УДК 517.956.4

В. М. Лось (Нац. техн. ун-т України „КПІ”; Чернігів. нац. технол. ун-т)

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

For some anisotropic inner product Hoŕmander spaces, we prove theorems on the well-posedness of initial-boundary value problems for the two-dimensional heat equation with Dirichlet or Neumann boundary conditions. The regularity of the functions which form these spaces is characterized by a couple of numerical parameters and a function parameter. The latter regularly varies at infinity in Karamata's sense and characterizes the regularity of functions more precisely than the Sobolev scale.

Для некоторых анизотропных пространств Хермандера установлены теоремы о корректной разрешимости начально-краевых задач для двумерного уравнения теплопроводности с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Регулярность функций, образующих эти пространства, характеризуется парой числовых параметров и функциональным параметром, медленно меняющимся на бесконечности по Карамата. Последний, по сравнению с соболевской шкалой, позволяет более тонко охарактеризовать регулярность функций.

1. Вступ. Загальні параболічні початково-крайові задачі достатньо повно досліджено у класичних шкалах функціональних просторів Гельдера – Зигмунда та Соболєва [1 – 7]. Отримано теореми про їх коректну розв'язність у відповідних парах просторів, що належать цим шкалам.

В останній час важливі застосування у теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними знайшли функціональні простори узагальненої гладкості [8 – 17]. На відміну від класичних просторів для просторів узагальненої гладкості показником регулярності належних до них функцій є не числовий, а функціональний параметр, залежний від частотних змінних. Це дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність функцій, виходячи з поведінки на нескінченності їх перетворення Фур'є.

В. А. Михайлець і О. О. Мурач [11 – 16] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах просторів $H^{s,\varphi} := H^{\mu}$, для яких показником регулярності є функція вигляду $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ — повільно змінним на нескінченності за Й. Караматою. Для загальної вагової функції μ цей простір був введений і досліджений Л. Хермандером [18], а також Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [19].

У роботах [20, 21] доведено теореми про коректну розв'язність та локальне підвищення гладкості розв'язків початково-крайової задачі у прямокутнику для лінійного параболічного рівняння довільного парного порядку з однорідними початковими умовами (даними Коші) в анізотропних просторах Хермандера $H^{s,s/(2b),\varphi}$, де параметри s і φ є такими ж, як і в згаданій еліптичній теорії.

Метою даної роботи є встановлення теорем про коректну розв'язність початково-крайових задач для двовимірного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле та Неймана без припущення однорідності початкових умов.

Подібні результати для загальної лінійної початково-крайової параболічної задачі з неоднорідними початковими умовами в анізотропних просторах Хермандера анонсовано у [22].

2. Постановка задачі. Простори Хермандера. Нехай $\Omega := (0,l)\times(0,\tau)$, де l і τ — довільні додатні числа, $S_0 = \{(0,t)\colon 0<t<\tau\}$ і $S_1 = \{(l,t)\colon 0<t<\tau\}$ — бічні сторони, а $G = \{(x,0)\colon 0<x<l\}$ — основа прямокутника Ω. Розглянемо в Ω для рівняння теплопровідності початково-крайові задачі Діріхле та Неймана:

$$Au \equiv u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{S_0} = g_0(t) \quad \text{і} \quad u(x,t)\big|_{S_1} = g_1(t) \quad \text{при} \quad 0<t<\tau \tag{2}$$

або

$$u'_x(x,t)\big|_{S_0} = g_0(t) \quad \text{і} \quad u'_x(x,t)\big|_{S_1} = g_1(t) \quad \text{при} \quad 0<t<\tau, \tag{3}$$

$$u(x,t)\big|_{G} = h(x) \quad \text{при} \quad 0<x<l. \tag{4}$$

Задачі (1), (2), (4) та (1), (3), (4) будемо досліджувати у шкалах гільбертових функціональних просторів $H^\mu := \mathcal{B}_{2,\mu}$, що були введені незалежно Л. Хермандером [18] (п. 2.2) та Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [19] (§ 2, 3). Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu\colon \mathbb{R}^k \to (0,\infty)$, яка задовольняє таку умову: існують такі додатні числа c та l, що $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leq c\,(1+|\xi-\eta|)^l$ для будь-яких $\xi,\eta \in \mathbb{R}^k$.

