 = 0); \qquad 3)\ A_1 + A_2 = 1\ \ (\beta_1 = 1).$$

Действительно, $\beta_1 e_3 e_1 = (e_2 e_1) e_1 = A_1 e_2 e_2 + A_2 e_2 e_2 = \beta_1 e_2 e_2$, откуда имеем либо $\beta_1 = 0$, либо $e_3 e_1 = e_2 e_2$. Рассмотрев равенство $e_3 e_1 = e_2 e_2$, получим $A_1 = A_2$ или $\beta_1 = 1$.

Обозначим $e_1 e_{i+j-1} = \alpha_{i+j-2} e_{i+j}$. Покажем, что для некоторого фиксированного s, $1 \leq\ \leq s \leq n-1$, выполняется $e_i e_j = B_{i,j} e_1 e_{i+j-1},\ 2 \leq i+j \leq s+1$, где $B_{i,j}$ удовлетворяют условиям из утверждения теоремы.

Предположим, что для $s = s_0$ эта зависимость справедлива. Тогда при условии $e_1 e_{i+j-1} = 0$ имеем $e_i e_j = 0$ для любых $2 \leq i+j \leq s_0+1$, что противоречит существованию алгебры. Таким образом, $e_1 e_{i+j-1} \neq 0$ (т. е. $\alpha_{i+j-2} \neq 0$). Используя замену $e'_{i+j} := \alpha_{i+j-2} e_{i+j}$, можно полагать, что $\alpha_{i+j-2} = 1$. Следовательно, имеем

$$e_1 e_{i+j-1} = e_{i+j}, \qquad 2 \leq i+j \leq s_0+1,$$

$$e_i e_j = B_{i,j} e_1 e_{i+j-1} = B_{i,j} e_{i+j}, \qquad 2 \leq i+j \leq s_0+1.$$

По индукции покажем, что $e_i e_j = B_{i,j} e_1 e_{i+j-1}$ при $i+j = s_0+2$.

Пусть $e_1 e_{s_0+1} = \alpha_{s_0} e_{s_0+2}$. При $i = 2$ имеем $e_2 e_{s_0} = (e_1 e_1) e_{s_0} = A_1 e_1 (e_1 e_{s_0}) + A_2 e_1 (e_{s_0} e_1) = (A_1 + A_2 B_{s_0,1}) e_1 e_{s_0+1}$. Положим $A_1 + A_2 B_{s_0,1} = B_{2,s_0}$, тогда $e_2 e_{s_0} = B_{2,s_0} e_1 e_{s_0+1}$.

Пусть для $i = i_0$, $1 \leq i_0 \leq s_0$, выполняется $e_{i_0} e_{s_0+2-i_0} = B_{i_0,s_0+2-i_0} e_1 e_{s_0+1}$, где B_{i_0,s_0+2-i_0} удовлетворяют свойствам из утверждения теоремы. Тогда рассмотрим

$$e_{i_0+1} e_{s_0+1-i_0} = (e_1 e_{i_0}) e_{s_0+1-i_0} = A_1 e_1 (e_{i_0} e_{s_0+1-i_0}) + A_2 e_1 (e_{s_0+1-i_0} e_{i_0}) =$$

$$= (A_1 B_{i_0,s_0+1-i_0} + A_2 B_{s_0+1-i_0,i_0}) e_1 e_{s_0+1} = B_{i_0+1,s_0+1-i_0} e_1 e_{s_0+1}.$$

Таким образом, $e_i e_j = B_{i,j} e_1 e_{i+j-1}$ для $2 \leq i+j \leq s_0+2$. Аналогично можно считать, что $\alpha_{s_0} = 1$, т. е. $e_1 e_{s_0+1} = e_{s_0+2}$. Следовательно,

$$e_i e_j = B_{i,j} e_{i+j},$$

где $B_{1,j} = 1$, $1 \leq j \leq n-1$ и $B_{i,j} = A_1 B_{i-1,j} + A_2 B_{j,i-1}$, $2 \leq i+j \leq n$.

