УДК 517.512

К. М. Слепенчук

Об условиях обратимости в теории сильной суммируемости в степени p рядов

Преобразуем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

с помощью матрицы $\Gamma = \| \gamma_k(x) \|$ $(\Gamma = \| \gamma_{nk} \|)$ следующим образом:

$$\Gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x) u_k \qquad \left(\Gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} u_k \right),$$

при условии, что ряды сходятся в $D\{a \leqslant x < \infty\}$ или для $n > n_0$.

Ряд (1) (*последовательность* $\{S_n\}$) *сильно сходится в степени* $p \geqslant 1$ *к* S, *если* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$ $(S_n \to S,\ n \to \infty)$ *и при* $n \to \infty$

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} k^p |u_k|^p = o(1) \qquad \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} k^p |\Delta S_k|^p = o(1) \right), \tag{2}$$

$\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$, *и сильно сходится в степени* p, *если имеет место* (2).

Ряд (1) $[\Gamma]_p$-*суммируем к* S, $p \geqslant 1$, *если* $\Gamma(x) \to S$, $x \to \infty$ $(\Gamma_n \to S$, $n \to \infty)$ *и при* $\nu \to \infty$

$$\nu^{-1} \int_a^{\nu} x^p \left| \frac{d\Gamma(x)}{dx} \right|^p dx = o(1) \qquad \left(\nu^{-1} \sum_{n=1}^{\nu} n^p |\Delta \Gamma_n|^p = o(1) \right), \tag{3}$$

и $[\Gamma]_p$-*суммируем, если имеет место* (3).

Г-метод, сохраняющий сильную сходимость в степени p ряда (1), будем обозначать через $[\gamma]_p$ [1].

В дальнейшем будем писать $S_n = \Omega^{(p)}(1)$, если $\{S_n\}$ сильно сходится в степени $p \geqslant 1$ к S, и $S_n = \omega^{(p)}(1)$, если $\{S_n\}$ сильно сходится в степени $p \geqslant 1$ к нулю.

В данной статье устанавливаются аналоги теорем из [2—4] на случай сильной суммируемости в степени $p \geqslant 1$.

Лемма 1. *Если* $\alpha_n = \Omega^{(p)}(1)$, $\beta_n = \Omega^{(p)}(1)$, *то* $\alpha_n \beta_n = \Omega^{(p)}(1)$.

Доказательство. Так как

$$\Delta(\alpha_n \beta_n) = \alpha_n \Delta \beta_n + \beta_{n-1} \Delta \alpha_n,$$

то утверждение леммы следует из неравенства

$$\nu^{-1} \sum_{n=1}^{\nu} n^p |\Delta(\alpha_n \beta_n)|^p \leqslant \left\{ \left[O(1)/\nu \sum_{n=1}^{\nu} n^p |\Delta \beta_n|^p \right]^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left[O(1)/\nu \sum_{n=1}^{\nu} n^p |\Delta \alpha_n|^p \right]^{1/p} \right\}^p.$$

Для заданных положительных $\{\lambda_n\}$, $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ введем обозначения:

$$f_n = q_{n-1}/\lambda_n p_n, \qquad g_n = \lambda_n q_n [(\lambda_n p_n)^{-1} - (\lambda_{n+1} p_{n+1})^{-1}], \qquad t_n = q_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k u_k,$$

$$\tau_n = \lambda_n u_n.$$

Теорема 1. *Пусть для* $p \geqslant 1$ *имеют место* 1) $g_n = \Omega^{(p)}(1)$, $f_n = \Omega^{(p)}(1)$, *либо* 2) $g_n = \omega^{(p)}(1)$, $f_n = \Omega^{(p)}(1)$, *либо* 3) $g_n = \Omega^{(p)}(1)$, $f_n = \Omega^{(p)}(1)$.