За означенням лінійний простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі всі розподіли/функції вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно скалярного добутку, що визначає норму $\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}$. Простори H^μ займають важливе місце серед просторів узагальненої гладкості [23, 24].

Нам знадобиться версія простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої множини $V \neq \varnothing$. Лінійний простір $H^\mu(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \restriction V$ всіх розподілів $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на множину V. У цьому просторі задано норму за формулою

$$\|u\|_{H^\mu(V)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}\colon w \in H^\mu(\mathbb{R}^k),\ u = w\restriction V\bigr\}.$$

Простір $H^\mu(V)$ є гільбертовим.

Для зручності позначень у п. 2 приймемо $\gamma := 1/2$. Будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu(\xi,\eta) = \bigl(1+|\xi|^2+|\eta|^{2\gamma}\bigr)^{s/2}\varphi\bigl((1+|\xi|^2+|\eta|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \tag{5}$$

де $\xi,\eta \in \mathbb{R}$ — аргументи функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$. Останній складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, які задовольняють дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Караматою на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорію повільно змінних функцій (на нескінченності) викладено, наприклад, у монографії [30]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} (\log\log r)^{\theta_2} \ldots \Big(\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ разів}} r \Big)^{\theta_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розв'язки u початково-крайових задач (1), (2), (4) та (1), (3), (4) і праві частини f рівняння (1) будемо розглядати у гільбертових функціональних просторах $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$, де показник μ визначено формулою (5).

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x,t)$ по просторовій змінній $x \in (0, l)$, а $s\gamma$ — показник регулярності по часовій змінній $t \in (0, \tau)$. В загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, мають місце неперервні та щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1, \tag{6}$$

які випливають із властивостей просторів $H^{\mu}(V)$ [19] (теорема 7.4).

Розглянемо клас гільбертових функціональних просторів

$$\big\{ H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \colon s \in \mathbb{R},\, \varphi \in \mathcal{M} \big\}. \tag{7}$$

Вкладення (6) показують, що у (7) функціональний параметр φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної $(s, s\gamma)$-гладкості. Якщо $\varphi(r) \to \infty$ (або $\varphi(r) \to 0$) при $r \to \infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Іншими словами, φ уточнює основну гладкість $(s, s\gamma)$. Тому природно називати клас просторів (7) *уточненою анізотропною соболєвською шкалою* на Ω (коротко — уточненою шкалою). Тут γ відіграє роль параметра анізотропії просторів, що утворюють цю шкалу.

Означимо простори, до яких належатимуть праві частини g_0, g_1 і h крайових та початкових умов розглядуваних задач. Це гільбертові простори $H^{s,\varphi}(a,b) := H^{\mu}(a,b)$ з показником $\mu(\xi) := := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi((1+|\xi|^2)^{1/2})$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}$. Тут (a,b) — довільний інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$. Їх систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач у теорії еліптичних крайових задач [15, 16].

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболєвськими просторами (анізотропними на Ω або ізотропними на (a,b)). У цьому випадку будемо нехтувати індексом φ у позначеннях просторів.

3. Основні результати. Сформулюємо основні результати роботи. Це теореми про ізоморфізми, породжені задачами (1), (2), (4) та (1), (3), (4) у визначених вище просторах Хермандера. Іншими словами, це теореми про коректну розв'язність розглядуваних задач.

Пов'яжемо із задачею (1), (2), (4) лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda_{\mathrm{D}} u \colon (Au, u\!\upharpoonright_{\overline{S_0}}, u\!\upharpoonright_{\overline{S_1}}, u\!\upharpoonright_{\overline{G}}), \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{8}$$

Тут $\overline{S}_0 = \{(0,t) \colon 0 \le t \le \tau\}$, $\overline{S}_1 = \{(l,t) \colon 0 \le t \le \tau\}$ і $\overline{G} = \{(x,0) \colon 0 \le x \le l\}$.

Теорема 1. *Нехай довільно задано параметри: число $s>2$ і функцію $\varphi\in\mathcal{M}$. Припустимо, що $s\neq 2r+3/2$ для всіх натуральних r. Тоді відображення* (8) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_{\mathrm{D}}\colon H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)\leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}, \tag{9}$$

де $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ *— підпростір простору*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}:=H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega)\oplus\big(H^{s/2-1/4,\varphi}(0,\tau)\big)^2\oplus H^{s-1,\varphi}(0,l),$$

утворений усіма векторами

$$F:=\big(f,g_0,g_1,h\big)\in\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi},$$

які задовольняють умови (11) *узгодження правих частин задачі* (1), (2), (4).