Теорема 3.1 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3.1. *Для любых натуральных чисел* $a, i, s \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $s \geq 3$, *справедливы следующие равенства*:

$$\sum_{l=2}^{i} C_{l+a-s}^{a-1} = C_{i+a-(s-1)}^{a}, \qquad \sum_{l=2}^{i} C_{l-2}^{j-1} = C_{i-1}^{j}.$$

Доказательство проводится несложной индукцией.

Лемма 3.2. *Для любых* $i, j \in \mathbb{N}$ *и любого* $x \in F$ *справедливы следующие равенства*:

$$\sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{j-3} (C_{k+l-2}^{k} + C_{k+l-2}^{j-1}) x^{k+i} = \sum_{k=2}^{j-2} (C_{k+i-2}^{k} + C_{k+i-2}^{j}) x^{k+i-1},$$

$$\sum_{l=2}^{i}\sum_{k=1}^{l-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j+i-l} = \sum_{k=1}^{i-j} C_{k+j-1}^{j} x^{k+j}.$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\sum_{l=2}^{i}\sum_{k=1}^{j-3}(C_{k+l-2}^{k} + C_{k+l-2}^{j-1})x^{k+i} = \sum_{l=2}^{i}\sum_{k=2}^{j-2}(C_{k+l-3}^{k-1} + C_{k+l-3}^{j-1})x^{k+i-1} =$$

$$= \sum_{k=2}^{j-2}\sum_{l=2}^{i}(C_{k+l-3}^{k-1} + C_{k+l-3}^{j-1})x^{k+i-1} = \sum_{k=2}^{j-2} x^{k+i-1}\left(\sum_{l=2}^{i} C_{k+l-3}^{k-1} + \sum_{l=2}^{i} C_{k+l-3}^{j-1}\right) =$$

$$= (\text{по лемме } 3.1) = \sum_{k=2}^{j-2}(C_{k+i-2}^{k} + C_{k+i-2}^{j})x^{k+i-1}.$$

Справедливость второго равенства следует из равенств

$$\sum_{l=2}^{i}\sum_{k=1}^{l-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j+i-l} = \sum_{l=2}^{i}\left[\sum_{k=1}^{l-j-1} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j+i-l} + C_{l-2}^{j-1} x^{i}\right] =$$

$$= (\text{по лемме } 3.1) = C_{i-1}^{j} x^{i} + x^{i+j}\sum_{l=2}^{i}\sum_{k=1}^{l-j-1} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k-l} =$$

$$= C_{i-1}^{j} x^{i} + x^{i+j}\left[\sum_{k=1}^{1-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k-2} + \sum_{k=1}^{2-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k-3} + \ldots + \sum_{k=1}^{i-j-1} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k-i}\right] =$$

$$= C_{i-1}^{j} x^{i} + x^{i+j}\left[\sum_{k=1}^{1-j} C_{k+j-2}^{j-1}(x^{k-2} + x^{k-3} + x^{k-4} + \ldots + x^{k-(i-1)} + x^{k-i}) + \right.$$

$$+ C_{0}^{j-1} x^{-j-1} + (C_{0}^{j-1} x^{-j-2} + C_{1}^{j-1} x^{-j-1}) +$$

$$+ (C_{0}^{j-1} x^{-j-3} + C_{1}^{j-1} x^{-j-2} + C_{2}^{j-1} x^{-j-1}) + \sum_{k=0}^{3} C_{k}^{j-1} x^{-j-4+k} + \ldots$$

$$\left. \ldots + \sum_{k=0}^{i-5} C_{k}^{j-1} x^{-j-(i-4)+k} + \sum_{k=0}^{i-4} C_{k}^{j-1} x^{-j-(i-3)+k} + \sum_{k=0}^{i-3} C_{k}^{j-1} x^{-j-(i-2)+k}\right] =$$

$$= C_{i-1}^{j} x^{i} + x^{i+j}\left[x^{-j-1}\sum_{k=1}^{i-3} C_{k}^{j-1} + x^{-j-2}\sum_{k=1}^{i-4} C_{k}^{j-1} + x^{-j-3}\sum_{k=1}^{i-5} C_{k}^{j-1} + \ldots\right.$$