Если при $n \to \infty$ *соответственно этим соотношениям* 1) $\tau_n = \omega^{(p)}(1)$, *либо* 2) $\tau_n = \omega^{(p)}(1)$, *либо* 3) $\tau_n = \Omega^{(p)}(1)$ — *сильные в степени* p *тауберовы условия для* $[\gamma]_p$-*метода, то соответственно при* $n \to \infty$ 1) $t_n = \omega^{(p)}(1)$, *либо* 2) $t_n = \Omega^{(p)}(1)$, *либо* 3) $t_n = \Omega^{(p)}(1)$ — *также сильные в степени* p *тауберовы условия для* $[\gamma]_p$-*метода*.

Доказательство. В работе [3] доказано, что

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} g_k t_k / \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} u_k^* = S_n - f_{n+1} t_n, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{4}$$

В таком случае

$$\Gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x) \Delta(f_{k+1} t_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x) u_k^* = \sigma_1(x) + \sigma_2(x).$$

Так как доказательства всех трех предложений не отличаются друг от друга, ограничимся доказательством первого из них.

Пусть $\Gamma(x) = \Omega^{(p)}(1)$ и $t_n = \omega^{(p)}(1)$. В силу леммы 1 $f_{n+1} t_n = \omega^{(p)}(1)$. А так как Г-метод является $[\gamma]_p$-методом, то $\sigma_1(x) = \Omega^{(p)}(1)$. В таком случае из неравенства

$$\nu^{-1} \int_a^{\nu} x^p \left| \frac{d\sigma_2(x)}{dx} \right|^p dx \leqslant \left\{ \left[\nu^{-1} \int_a^{\nu} x^p \left| \frac{d\Gamma(x)}{dx} \right|^p dx \right]^{1/p} + \right.$$

$$+\left[\nu^{-1}\int_{1}^{\nu} x^{p}\left|\frac{d\sigma_1(x)}{dx}\right|^{p} dx\right]^{1/p}\Bigg\}^{p}$$

имеем

$$\sigma_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(x)u_k=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(x)\Delta H_k=\Omega^{(p)}(1). \tag{5}$$

Так как по предположению $t_n^*=\lambda_n u_n^*=\omega^{(p)}(1)$ применительно к преобразованию (5) является сильным в степени p тауберовым условием, то

$$\nu^{-1}\sum_{k=1}^{\nu}k^{p}|u_k^*|^{p}=\nu^{-1}\sum_{k=1}^{\nu}k^{p}|\Delta H_k|^{p}=o(1),\quad \nu\to\infty,$$

т. е. $H_n=\Omega^{(p)}(1)$. Следовательно, если воспользоваться леммой 1, $S_n=\Omega^{(p)}(1)$.

Преобразуем двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}u_{kl} \tag{6}$$

с помощью матрицы $\Gamma=\|\gamma_{kl}(x,y)\|$ $(\Gamma=\|\gamma_{kl}^{(mn)}\|)$:

$$\Gamma(x,y)=\sum_{k,l=1}^{\infty}\gamma_{kl}(x,y)u_{kl}\qquad\left(\Gamma_{mn}=\sum_{k,l=1}^{\infty}\gamma_{kl}^{(mn)}u_{kl}\right)$$

при условии, что ряды сходятся в $D\{a\leqslant x<\infty,\ b\leqslant y<\infty\}$ или для $m>m_0$, $n>n_0$.

Двойной ряд (6) (двойная $\{S_{mn}\}$) сильно сходится в степени $p\geqslant 1$ к S, если $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty}u_{kl}=S$ $(S_{mn}\to S,\ m,n\to\infty)$ и при $m,n\to\infty$

$$(mn)^{-1}\sum_{k,l=1}^{m,n}(kl)^{p}|u_{kl}|^{p}=o(1)\qquad\left((mn)^{-1}\sum_{k,l=1}^{m,n}(kl)^{p}|\Delta S_{kl}|^{p}=o(1),\right. \tag{7}$$

$\Delta S_{kl}=S_{kl}-S_{k-1l}-S_{kl-1}+S_{k-1l-1}$), и сильно сходится в степени p, если имеет место (7).