Рівняння (1) та початкова умова (4) дозволяють виразити сліди

$$\big(u_t^{(k)}\big)\restriction_G\in H^{s-1-2k,\varphi}(0,l)\quad(\text{для всіх цілих}\quad 0\le k<s/2-1/2)$$

шуканого розв'язку $u\in H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$ через праві частини $f\in H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega)$ та $h\in$ $\in H^{s-1,\varphi}(0,l)$:

$$u_t^{(0)}(x,0)=u(x,0)=h(x),\quad u_t^{(k)}(x,0)=(u_t^{(k-1)}(x,0))''_{xx}+f_t^{(k-1)}(x,0). \tag{10}$$

За формулами (10) можна обчислити $u_t^{(k)}(0,0)$ та $u_t^{(k)}(l,0)$ для всіх $k\in\{0,1,\ldots,[s/2-$ $-3/4]\}$. Позначимо $u_t^{(k)}(0,0):=c_{0,k}(f,h)$ і $u_t^{(k)}(l,0):=c_{1,k}(f,h)$. Для існування розв'язку $u\in H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)$ розглядуваної задачі природним є виконання таких умов:

$$g_j^{(k)}(0)=c_{j,k}(f,h)\quad\text{для всіх}\quad j\in\{0,1\}\quad\text{та}\quad k\in\{0,1,\ldots,[s/2-3/4]\}. \tag{11}$$

Перейдемо до розгляду задачі (1), (3), (4). Пов'яжемо з нею лінійне відображення

$$u\mapsto\Lambda_{\mathrm{N}}u\colon(Au,u'_x\restriction_{\overline{S_0}},u'_x\restriction_{\overline{S_1}},u\restriction_{\overline{G}}),\quad u\in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{12}$$

Теорема 2. *Нехай довільно задано параметри: число $s>2$ і функцію $\varphi\in\mathcal{M}$. Припустимо, що $s\neq 2r+1/2$ для всіх натуральних r. Тоді відображення* (12) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_{\mathrm{N}}\colon H^{s,s/2,\varphi}(\Omega)\leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}, \tag{13}$$

де $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ *— підпростір простору*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}:=H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega)\oplus\big(H^{s/2-3/4,\varphi}(0,\tau)\big)^2\oplus H^{s-1,\varphi}(0,l),$$

утворений усіма векторами

$$F:=\big(f,g_0,g_1,h\big)\in\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi},$$

які задовольняють умови (14) *узгодження правих частин задачі* (1), (3), (4), *що є подібними до* (11):

$$g_j^{(k)}(0)=c^1_{j,k}(f,h)\quad\textit{для всіх}\quad j\in\{0,1\}\quad\textit{та}\quad k\in\{0,1,\ldots,[s/2-5/4]\}, \tag{14}$$

$c^1_{0,k}(f,h)=(u_t^{(k)}(x,0))'_x\big|_{x=0}$ *і* $c^1_{1,k}(f,h)=(u_t^{(k)}(x,0))'_x\big|_{x=l}$ *обчислено з використанням* (10).

Зауважимо, що при $s \in (2; 5/2)$ задача Неймана не має умов узгодження і $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} = \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$.

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ теореми 1 та 2 є відомими. Вони є окремими випадками теореми, доведеної Ліонсом та Мадженесом [3] (теорема 6.2) для лінійного параболічного оператора в Ω порядку $2m$, $m \in \mathbb{N}$, по змінній x і першого порядку по змінній t з нормальними граничними умовами у припущенні $s + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $s/(2m) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ (їхній результат охоплює і граничний випадок $s = 2$). Подібну теорему для загальних лінійних $2b$-параболічних початково-крайових задач у анізотропних просторах Соболєва було встановлено М. С. Аграновичем та М. І. Вішиком [1] (теорема 12.1) у припущенні $s/(2b) \in \mathbb{N}$. Це припущення можна зняти, що випливає з результату М. В. Житарашу [4] (теорема 9.1).