$$\ldots + \underbrace{x^{1-i}\sum_{k=1}^{j-1} C_k^{j-1}}_{(i-j-1)\text{-е место}} + \underbrace{x^{-i}\sum_{k=1}^{j-2} C_k^{j-1}}_{(i-j)\text{-е место}} + \ldots + \underbrace{x^{-j-(i-4)}\sum_{k=1}^{2} C_k^{j-1}}_{(i-4)\text{-е место}} + \underbrace{x^{-j-(i-3)}C_1^{j-1}}_{(i-3)\text{-е место}}\Bigg] =$$

$$= (\text{по лемме } 3.1) = C_{i-1}^{j}x^{i} + x^{i+j}\Big[C_{i-2}^{j}x^{-j-1} + C_{i-3}^{j}x^{-j-2} +$$

$$+ C_{i-4}^{j}x^{-j-3} + \ldots + C_{j+1}^{j}x^{2-i} + C_{j}^{j}x^{1-i}\Big] =$$

$$= C_{i-1}^{j}x^{i} + \sum_{k=1}^{i-j-1} C_{k+j-1}^{j}x^{k+j} = \sum_{k=1}^{i-j} C_{k+j-1}^{j}x^{k+j}.$$

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Для любых i, $j \in \mathbb{N}$ и любого $x \in F$ справедливо равенство*

$$\sum_{l=2}^{i}\sum_{k=1}^{l-4} C_{k+j-2}^{j-1}x^{k+j+i-l} = \sum_{k=1}^{i-4} C_{k+j-1}^{j}x^{k+j}.$$

Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$\sum_{l=2}^{i}\sum_{k=1}^{l-4} C_{k+j-2}^{j-1}x^{k+j+i-l} = \sum_{l=1}^{i-4} C_{l+j-2}^{j-1}x^{i+j-4} + \sum_{l=1}^{i-5} C_{l+j-2}^{j-1}x^{i+j-5} + \sum_{l=1}^{i-6} C_{l+j-2}^{j-1}x^{i+j-6} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{l=1}^{3} C_{l+j-2}^{j-1}x^{j+3} + \sum_{l=1}^{2} C_{l+j-2}^{j-1}x^{j+2} + x^{j+1} = (\text{по лемме } 3.1) = \sum_{k=1}^{i-4} C_{k+j-1}^{j}x^{k+j}.$$

Лемма 3.3 доказана.

Следующая теорема описывает параметры $B_{i,j}$ из теоремы 3.1 в случае $A_1 = A_2 = x$.

Теорема 3.2. *Для любой n-мерной нуль-филиформной ОАЗ A при $A_1 = A_2 = x$ (случай* I) *для произвольного $i > 1$ справедливы равенства*

$$B_{i,1} = 2x^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-2} x^{k}, \qquad B_{i,2} = C_{i-1}^{1}x^{i-1}(2x+1) + \sum_{k=1}^{i-3} C_{k}^{1}x^{k+1}, \tag{5}$$

$$B_{i,j} = C_{i+j-3}^{j-1}x^{i+j-3}(2x+1) + x^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-j} C_{k+j-2}^{j-1}x^{k+j-1} + \sum_{k=1}^{j-3}(C_{k+i-2}^{k} + C_{k+i-2}^{j-1})x^{k+i-1},$$

$$j \geq 3.$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что $e_ie_j = B_{i,j}e_{i+j}$, где

$$B_{1,j} = 1,\ 1 \le j \le n-1, \qquad B_{i,j} = x(B_{i-1,j} + B_{j,i-1}), \quad 2 \le i \le n-j.$$

Поскольку $B_{j+1,i-1} = x(B_{j,i-1} + B_{i-1,j})$, то $B_{i,j} = B_{j+1,i-1},\ \ i \ge 2$. Поэтому при $j > 1$ имеем

$$B_{i,j} = x(B_{i-1,j} + B_{i,j-1}),\ 2 \le i \le n-j. \tag{6}$$

При $j=1$ имеем рекуррентное соотношение $B_{i,1} = x(B_{i-1,1} + B_{1,i-1}) = xB_{i-1,1} + x,\ i > 1$, из которого вытекает $B_{i,1} = 2x^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-2} x^k$.