Двойная $\{S_{mn}\}$ сильно сходится в степени $p\geqslant 1$ в узком смысле, если, кроме (7), выполняются условия:

1) $m^{-1}\sum\limits_{k=1}^{m}k^{p}|S_{kl}-S_{k-1l}|^{p}=o(1)$ равномерно относительно l;

2) $n^{-1}\sum\limits_{l=1}^{n}l^{p}|S_{kl}-S_{kl-1}|^{p}=o(1)$ равномерно относительно k.

Двойной ряд (6) $[\Gamma]_p$-суммируем к S, $p\geqslant 1$, если $\Gamma(x,y)\to S$, $x,y\to\infty$ $(\Gamma_{mn}\to S,\ m,n\to\infty)$ и при $\mu,\nu\to\infty$

$$(\mu\nu)^{-1}\int_{1}^{\mu}\int_{b}^{\nu}(xy)^{p}\left|\frac{\partial^2\Gamma(x,y)}{\partial x\partial y}\right|^{p}dxdy=o(1)\quad\left((\mu\nu)^{-1}\sum_{m,n=1}^{\mu,\nu}(mn)^{p}|\Delta\Gamma_{mn}|^{p}=o(1)\right), \tag{8}$$

и $[\Gamma]_p$-суммируем, если имеет место (8).

Матрицу $\|\alpha_{nk}\|$, для которой

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}n/k\,|\Delta_n\alpha_{nk}|=O(1)$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|A_{nk}|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\,|n/k\,|\Delta_n\alpha_{nk}|-n/(k+1)\,|\Delta_n\alpha_{nk}||=O(1)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nk} = 0 \quad k = 1, 2, \ldots$

6) $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta_n \alpha_{nk} = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$

обозначим через $[\gamma]_p$ (при $p = 1$ условие 3) отпадает [5]).

Лемма 2. *Пусть* $\gamma_{kl}^{(mn)} = \gamma_{mk}^{(1)}\gamma_{nl}^{(2)}$, *где* $\|\gamma_{mk}^{(1)}\|$ *и* $\|\gamma_{nl}^{(2)}\|$ — $[\gamma]_p$-*матрицы. Если при* $M, N \to \infty$

$$F_{MN} = (MN)^{-1} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} (kl)^p |u_{kl}|^p = o(1) \quad F_{MN} = O(1),$$

то $\Gamma_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$.

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера при $p > 1$, приняв во внимание 3), находим

$$\sum_{m,n=1}^{M,N} (mn)^p |\Delta\Gamma_{mn}|^p \leqslant \sum_{m,n=1}^{M,N} \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} mn |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}| |u_{kl}| \right)^p =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{M,N} \left\{ \sum_{k,l=1}^{\infty} |mn/kl |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}||^{1/p} kl |u_{kl}| |mn/kl |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}||^{1/q} \right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m,n=1}^{M,N} \sum_{k,l=1}^{\infty} mn/kl |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}| (kl)^p |u_{kl}|^p \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} mn/kl |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}| \right)^{p/q} =$$

$$= O(1) \sum_{m,n=1}^{M,N} \sum_{k,l=1}^{\infty} mn/kl |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}| \Delta(klF_{kl}), \quad 1/p + 1/q = 1.$$

В силу преобразования Харди

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} mn/kl |\Delta\gamma_{kl}^{(mn)}| \Delta(klF_{kl}) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{q-1} \overline{\Gamma}_{mk}^{(1)} \overline{\Gamma}_{nl}^{(2)} F_{kl} + m |\Delta_m \gamma_{mp}^{(1)}| \sum_{l=1}^{q-1} \overline{\Gamma}_{nl}^{(2)} F_{pl} +$$

$$+ n |\Delta_n \gamma_{nq}^{(2)}| \sum_{k=1}^{p-1} \overline{\Gamma}_{mk}^{(1)} F_{kq} + mn |\Delta_m \gamma_{mp}^{(1)}| |\Delta_n \gamma_{nq}^{(2)}| F_{pq},$$

$$\overline{\Gamma}_{mk}^{(1)} = k[m/k |\Delta_m \gamma_{mk}^{(1)}| - m/(k+1) |\Delta_m \gamma_{mk+1}^{(1)}|],$$

$$\overline{\Gamma}_{nl}^{(2)} = l[n/l |\Delta_n \gamma_{nl}^{(2)}| - n/(l+1) |\Delta_n \gamma_{nl+1}^{(2)}|].$$

