УДК 517.919

И. И. Старун

О построении решений систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка

1. В настоящей заметке указан метод построения решений систем вида

$$\varepsilon^2 A(t,\varepsilon)\ddot{x} + B(t,\varepsilon)x = f(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\cdot\theta(t)), \tag{1}$$

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\nu_1}\varepsilon^s A_s(t), \quad B(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\nu_2}\varepsilon^s B_s(t), \quad f(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\nu_3}\varepsilon^s f_s(t), \tag{2}$$

$t\in[0,\ T]$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0<1$, $0\leqslant\nu_k<\infty$, $k=\overline{1,\ 3}$, отличный от методов из [1—3]. При этом, как и в [3, 5, 6], отсутствует требование симметричности матриц $A_0(t)$, $B_0(t)$. Предлагаемый метод основан на идее приведения пучка матриц к каноническому виду [4]. Здесь мы ограничимся простейшим случаем — случаем регулярного пучка $|\det(A_0(t)w + B_0(t)) \not\equiv 0|$, когда вид решений определяется корнями характеристического уравнения

$$\det(A_0(t)w + B_0(t)) = 0. \tag{3}$$

Сформулируем легко доказываемое на основании леммы 1 из [2] утверждение.

Лемма. *Если* $A_0(t)$, $B_0(t)\in C^m_{[0;T]}$, $\det A_0(t)\neq 0$, *корни уравнения* (3) *сохраняют постоянную кратность на* $[0;\ T]$, *то*:

1) *на отрезке* $[0,\ T]$ *эти корни имеют непрерывные производные до порядка* m *включительно*;

2) *существуют неособенные матрицы* $P(t)$ *и* $Q(t)$, *приводящие пучок* $A_0(t)w + B_0(t)$ *к каноническому виду, при этом* $P(t)$, $Q(t)\in C^m_{[0;T]}$.

В дальнейшем предполагаем $\det A_0(t)\neq 0$.

2. Рассмотрим сначала однородную систему

$$\varepsilon^2 A(t,\varepsilon)\ddot{x} + B(t,\varepsilon)x = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если* $A_s(t)$, $B_s(t)\in C^\infty_{[0;T]}$, *уравнение* (3) *имеет простые отличные от нуля корни* $w_1(t),\ \ldots,\ w_n(t)$, *то формальные частные решения системы* (4) *имеют вид*

$$x = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-2}\int_0^t\lambda_k(\tau)\,d\tau\right), \tag{5}$$

где $u(t,\varepsilon)$ — *n-мерный вектор, представимый формальным рядом*

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_s(t), \tag{6}$$

а $\lambda_k(t) = (w_k(t))^{1/2} = (|w_k(t)|)^{1/2} \exp(2^{-1} \arg w_k(t) + m\pi)$, $m = 0, 1$, $k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Для каждой из функций $\lambda_k(t)$ имеем два значения, следовательно, формулой (5) определяются $2n$ частных решений. Метод доказательства теоремы состоит в определении функций $u_s(t)$ ряда (6). С этой целью подставим (5) в (4) и придем к формальному тождеству

$$(A(t, \varepsilon) w_k(t) + B(t, \varepsilon)) u(t, \varepsilon) = -\varepsilon A(t, \varepsilon)(\dot{\lambda}_k u(t, \varepsilon) + \\ + \lambda_k(t) \dot{u}(t, \varepsilon) + \varepsilon \ddot{u}(t, \varepsilon)). \tag{7}$$

Сравнив здесь коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к системе уравнений

$$(A_0 w_k + B_0) u_0 = 0, \tag{8}$$

$$(A_0 w_k + B_0) u_1 = -Hu_0 - \lambda_k A_0 \dot{u}_0, \tag{9}$$

$$(A_0 w_k + B_0) u_s = \varphi_s - Hu_{s-1} - \lambda_k A_0 \dot{u}_{s-1}, \quad s = 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

где

$$H = A_1 w_k + B_1 + \dot{\lambda}_k A_0, \quad \varphi_s = -\left(\sum_{j=2}^{s} (A_j w_k + B_j) u_{s-j} + \right. \\ \left. + \dot{\lambda}_k \sum_{j=1}^{s-1} A_j u_{s-1-j} + \lambda_k \sum_{j=1}^{s-1} A_j \dot{u}_{s-1-j} + \sum_{j=0}^{s-2} A_j \ddot{u}_{s-j-2} \right) \tag{11}$$

(аргументы в (8)—(11) опущены).