Як видно з викладеного вище, при дослідженні розглядуваних задач для отримання достатньо гладкого розв'язку необхідним є виконання природних умов узгодження (11) (або (14)) компонент вектора правих частин $F = (f, g_0, g_1, h)$. З результату Солоннікова [26] (теорема 17) випливає, що при означенні просторів $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/(2),\varphi}$ та $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/(2),\varphi}$ вказаним вище способом порушуються висновки теорем 1 і 2 для $s = 2r+3/2$ та $s = 2r+1/2$ відповідно. Таким чином, для кожної з задач існує своя множина вилучених значень параметра s, і складається вона лише з тих значень s, при переході через які змінюється кількість умов узгодження правих частин. Виявляється, можна поширити дію теорем 1 і 2 на вилучені значення $s = 2r + 3/2$ та $s = 2r + 1/2$ відповідно. Наприклад, якщо для цих s означити гільбертові простори $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/(2),\varphi}$ та $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/(2),\varphi}$ за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := \left[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi}\right]_{1/2} \quad \text{при} \quad s = 2r + 3/2,$$

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := \left[\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi}, \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi}\right]_{1/2} \quad \text{при} \quad s = 2r + 1/2.$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а праві частини рівностей є результатом інтерполяції вказаних пар гільбертових просторів із числовим параметром $1/2$. Зазначимо, що означені таким способом простори не залежать від вибору числа ε.

4. Інтерполяція з функціональним параметром. Нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та обговоримо інтерполяційні властивості, які будуть використані у наступному пункті. При цьому будемо дотримуватися результатів монографії [15] (п. 1.1) (див. також [17] (п. 2)). Обмежимось розглядом випадку сепарабельних комплексних гільбертових просторів.

Нехай $X := [X_0, X_1]$ — впорядкована пара сепарабельних комплексних гільбертових просторів, для яких має місце неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J\colon X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що оператор J є самоспряженим додатно визначеним оператором в X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. Тут через $\mathcal{B}$ позначено множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, а $1/\psi$ — на кожному промені $[a, \infty)$, $a > 0$.

Розглянемо оператор $\psi(J)$. Він є додатно визначеним оператором в X_0 як борелівська функція ψ від J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ (або скорочено X_ψ) область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{X_\psi} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}.$$

Він породжує норму $\|u\|_{X_\psi} := \|\psi(J)u\|_{X_0}$. Простір X_ψ є сепарабельним гільбертовим.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо інтерполяційним параметром, якщо для всіх допустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, справджується наступне: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T\colon X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, то звуження відображення T на X_ψ також є обмеженим оператором $T\colon X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо ψ — інтерполяційний параметр, то будемо казати, що гільбертовий простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. У цьому випадку маємо щільні та неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Відомо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли ψ є псевдовгнутою в околі ∞, тобто коли існує вгнута додатна функція $\psi_1(r)$ при $r \gg 1$ така, що обидві функції ψ/ψ_1 та ψ_1/ψ є обмеженими в деякому околі ∞. Цей критерій випливає з опису Ж. Петре класу всіх інтерполяційних функцій для вагових просторів типу $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. [27], теорема 5.4.4). Відповідне доведення є в [15] (п. 1.1.9).

Для нас важливим є наслідок з цього критерію [15] (теорема 1.11).

Твердження 1. *Припустимо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є правильно змінною на нескінченності функцією порядку θ, де $0 < \theta < 1$, тобто*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(\lambda r)}{\psi(r)} = \lambda^\theta \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Тоді ψ є інтерполяційним параметром.

У випадку степеневих функцій це твердження приводить нас до класичного результату Ж.-Л. Ліонса та С. Г. Крейна, який полягає в тому, що функція $\psi(r) \equiv r^\theta$ є інтерполяційним параметром при $0 < \theta < 1$. Тут показник θ розглядається як числовий параметр інтерполяції.

У кінці цього пункту сформулюємо дві властивості інтерполяції, які будуть використані у подальших доведеннях. Перша з них дозволяє звести інтерполяцію підпросторів або фактор-просторів до інтерполяції вихідних просторів (див. [15] (п. 1.1.6) та [28] (п. 1.17)). Зазначимо, що підпростори припускаються замкненими, і розглядаємо взагалі неортогональні проектори на підпростори.