С помощью равенства (6) при $j=2$, используя полученное выражение для $B_{i,1}$, индукцией доказываем соотношение

$$B_{i,2} = C_{i-1}^1 x^{i-1}(2x+1) + \sum_{k=1}^{i-3} C_k^1 x^{k+1}. \tag{7}$$

Доказательство равенства (5) при $j \ge 3$ проведем индукцией по j при произвольном значении i.

Полагая в равенстве (6) $j=3$, получаем $B_{i,3} = x(B_{i-1,3} + B_{i,2})$. Используя соотношение (7), нетрудно доказать справедливость равенства (5) при $j=3$.

Пусть при фиксированном $j > 3$ формула (5) справедлива. Рассмотрим $B_{i,j+1}$ при произвольном i:

$$B_{i,j+1} = \underbrace{x(x(x(x\ldots(x}_{k\ \text{раз}}(B_{i-k,j+1} + \underbrace{B_{i-k+1,j}) + B_{i-k+2,j}) + \ldots + B_{i-2,j}) + B_{i-1,j}) + B_{i,j})}_{k\ \text{раз}} =$$

$$= \underbrace{x(x(x(x\ldots(x}_{k\ \text{раз}}(x(B_{i-k-1,j+1} + B_{i-k,j}) + \underbrace{B_{i-k+1,j}) + B_{i-k+2,j}) + \ldots + B_{i-2,j}) + B_{i-1,j}) + B_{i,j})}_{k\ \text{раз}} =$$

$$= \underbrace{x(x(x(x\ldots(x}_{(k+1)\ \text{раз}}(B_{i-k-1,j+1} + \underbrace{B_{i-k,j}) + B_{i-k+1,j}) + \ldots + B_{i-2,j}) + B_{i-1,j}) + B_{i,j})}_{(k+1)\ \text{раз}}.$$

Таким образом, можно на $(i-1)$-м шаге дойти до $B_{1,j+1}$, которое равно единице, т. е.

$$B_{i,j+1} = \underbrace{x(x(x(x\ldots(x}_{(i-1)\ \text{раз}}(1 + \underbrace{B_{2,j}) + B_{3,j}) + \ldots + B_{i-2,j}) + B_{i-1,j}) + B_{i,j})}_{(i-1)\ \text{раз}} =$$

$$x^{i-1} + x^{i-1}B_{2,j} + x^{i-2}B_{3,j} + x^{i-3}B_{4,j} + \ldots + x^2 B_{i-1,j} + xB_{i,j} = x^{i-1} + \sum_{l=2}^{i} x^{i+1-l} B_{l,j} =$$

$$= x^{i-1} + \sum_{l=2}^{i} \left[C_{l+j-3}^{j-1} x^{i+j-2}(2x+1) + x^i + \sum_{k=1}^{l-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j+i-l} + \sum_{k=1}^{j-3} (C_{k+l-2}^{k} + C_{k+l-2}^{j-1}) x^{k+i} \right] =$$

$$= x^{i-1} + x^{i+j-2}(2x+1) \sum_{l=2}^{i} C_{l+j-3}^{j-1} + (i-1)x^i + \sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{l-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j+i-l} +$$

$$+ \sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{j-3} (C_{k+l-2}^{k} + C_{k+l-2}^{j-1}) x^{k+i} = (\text{по лемме } 3.1) = x^{i-1} + C_{i+j-2}^{j} x^{i+j-2}(2x+1) +$$

$$+ (i-1)x^i + \sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{l-j} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j+i-l} + \sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{j-3} (C_{k+l-2}^{k} + C_{k+l-2}^{j-1}) x^{k+i}.$$

Применяя лемму 3.2, получаем

$$B_{i,j+1} = C_{i+j-2}^{j} x^{i+j-2}(2x+1) + x^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-j-1} C_{k+j-1}^{j} x^{k+j} + (i-1)x^i + C_{i-1}^{j} x^i +$$

$$+ \sum_{k=2}^{j-2} (C_{k+i-2}^{k} + C_{k+i-2}^{j}) x^{k+i-1} = C_{i+j-2}^{j} x^{i+j-2}(2x+1) + x^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-j-1} C_{k+j-1}^{j} x^{k+j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j-2} (C_{k+i-2}^{k} + C_{k+i-2}^{j}) x^{k+i-1}.$$

Теорема 3.2 доказана.