Отсюда, так как $\|\gamma_{mk}^{(1)}\|$, $\|\gamma_{nl}^{(2)}\|$ суть $[\gamma]_p$-матрицы, имеем

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} mn/kl |\Delta_m \gamma_{mk}^{(1)}| |\Delta_n \gamma_{nl}^{(2)}| |u_{kl}| = \sum_{k,l=1}^{\infty} \overline{\Gamma}_{mk}^{(1)} \overline{\Gamma}_{nl}^{(2)} F_{kl} = \Phi_{mn},$$

$\Phi_{mn} = O(1)$. Так как матрица $\|\Gamma_{mk}^{(1)}\Gamma_{nl}^{(2)}\|$, если принять во внимание 4) и 5), регулярна на классе нуль-последовательностей, то $\Phi_{mn} \to 0$, $m, n \to \infty$. В таком случае

$$(MN)^{-1} \sum_{m,n=1}^{M,N} (mn)^p |\Delta\Gamma_{mn}|^p \leqslant (MN)^{-1} \sum_{m,n=1}^{M,N} \Phi_{mn} \to 0, \quad M, N \to \infty,$$

т. е. ряд (6) $[\Gamma]_p$-суммируем, $p > 1$. Легко видеть, что лемма имеет место и для $p = 1$ [5].

Г-Метод, сохраняющий сильную сходимость в степени $p \geqslant 1$ ряда (6), обозначим через $\{\gamma\}_p$.

Примечание. В случае полунепрерывной матрицы $\|\alpha_k(x)\|$ в условиях 3) — 6) $\Delta_n\alpha_{nk}$ заменяем на $\alpha_k'(x)$.

Лемма 3. *Если* $\alpha_m = \Omega^{(p)}(1)$, $R_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$ *в узком смысле*, $\alpha_m R_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$, $p \geqslant 1$.

Доказательство. Так как $\Delta(\alpha_m R_{mn}) = \Delta\alpha_m (R_{m-1n} - R_{m-1n-1}) + \alpha_m \Delta R_{mn}$, то утверждение леммы следует из неравенства

$$(\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} (mn)^p |\Delta(\alpha_m R_{mn})|^p \leqslant \left\{ \left[O(1) \mu^{-1} \sum_{m=1}^{\mu} m^p |\Delta\alpha_m|^p \right]^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left[O(1) (\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} (mn)^p |\Delta R_{mn}|^p \right]^{1/p} \right\}^p.$$

Для заданных положительных $\{\lambda_m^{(1)}\}$, $\{q_m^{(1)}\}$, $\{p_m^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$, $\{q_n^{(2)}\}$, $\{p_n^{(2)}\}$ введем обозначения:

$$f_m^{(1)} = q_{m-1}^{(1)}/\lambda_m^{(1)} p_m^{(1)}, \qquad g_m^{(1)} = \lambda_m^{(1)} q_m^{(1)} [(\lambda_m^{(1)} p_m^{(1)})^{-1} - (\lambda_{m+1} p_{m+1})^{-1}],$$

$$f_n^{(2)} = q_{n-1}^{(2)}/\lambda_n^{(2)} p_n^{(2)}, \qquad g_n^{(2)} = \lambda_n^{(2)} q_n^{(2)} [(\lambda_n^{(2)} p_n^{(2)})^{-1} - (\lambda_{n+1}^{(2)} p_{n+1}^{(2)})^{-1}],$$

$$\tau_{mn}^{(1)} = \lambda_m^{(1)} \sum_{l=1}^{n} u_{ml}, \qquad \tau_{mn}^{(2)} = \lambda_n^{(2)} \sum_{k=1}^{m} u_{kn},$$

$$p_{mn} = (q_m^{(1)})^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} \lambda_k^{(1)} p_k^{(1)} u_{kl}, \qquad q_{mn} = (q_n^{(2)})^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} \lambda_l^{(1)} p_l^{(1)} u_{kl},$$

$$r_{mn} = (q_m^{(1)} q_n^{(2)})^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} \lambda_k^{(1)} p_k^{(1)} \lambda_l^{(2)} p_l^{(2)} u_{kl}.$$