Твердження 2. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ є допустимою парою гільбертових просторів, а Y_0 — підпростір в X_0. Тоді $Y_1 := X_1 \cap Y_0$ є підпростором в X_1. Припустимо, що існує лінійне відображення $P\colon X_0 \to X_0$, яке для кожного $j \in \{0, 1\}$ є проектором простору X_j на його підпростір Y_j. Тоді пари $[Y_0, Y_1]$ та $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ є допустимими і справджуються рівності*

$$[Y_0, Y_1]_\psi = X_\psi \cap Y_0,$$

$$[X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi = X_\psi/(X_\psi \cap Y_0)$$

з еквівалентністю норм. Тут $\psi \in \mathcal{B}$ — довільний інтерполяційний параметр.

Друга властивість дозволяє звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їхніх доданків.

Твердження 3. *Нехай $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, де $j = 1, \ldots, p$, є скінченним набором допустимих пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\Big[\bigoplus_{j=1}^{p} X_0^{(j)},\, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)}\Big]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{p}\big[X_0^{(j)},\, X_1^{(j)}\big]_\psi$$

з еквівалентністю норм. Тут $\psi \in \mathcal{B}$ — довільний інтерполяційний параметр.

5. Доведення результатів. Виявляється, що простори Соболєва тісно пов'язані з просторами уточненої шкали: останні можна одержати в результаті інтерполяції з відповідним функціональним параметром відповідної пари гільбертових просторів Соболєва. Спочатку наведемо ці факти. Потім, скориставшись ними, виведемо теореми 1 і 2 з вищезгаданого результату Ліонса – Мадженеса.

В цьому пункті вважаємо, що

$$s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}, \quad 0 \le s_0 < s < s_1, \quad \gamma = 1/2 \quad \text{та} \quad \varphi \in \mathcal{M}. \tag{15}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\, \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \ge 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{16}$$

Ця функція за твердженням 1 є інтерполяційним параметром, оскільки вона є правильно змінною функцією на нескінченності порядку $\theta := (s - s_0)/(s_1 - s_0)$ з $0 < \theta < 1$. Далі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів із функціональним параметром ψ.

Інтерполяцію ізотропних соболєвських просторів та їх зв'язок з уточненою ізотропною шкалою детально вивчено в роботах В. А. Михайлеця та О. О. Мурача [15, 16]. Нам буде потрібна рівність [15] (теорема 3.2)

$$H^{s,\varphi}(a,b) = \big[H^{s_0}(a,b), H^{s_1}(a,b)\big]_\psi, \tag{17}$$

що має місце з точністю до еквівалентності норм.

Подібна інтерполяційна формула виконується і для просторів $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$. Встановимо її.

Лема 1. *У припущенні* (15) *маємо*

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) = \big[H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\big]_\psi \tag{18}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Формулу (18) виведемо з базової рівності [20] (лема 5.1)

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2) = \big[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^2), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^2)\big]_\psi, \tag{19}$$

яка має місце з рівністю норм. Зауважимо, що (19) безпосередньо перевіряється на підставі означення інтерполяції.

З (6) випливає, що пара просторів у правій частині формули (18) є допустимою. Розглянемо оператор R_Ω звуження розподілу $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ в область Ω. Маємо лінійні обмежені сюр'єктивні оператори

$$R_\Omega\colon\ H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^2) \to H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), \qquad R_\Omega\colon\ H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^2) \to H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega), \tag{20}$$

$$R_\Omega\colon\ H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2) \to H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega). \tag{21}$$

Застосувавши інтерполяцію з параметром ψ у формулі (20), отримаємо обмежений оператор

$$R_\Omega\colon\ \left[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^2),H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^2)\right]_\psi \to [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_\psi\,.$$

Це в сукупності з рівністю (19) дає обмежений оператор

$$R_\Omega\colon\ H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)\to [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_\psi\,.$$

Звідси, оскільки оператор (21) сюр'єктивний, маємо

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)\subseteq [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_\psi\,. \tag{22}$$

Доведемо тепер обернене включення та його неперервність.