Согласно [4] существуют неособенные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие, что

$$P(t)(A_0(t) w + B_0(t)) Q(t) = wE - w(t), \tag{12}$$

где

$$w(t) = \operatorname{diag}\{w_1(t), \ldots, w_n(t)\}. \tag{13}$$

Из (12) имеем

$$A_0 = P^{-1} Q^{-1}, \quad B_0 = -P^{-1} W Q^{-1}. \tag{14}$$

Подставляя эти значения в (8) — (10) и вводя обозначения

$$V = -PH, \quad \psi_s = P\varphi_s, \quad q_s = Q^{-1} u_s, \tag{15}$$

получаем

$$(w_k E - W) q_0 = 0, \tag{16}$$

$$(w_k E - W) q_1 = V q_0 - \lambda_k \dot{q}_0, \tag{17}$$

$$(w_k E - W) q_s = \psi_s + V q_{s-1} - \lambda_k \dot{q}_{s-1}, \quad s = 2, 3, \ldots. \tag{18}$$

Система (16) — (18) легко разрешима. Из (16) находим

$$q_0 = \operatorname{colon}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, (q_0)_k, 0, \ldots, 0), \tag{19}$$

где $(q_0)_k$ — элемент, определяемый из (17). Действительно, k-е уравнение в (17) имеет вид $v_{kk}(q_0)_k - \lambda_k (\dot{q}_0)_k = 0$. Отсюда

$$(q_0)_k = c_k \exp\left(\int_0^t (v_{kk}(\tau)/\lambda_k(\tau))\, d\tau \right), \quad c_k = \text{const}. \tag{20}$$

Тогда

$$(q_1)_j = v_{jk}/(w_k - w_j), \quad j = \overline{1, n}, \ j \neq k, \tag{21}$$

элемент $(b_1)_k$ определяется из (18) при $s = 2$. Если векторы $q_0, \ldots, q_{s-1}$, за исключением элемента $(q_{s-1})_k$, определены, то из (18) находим

$$(q_s)_j = \left[(\psi_s)_j + \sum_{i=1}^{n} v_{ji} (q_{s-1})_i - \lambda_k (\dot{q}_{s-1})_j \right] / (w_k - w_j), \quad j = \overline{1, n}, \ j \neq k, \tag{22}$$

и определяем элемент $(q_{s-1})_k$ из уравнения

$$(\psi_s)_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} v_{ki}(q_{s-1})_i + v_{kk}(q_{s-1})_k - \lambda_k(\dot{q}_{s-1})_k = 0. \tag{23}$$

Этим самым теорема доказана.

3. Для неоднородной системы (1) имеют место теоремы.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, $f_s(t)\in C^{\infty}_{[0;T]}$, *то в «нерезонансном» случае, т. е. когда* $k^2(t)\equiv(\dot\theta(t))^2\neq w_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, *частное решение системы* (1) *имеет структуру правой части уравнения, а именно*

$$x=\varphi(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t)),\quad \varphi(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\varphi_s(t). \tag{24}$$

Доказательство. Подставляя (24) в (1) и сравнивая коэффициенты при ε^s, получаем систему

$$(A_0k^2+B_0)\varphi_s=g_s,\qquad s=0,1,2,\ldots, \tag{25}$$

где

$$g_s=f_s-\sum_{j=1}^{s}(k^2A_j+B_j)\varphi_{s-j}-\sum_{j=0}^{s-2}A_j\ddot{\varphi}_{s-j-2}-$$
$$-\sum_{j=0}^{s-1}A_j(\dot{k}\varphi_{s-j-1}+2k\dot{\varphi}_{s-j-1}). \tag{26}$$