Приведем описание параметров $B_{i,j}$ в случае $A_1 = -A_2 = x$.

Теорема 3.3. *Для любой n-мерной нуль-филиформной ОАЗ A при $A_1 = -A_2 = x$ (случай* II) *для произвольного $i > 1$ справедливы равенства*

$$B_{i,1} = -\sum_{k=1}^{i-2} x^k, \qquad B_{2,2} = x, \qquad B_{i,2} = -C_{i-3}^{1} x^{i-2}(x+1) - \sum_{k=1}^{i-4} C_k^1 x^{k+1}, \tag{8}$$

$$B_{i,j} = -(C_{i+j-5}^{j-1} - C_{i+j-5}^{j-3}) x^{i+j-4}(x+1) + \sum_{k=1}^{j-3} C_{i+k-3}^{k-1} x^{i+k-2} - \sum_{k=1}^{i-4} C_{k+j-2}^{j-1} x^{k+j-1}, \qquad j \geq 3.$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 имеем $e_i e_j = B_{i,j} e_{i+j}$, где

$$B_{1,j} = 1,\ 1 \leq j \leq n-1, \quad B_{i,j} = x(B_{i-1,j} - B_{j,i-1}),\ 2 \leq i \leq n-j.$$

Нетрудно видеть, что $B_{j+1,i-1} = x(B_{j,i-1} - B_{i-1,j})$. Следовательно,

$$B_{i,j} = -B_{j+1,i-1},\ \ i \geq 2.$$

При $j = 1, 2, 3$ имеем рекуррентные соотношения

$$B_{i,1} = x(B_{i-1,1} - B_{1,i-1}) = x(B_{i-1,1} - 1), \qquad i > 1,$$

$$B_{i,2} = x(B_{i-1,2} - B_{2,i-1}) = x(B_{i-1,2} + B_{i,1}), \qquad i > 1,$$

$$B_{i,3} = x(B_{i-1,3} - B_{3,i-1}) = x(B_{i-1,3} + B_{i,2}), \qquad i > 1,$$

соответственно. Используя данные соотношения, убеждаемся в справедливости первых двух равенств и третьего равенства при $j = 3$ в (8).

Доказательство третьего равенства в (8) при $j > 3$ проведем индукцией.

Пусть при произвольном i и фиксированном $j > 3$ формула (8) справедлива. Рассмотрим $B_{i,j+1}$ при произвольном i, тогда $B_{i,j+1} = x(B_{i-1,j+1} + B_{i,j})$. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.2, можно показать, что

$$B_{i,j+1} = \underbrace{x(x(x(x\ldots(x(x}_{(i-1)\ \text{раз}}(B_{1,j+1} + \underbrace{B_{2,j}) + B_{3,j}) + B_{4,j}) + \ldots + B_{i-2,j}) + B_{i-1,j}) + B_{i,j})}_{(i-1)\ \text{раз}}.$$

Таким образом,

$$B_{i,j+1} = \underbrace{x(x(x\ldots(x}_{(i-1)\ \text{раз}}(1 + \underbrace{B_{2,j}) + B_{3,j}) + \ldots + B_{i-1,j}) + B_{i,j})}_{(i-1)\ \text{раз}} = x^{i-1} + \sum_{l=2}^{i} x^{i+1-l} B_{l,j} =$$

$$= x^{i-1} - \sum_{l=2}^{i} (C_{l+j-5}^{j-1} - C_{l+j-5}^{j-3}) x^{i+j-3}(x+1) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{j-3} C_{l+k-3}^{k-1} x^{i+k-1} - \sum_{l=2}^{i} \sum_{k=1}^{l-4} C_{k+j-2}^{j-1} x^{i+k+j-l} =$$

$$= (\text{по лемме 3.3}) = x^{i-1} - x^{i+j-3}(x+1) \left(\sum_{l=2}^{i} C_{l+j-5}^{j-1} - \sum_{l=2}^{i} C_{l+j-5}^{j-3} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j-3} x^{i+k-1} \sum_{l=2}^{i} C_{l+k-3}^{k-1} - \sum_{k=1}^{i-4} C_{k+j-1}^{j} x^{k+j} = (\text{по лемме 3.1}) =$$

$$= -(C_{i+j-4}^{j} - C_{i+j-4}^{j-2}) x^{i+j-3}(x+1) + \sum_{k=1}^{j-2} C_{i+k-3}^{k-1} x^{i+k-2} - \sum_{k=1}^{i-4} C_{k+j-1}^{j} x^{k+j}.$$

Теорема 3.3 доказана.