Існує лінійний обмежений оператор продовження (див. [29], п. 9.6) $T_\Omega\colon L_2(\Omega)\to L_2(\mathbb{R}^2)$, звуження якого на $H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Omega)$ визначає обмежений оператор

$$T_\Omega\,:H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Omega)\to H^{\sigma,\sigma\gamma}(\mathbb{R}^2)$$

для довільних натуральних σ і $\sigma\gamma$. Виходячи з цього, припустимо додатково, що всі s_0, s_1, $s_0\gamma$ та $s_1\gamma$ є цілими невід'ємними числами. Розглянемо оператори T_Ω з $\sigma=s_0$ та $\sigma=s_1$. Оскільки ψ є інтерполяційним параметром, то з цього випливає обмеженість оператора

$$T_\Omega\colon\ [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_\psi\to \left[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^2),H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^2)\right]_\psi\,.$$

Звідси, враховуючи (19), маємо лінійний обмежений оператор

$$T_\Omega\colon\ [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_\psi\to H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2). \tag{23}$$

Добуток обмежених операторів (21) та (23) дає обмежений тотожний оператор

$$I=R_\Omega T_\Omega\colon\ [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_\psi\to H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega).$$

Таким чином, поряд з включенням (22) має місце обернене до нього неперервне вкладення. Отже, справедлива рівність просторів (18). А за теоремою Банаха про обернений оператор норми в цих просторах еквівалентні. Таким чином, лему доведено з додатковим припущенням, що всі s_0, s_1, $s_0\gamma$ та $s_1\gamma$ є цілими невід'ємними числами. Для зняття цього обмеження поширимо дію оператора T_Ω на простори $H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Omega)$ з довільним дійсним $0\le\sigma\le p$, де довільне $p>0$.

Нехай число $k\in\mathbb{N}$ таке, що $k\ge p$ і $k\gamma\in\mathbb{N}$. Розглянемо оператори T_Ω з $\sigma=0$ та $\sigma=k$. Оскільки ψ є інтерполяційним параметром, то з цього випливає обмеженість оператора

$$T_\Omega\colon\ \Big[L_2(\Omega),H^{k,k\gamma}(\Omega)\Big]_\psi\to\Big[L_2(\mathbb{R}^2),H^{k,k\gamma}(\mathbb{R}^2)\Big]_\psi\,. \tag{24}$$

Покладемо у рівностях (18) та (19) $\varphi=1$, $s_0=0$, $s_1=k$. Тоді з них та з (24) маємо для довільних дійсних $\sigma\in(0,k)$ лінійний обмежений оператор

$$T_\Omega\colon H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Omega)\to H^{\sigma,\sigma\gamma}(\mathbb{R}^2). \tag{25}$$

Повторюючи доведення включення, оберненого до (22), і використовуючи при цьому оператор (25) для $p\ge s_1$, завершуємо доведення леми.

Лему доведено.

У формулах (10), (11) та (14) фігурують сліди розподілів із просторів $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ та $H^{s,\varphi}(a,b)$ та їх узагальнених похідних. Обґрунтуємо існування цих слідів.

Нехай задано дійсне число $s > 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і x_0 — довільна точка відрізка $[a,b]$. Тоді для довільного $w \in H^{s,\varphi}(a,b)$ визначено $w(x_0) \in \mathbb{C}$. Цей факт випливає з наступних міркувань. Для довільних параметрів $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ має місце компактне і щільне вкладення [15] (теорема 3.3)

$$H^{s,\varphi}(a,b) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(a,b). \tag{26}$$

При $s > 1/2$, вибравши $\varepsilon > 0$ так, щоб $s - \varepsilon > 1/2$, з вкладень (26) та $H^{s-\varepsilon}(a,b) \subset C[a,b]$ отримаємо, що всі функції з простору $H^{s,\varphi}(a,b)$ є неперервними на $[a,b]$.

Нехай задано натуральне число k. Тоді [15] (теорема 4.1) для довільних дійсного числа $s > k$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ розподіл $w \in H^{s,\varphi}(a,b)$ має узагальнену похідну $w^{(k)} \in H^{s-k,\varphi}(a,b)$.

Наступна лема показує існування необхідних слідів на основі G функцій з анізотропного простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$.

Лема 2. *Нехай задано довільне ціле число $k \geq 0$. Для довільних дійсного $s > 2k+1$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ лінійне відображення*

$$v \mapsto v_t^{(k)} \restriction_{\overline{G}}, \quad v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{27}$$

продовжується по неперервності до обмеженого оператора

$$R_G^{(k)} : H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \to H^{s-2k-1,\varphi}(0,l).$$

Доведення. У випадку $\varphi \equiv 1$ (простори Соболєва) твердження леми є відомим [25] (теорема 7). Звідси загальний випадок $\varphi \in \mathcal{M}$ виведемо за допомогою інтерполяції. Виберемо s_0 так, щоб $2k+1 < s_0 < s$. Маємо лінійні обмежені оператори

$$R_G^{(k)} : H^{s_j,s_j\gamma}(\Omega) \to H^{s_j-2k-1}(0,l) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{0,1\}.$$

Застосувавши тут інтерполяцію з функціональним параметром ψ, отримаємо обмежений оператор

$$R_G^{(k)} : \left[H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\right]_\psi \to \left[H^{s_0-2k-1}(0,l), H^{s_1-2k-1}(0,l)\right]_\psi. \tag{28}$$

Оператор (28) буде розширенням по неперервності відображення (27), оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною в області визначення (28). Із (28) і рівностей (17) та (18) випливає твердження леми.