Из (25) находим

$$\varphi_s=(A_0k^2+B_0)^{-1}g_s,\qquad s=0,1,2,\ldots. \tag{27}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы* 1, $f_s(t)\in C^{\infty}_{[0;T]}$, *то в «резонансном» случае, т. е. когда*

$$k^2(t)\equiv w_p(t),\quad k^2(t)\neq w_j(t),\qquad j=\overline{1,n},\ j\neq p, \tag{28}$$

система (1) *имеет частное решение вида*

$$x=\psi(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t)),\quad \psi(t,\varepsilon)=\sum_{s=-1}^{\infty}\varepsilon^s\psi_s(t). \tag{29}$$

Доказательство. Подставив (29) в (1) и сравнив коэффициенты при ε^s, придем к системе

$$(A_0k^2+B_0)\psi_{-1}=0,$$
$$(A_0k^2+B_0)\psi_0=f_0-(A_1k^2+B_1+\dot{k}A_0)\psi_{-1}-2kA_0\dot{\psi}_{-1}, \tag{30}$$
$$(A_0k^2+B_0)\psi_s=g_s-(A_1k^2+B_1+\dot{k}A_0)\psi_{s-1}-2kA_0\dot{\psi}_{s-1},$$
$$s=1,2,\ldots,$$

$$g_s=f_s-\sum_{j=2}^{s}(k^2A_j+B_j)\psi_{s-j}-\sum_{j=1}^{s-1}A_0(\dot{k}\psi_{s-j-1}+2k\dot{\psi}_{s-j-1})-\sum_{j=0}^{s-2}A_j\ddot{\psi}_{s-j-2}. \tag{31}$$

Учитывая (12), (14), систему (30) перепишем в виде

$$(k^2E-W)e_{-1}=0,$$
$$(k^2E-W)e_0=h_0-Re_{-1}-2k\dot{e}_{-1}, \tag{32}$$
$$(k^2E-W)e_s=h_s-Re_{s-1}-2k\dot{e}_{s-1},\qquad s=1,2,\ldots,$$

где

$$h_s = Pf_s, \quad e_s = Q^{-1}\psi_s, \quad R = P(k^2A_1 + B_1 + \dot{k}A_0)Q + 2kQ^{-1}\dot{Q}. \tag{33}$$

Из (32) находим

$$e_{-1} = \operatorname{colon}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p-1}, (e_{-1})_p, 0, \ldots, 0), \tag{34}$$

элемент же $(e_{-1})_p$ определяется из второго уравнения системы (32). Действительно, взяв в нем p-е скалярное уравнение, получим дифференциальное уравнение

$$2k(\dot{e}_{-1})_p + r_{pp}(e_{-1})_p = (h_0)_p. \tag{35}$$

Отсюда можно легко определить неизвестный элемент $(e_{-1})_p$. Имеем

$$(e_0)_j = (k^2 - w_j)^{-1}((h_0)_j - r_{jp}(e_{-1})_p), \qquad j = \overline{1, n}, \ j \neq p, \tag{36}$$

элемент же $(e_0)p$ определяется на следующем шаге из уравнения типа (35). Аналогично находятся и остальные векторы e_s.

Теорема доказана.