Следующая теорема завершает описание нуль-филиформных ОАЗ.

Теорема 3.4. *Для любой n-мерной нуль-филиформной ОАЗ A при $A_1 + A_2 = 1$ (случай* III) *справедливо соотношение*

$$B_{i,j} = 1 \quad \textit{для любых} \quad 1 \leq i, \quad j \leq n-1.$$

Доказательство. Пусть $A_1 = x$, тогда $A_2 = 1 - x$ и $B_{i,j} = xB_{i-1,j} + (1-x)B_{j,i-1} = x(B_{i-1,j} - B_{j,i-1}) + B_{j,i-1}$. Доказательство проведем индукцией по i при любом j. При $i = 1$ имеем $B_{1,j} = 1,\ \ 1 \leq j \leq n-1$.

Рассмотрим $B_{i+1,j} = xB_{i,j} + (1-x)B_{j,i} = x + (1-x)B_{j,i}$. Поскольку

$$B_{j,i} = xB_{j-1,i} + (1-x)B_{i,j-1} = xB_{j-1,i} + (1-x),$$

$$B_{j-1,i} = xB_{j-2,i} + (1-x)B_{i,j-2} = xB_{j-2,i} + (1-x),$$

то $B_{j,i} = xB_{j-1,i} + (1-x) = x(xB_{j-2,i} + (1-x)) + (1-x)$.

Аналогично можно показать, что

$$B_{j,i} = \underbrace{x(x(x(x\ldots(x(x}_{(j-1)\ \text{раз}} B_{1,i} + (1-x)\underbrace{) + (1-x)) + \ldots + (1-x)) + (1-x)) + (1-x))}_{(j-1)\ \text{раз}}.$$

Поскольку $B_{1,j} = 1$, $1 \leq j \leq n-1$, то $B_{j,i} = 1$. Таким образом, $B_{i+1,j} = x + (1-x)\cdot 1 = 1$.

Следовательно, $B_{i,j} = 1$ для любых $1 \leq i$, $j \leq n-1$.

Теорема 3.4 доказана.

1. *Аюпов Ш. А., Омиров Б. А.* О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**. – С. 18 – 29.
2. *Омиров Б. А.* Классификация двумерных комплексных алгебр Зинбиеля // Узб. мат. журн. – 2002. – № 2. – С. 55 – 59.
3. *Adashev J. Q., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A. Kh.* Classifications of some classes of Zinbiel algebras // J. Gen. Lie Theory and Appl. – 2010. – **3(4)**. – P. 1 – 10.
4. *Ayupov Sh. A., Omirov B. A.* On Leibniz algebras // Algebra and Operators Theory: Proc. Colloq. in Tashkent 1997. – Kluwer Acad. Publ., 1998. – P. 1 – 13.
5. *Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.* Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras // J. Symbol. Comput. – 2009. – **44**, № 5. – P. 527 – 539.
6. *Dzhumadil'daev A. S., Tulenbaev K. M.* Nilpotency of Zinbiel algebras // J. Dynam. Control Syst. – 2005. – **11**, № 2. – P. 195 – 213.
7. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz // Enseign. math. – 1993. – **39**. – P. 269 – 293.
8. *Loday J.-L., Frabetti A., Goichot F.* Dialgebras and related operads // Lect. Notes Math. – 2001. – **1763**. – 133 p.
9. *Omirov B. A.* Conjucasy of Cartan subalgebras of complex finite-dimensional Leibniz algebras // J. Algebra. – 2006. – **302**. – P. 887 – 896.

Получено 24.12.12