Лему доведено.

Встановимо подібні до (17) та (18) інтерполяційні формули для просторів $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ і $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, до яких належать праві частини розглядуваних задач.

Як видно з викладеного вище, теореми 1 та 2 мають місце не для всіх значень $s > 2$. Для кожної з задач введемо в розгляд інтервали, на які розбивають промінь $(2,\infty)$ вилучені значення s:

$$D_0 = (2, 7/2), \quad D_r = (2r + 3/2, 2r + 7/2) \quad \text{для всіх} \quad r \in \mathbb{N},$$

$$N_0 = (2, 5/2), \quad N_r = (2r + 1/2, 2r + 5/2) \quad \text{для всіх} \quad r \in \mathbb{N}.$$

Наступну лему і теореми 1, 2 будемо доводити у припущенні, що s належить одному з введених інтервалів.

Лема 3. *Нехай задано довільні $r \in \mathbb{N}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. У припущенні $s_0 < s < s_1$ справджуються рівності*

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} = \big[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi \qquad \textit{при} \quad s_0, s, s_1 \in D_{r-1} \tag{29}$$

та

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} = \big[\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_{\mathrm{N}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi \qquad \textit{при} \quad s_0, s, s_1 \in N_{r-1} \tag{30}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Ідея доведення формул (29) та (30) полягає у використанні твердження 2. Доведемо спочатку формулу (29).

Інтерполяційна формула

$$\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} = \big[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi \tag{31}$$

випливає з твердження 3 та формул (17), (18):

$$\big[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi =$$

$$= \big[H^{s_0-2,(s_0-2)/2}(\Omega) \oplus \big(H^{s_0/2-1/4}(0,\tau)\big)^2 \oplus H^{s_0-1}(0,l),$$

$$H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega) \oplus \big(H^{s_1/2-1/4}(0,\tau)\big)^2 \oplus H^{s_1-1}(0,l)\big]_\psi =$$

$$= \big[H^{s_0-2,(s_0-2)/2}(\Omega), H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega)\big]_\psi \oplus \big(\big[H^{s_0/2-1/4}(0,\tau), H^{s_1/2-1/4}(0,\tau)\big]_\psi\big)^2 \oplus$$

$$\oplus \big[H^{s_0-1}(0,l), H^{s_1-1}(0,l)\big]_\psi =$$

$$= H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega) \oplus \big(H^{s/2-1/4,\varphi}(0,\tau)\big)^2 \oplus H^{s-1,\varphi}(0,l) = \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}. \tag{32}$$

Побудуємо лінійний оператор $P^{(r)}$, який для довільного $\sigma \in D_{r-1}$ буде проектором простору $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$ на його підпростір $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$.

Нехай задано набір комплексних чисел $\{z_0, z_1, \ldots, z_{r-1}\}$ і дійсне число $t_0 \in [a,b]$. Розглянемо відображення

$$\{z_0, z_1, \ldots, z_{r-1}\} \mapsto w(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z_k (t-t_0)^k}{k!}, \tag{33}$$

яке визначає лінійний обмежений оператор продовження

$$T_{t_0}^{(r)} : \mathbb{C}^r \to H^{s,\varphi}(a,b) \tag{34}$$

для довільних $s \in \mathbb{R}$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Обмеженість $T_{t_0}^{(r)}$ легко перевіряється:

$$||T_{t_0}^{(r)}(z_0, z_1, \ldots, z_{r-1})||^2_{H^{s,\varphi}(a,b)} =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z_k (t-t_0)^k}{k!} \right\|^2_{H^{s,\varphi}(a,b)} \leq \sum_{k=0}^{r-1} |z_k|^2 \frac{||(t-t_0)^k||^2_{H^{s,\varphi}(a,b)}}{(k!)^2} \leq c \sum_{k=0}^{r-1} |z_k|^2.$$

З побудови $T_{t_0}^{(r)}$ випливає, що для $w = T_{t_0}^{(r)}(z_0, z_1, \ldots, z_{r-1})$ виконується $w^{(k)}(t_0) = z_k$ для всіх $k \in \{0, \ldots, r-1\}$.