4. Пусть уравнение (3) имеет корень $w = w_0(t)$ кратности n, которому соответствует кратный элементарный делитель той же кратности. Тогда пучок матриц $A_0(t)\,\omega + B_0(t)$ приведется [4] к виду

$$P(t)(A_0(t)\,w + B_0(t))\,Q(t) = (w - w_0(t))\,E + J, \tag{37}$$

где

$$J = (\gamma_{ij})_1^n, \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1, \end{cases} \qquad i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 4. *Если $A_s(t), B_s(t) \in C^{\infty}_{[0,T]}$, уравнение* (3) *имеет корень $w = w_0(t) \neq 0$ кратности n, которому соответствует кратный элементарный делитель той же кратности, а матрица*

$$C(t) = 2\lambda_0(t)\,Q^{-1}(t)\,\dot{Q}(t) + P(t)(A_1(t)\,w_0(t) + B_1(t))\,Q(t) \tag{38}$$

такова, что ее элемент $c_{n1}(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, то формальное частное решение системы (4) *имеет вид*

$$x = u(t, \mu)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda(\tau, \mu)\,d\tau\right), \tag{39}$$

где

$$u(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(t), \quad \lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \lambda_k(t), \quad \mu = \varepsilon^{1/n},$$

$$\lambda_0(t) = (w_0(t))^{1/2}. \tag{40}$$

Доказательство. Подставляя (39) в (4) и сравнивая коэффициенты при μ^s, $s = 0, 1, \ldots$, придем к системе

$$(A_0w_0 + B_0)\,u_0 = 0,$$

$$(A_0w_0 + B_0)\,u_s = -A_0\left(u_0\sum_{j=0}^{s}\lambda_j\lambda_{s-j} + u_1\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j\lambda_{s-1-j} + \ldots + u_{s-1}2\lambda_0\lambda_1\right),$$

$$s = \overline{1, n-1},$$

$$(A_0w_0 + B_0)\,u_n = -A_0\left(u_0\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\lambda_{n-j} + \ldots + u_{n-1}2\lambda_0\lambda_1\right) -$$

$$-A_0(2\lambda_0\dot{u}_0 + \dot{\lambda}_0u_0) - (A_1w_0 + B_1)\,u_0, \tag{41}$$

. . . .

Учитывая (37) и (14), а также вводя обозначение $q_s = Q^{-1}u_s$, систему (41) можно переписать так:

$$Jq_0 = 0, \tag{42}$$

$$Jq_s = -\left(q_0 \sum_{j=0} \lambda_j \lambda_{s-j} + \dots + q_{s-1} 2\lambda_0\lambda_1\right), \qquad s = \overline{1, n-1}, \tag{43}$$

$$Jq_n = -\left(q_0 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \lambda_{n-j} + \dots + q_{n-1} 2\lambda_0\lambda_1\right) - C(t)\, q_0 - \dot{\lambda}_0 q_0 - 2\lambda_0 \dot{q}_0, \tag{44}$$

$$Jq_{n+1} = -\left(q_0 \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j \lambda_{n+1-j} + \dots + q_n 2\lambda_0\lambda_1\right) - C(t)\, q_1 - f_1, \tag{45}$$

. . . .

где

$$f_1 = (2Q^{-1}\dot{Q}\lambda_1 + 2PA_1Q\lambda_0\lambda_1 + \dot{\lambda}_1)\, q_0 + \dot{q}_0\lambda_1 + 2\dot{q}_1\lambda_0 + q_1\dot{\lambda}_0.$$

Элементы $(q_s)_1$, $s = \overline{0, n-1}$, выбираем следующим образом:

$$(q_0)_1 = 1, \quad (q_s)_1 = 0, \quad s = \overline{1, n-1}. \tag{46}$$

Тогда компоненты векторов q_s, $s = \overline{1, n-1}$, будут определяться через функции λ_s, $s = \overline{0, n-1}$ [2]. Первые же компоненты остальных векторов q_s, $s = n, n+1, \dots$, оставляем неопределенными, их находим на $2n$, $2n+1, \dots$ шаге из дифференциальных уравнений типа (35). Следовательно, остается определить функции λ_s, $s = \overline{1, n-1}$, для чего надо рассмотреть последнее скалярное уравнение в (44), (45) и т. д. Пользуясь методом из [1, 2], из (44) находим $(-2\lambda_0\lambda_1)^n = c_{n1}$. Отсюда

$$\lambda_1 = -(2\lambda_0)^{-1}(c_{n1})^{1/n} = -(2\lambda_0)^{-1}(|c_{n1}|)^{1/n} \exp[(\arg c_{n1} + 2k\pi)/n], \qquad k = \overline{1, n}. \tag{47}$$

Из (45) получаем

$$n(-2\lambda_0\lambda_1)^{n-1}(2\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1^2) - (f_1)_n = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_2 = 1/2\lambda_0\, [(f_1)_n / n(-2\lambda_0\lambda_1)^{n-1} - \lambda_1^2] \tag{48}$$

и т. д.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если выполняются условия теоремы* 6, $f_s(t) \in C^\infty_{[0,T]}$, *то в случае «нерезонанса»* $(k^2(t) \neq w_0(t))$ *частное решение системы* (1) *имеет вид* (24), *а в случае «резонанса»* $(k^2(t) \equiv w_0(t))$ — *вид* (29) *при условии, что элемент* $r_{n1}(t)$ *матрицы* $R(t)$ *из* (33) *отличен от нуля.*

Доказательство. Доказательство теоремы в «нерезонансном» случае такое же, как и теоремы 3. В «резонансном» случае система (32) имеет вид

$$\begin{aligned} Je_{-1} &= 0, \\ Je_s &= h_s - Re_{s-1} - 2k\dot{e}_{s-1}, \qquad s = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{49}$$

Из первого уравнения находим

$$e_{-1} = \operatorname{colon}((e_{-1}), 0, \dots, 0).$$

Элемент $(e_{-1})_1$ определяем из последнего скалярного уравнения системы при $s = 0$, а именно из уравнения $(h_0)_n - r_{n1}(e_{-1})_1 = 0$, т. е. $(e_{-1})_1 = (q_0)_n / r_{n1}$. Аналогично первый элемент $(e_s)_1$ вектора e_s определяется из уравнения $(h_{s+1})_n - r_{n1}(e_s)_1 - \sum_{j=2} r_{nj}(e_s)_j = 0$, в котором элементы $(e_s)_j$, $j = \overline{2, n}$, известны.

Теорема доказана.

5. Обозначим через $x_m(t, \varepsilon)$ m-е приближение решения $x(t, \varepsilon)$ $\Bigl($например, $x_m(t, \varepsilon) = \left(\sum\limits_{k=0}^{m} \varepsilon^k u_k(t) \exp \varepsilon^{-1} \int\limits_0^t \lambda_k(\tau)\, d\tau\right)$ из теоремы 1$\Bigr)$. Тогда методами из [1, 2] можно показать, что если $x(0, \varepsilon) = x_m(0, \varepsilon)$, $\dot{x}(0, \varepsilon) = \dot{x}_m(0, \varepsilon)$ и выполняются соответственно условия $w_k(t) < 0$, $k = \overline{1, n}$, $w_0(t) < 0$, $\operatorname{Re} \lambda(t, \mu) \leqslant 0$, то имеют место асимптотические оценки

$$\| x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^{\alpha}, \quad \| \dot{x}(t, \varepsilon) - \dot{x}_m(t, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^{\alpha},$$

где $\alpha = m$ — для решений из теорем 1,2; $\alpha = m - 1$ — для решения из теоремы 3; $\alpha = (m+1)/n - 1$ — для решений из теорем 4, 5 (в случае «нерезонанса») и $\alpha = (m+1)/n - 2$ — для решения из теоремы 5 в случае «резонанса».

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К.: Вища школа, 1971.— 228 с.
3. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Асимптотические решения системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. К.: Пед. ин-т, 1979, с. 133—147.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с.
5. *Сотниченко Н. А., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование некоторых систем линейных уравнений в частных производных.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 2, с. 187—193.
6. *Шкиль Н. И.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка.—В кн.: IX Междунар. конф. по нелин. колебаниям. Тез. докл.—К. Ин-т матем. АН УССР, 1981, с. 371.

Гомель. гос. ун-т

Поступила в редакцию 28.03.1983