Розглянемо відображення $P^{(r)} \colon (f, g_0, g_1, h) \mapsto (f, g_0^*, g_1^*, h)$ з $(f, g_0, g_1, h) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$. Тут

$$g_j^* = g_j + T_0^{(r)}\big(c_{j,0}(f,h) - g_j^{(0)}(0), \ldots, c_{j,r-1}(f,h) - g_j^{(r-1)}(0)\big) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{0,1\}. \tag{35}$$

Зауважимо, що для довільного $\sigma \in D_{r-1}$ виконується $r - 1 = [\sigma/2 - 3/4]$. Оператор $P^{(r)}$ буде шуканим проектором. Він є лінійним обмеженим оператором на $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$. З його побудови випливає, що $P^{(r)}(f, g_0, g_1, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$ для довільного $(f, g_0, g_1, h) \in \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$. Більш того, якщо $(f, g_0, g_1, h) \in \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{\sigma-2,(\sigma-2)/2}$, то $P^{(r)}(f, g_0, g_1, h) = (f, g_0, g_1, h)$. Дійсно, в цьому випадку виконуються умови (11). З них та (35) випливає, що $g_0^* = g_0$ і $g_1^* = g_1$.

Оскільки проектор $P^{(r)}$ задано, ми можемо використати твердження 2 та формулу (31) і записати

$$\big[\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi = \big[\mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2} =$$

$$= \mathcal{H}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2} = \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}.$$

Рівність (30) доводиться за тією ж схемою, що і (29), з відповідними замінами просторів $\mathcal{H}_{\mathrm{D}}$ та $\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}$ на простори $\mathcal{H}_{\mathrm{N}}$ та $\mathcal{Q}_{\mathrm{N}}$, інтервалу D_{r-1} на N_{r-1}, сталих $c_{j,k}(f,h)$ на $c^1_{j,k}(f,h)$.

Лему доведено.

Перейдемо до доведення основних результатів.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $s \in D_{r-1}$ для деякого $r \in \mathbb{N}$. Виберемо такі числа $s_0, s_1 \in \in D_{r-1}$, що $s_0 < s < s_1$. Завдяки згаданій вище теоремі Лiонса – Мадженеса маємо ізоморфізми у просторах Соболєва

$$\Lambda_{\mathrm{D}} \colon H^{s_j, s_j/2}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_j-2,(s_j-2)/2} \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{36}$$

Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до (36), отримаємо ще один ізоморфізм

$$\Lambda_{\mathrm{D}} \colon \big[H^{s_0,s_0/2}(\Omega), H^{s_1,s_1/2}(\Omega)\big]_\psi \leftrightarrow [\mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_0-2,(s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_{\mathrm{D}}^{s_1-2,(s_1-2)/2}]_\psi. \tag{37}$$

Цей ізоморфізм є розширенням по неперервності відображення (8), оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною в області визначення (37). Застосувавши у (37) інтерполяційні формули (29) та (31), отримаємо (9).

Теорему доведено.

Як і у випадку з рівністю (30), теорема 2 доводиться за тією ж схемою, що і теорема 1.

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.

2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. II. – xi + 242 p.
4. *Житарашу Н. В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И. Г. Петровскому уравнения // Мат. сб. – 1985. – **128(170)**, № 4. – С. 451 – 473.
5. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.
6. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial Different. Equat., VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.
7. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
8. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
9. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
10. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – xi + 306 p.
11. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
13. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold. // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hoŕmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xii + 297 p.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
17. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
18. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.)
19. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
20. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 146 – 160.
21. *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219 – 234.
22. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.
23. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
24. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
25. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленинград. гос. пед. ин-та. – 1958. – **197**. – С. 54 – 112.
26. *Солонников В. А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Труды Мат. ин-та СССР. – 1964. – **70**. – С. 133 – 212.
27. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces // Grundlehren мath. Wiss. – Berlin: Springer, 1976. – Bd 223.
28. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. – 2nd ed. – Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995.
29. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. –480 с.
30. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Одержано 14.10.14