Теорема 2. *Пусть для* $p \geqslant 1$ имеют место 1) $g_m^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $g_n^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$, $f_m^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $f_n^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$, *либо* 2) $g_m^{(1)} = \omega^{(p)}(1)$, $g_n^{(2)} = \omega^{(p)}(1)$, $f_m^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $f_n^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$, *либо* 3) $g_m^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $g_n^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$, $f_m^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $f_n^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$.

Если при $m, n \to \infty$ *соответственно этим соотношениям* 1) $\tau_{mn}^{(1)} = \omega^{(p)}(1)$, $\tau_{mn}^{(2)} = \omega^{(p)}(1)$, *либо* 2) $\tau_{mn}^{(1)} = \omega^{(p)}(1)$, $\tau_{mn}^{(2)} = \omega^{(p)}(1)$, *либо* 3) $\tau_{mn}^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $\tau_{mn}^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$ — *сильные в степени* p *тауберовы условия для* $[\gamma]_p$*-метода, то соответственно при* $m, n \to \infty$ 1) *в узком смысле* $p_{mn} = \omega^{(p)}(1)$, $q_{mn} = \omega^{(p)}(1)$, $r_{mn} = \omega^{(p)}(1)$, *либо* 2) *в узком смысле* $p_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$, $q_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$, $r_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$, *либо* 3) *в узком смысле* $p_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$, $q_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$, $r_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$ — *также сильные в степени* p *тауберовы условия для* $[\gamma]_p$*-метода.*

Доказательство. Достаточно доказать первое предложение. Итак, пусть $\Gamma(x, y) = \Omega^{(p)}(1)$, $p_{mn} = \omega^{(p)}(1)$, $q_{mn} = \omega^{(p)}(1)$, $r_{mn} = \omega^{(p)}(1)$ в узком смысле. Так как из [4]

$$S_{mn} = H_{mn} + v_{mn}, \qquad H_{mn} = \sum_{k,l=1}^{m,n} q_k^{(1)} q_l^{(2)} r_{kl}/\lambda_k^{(1)} \lambda_l^{(2)}, \quad v_{mn} = f_{m+1}^{(1)} p_{mn} +$$

$$+ f_{n+1}^{(2)} q_{mn} - f_{m+1}^{(1)} f_{n+1}^{(2)} r_{mn}, \qquad \sum_{l=1}^{n} u_{ml}^{*} = q_m^{(1)}/\lambda_m^{(1)} (p_{mn} - f_{n+1}^{(2)} r_{mn}),$$

$$\sum_{k=1}^{m} u_{kn}^{*} = q_n^{(2)}/\lambda_n^{(2)} (q_{mn} - f_{m+1}^{(1)} r_{mn}), \tag{9}$$

то

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y) \Delta H_{kl} + \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y) \Delta v_{kl} = \sigma_1(x, y) + \sigma_2(x, y).$$

В силу леммы 3 $v_{kl} = \omega^{(p)}(1)$. А так как Γ-метод является $[\gamma]_p$-методом, то $\sigma_2(x, y) = \Omega^{(p)}(1)$. В таком случае

$$\sigma_1(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y) \Delta H_{kl} = \Omega^{(p)}(1). \tag{10}$$

Если применить ту же лемму 3, то $R_{mn}^{(1)} = p_{mn} - f_{n+1}^{(2)} r_{mn} = \omega^{(p)}(1)$, а следовательно, $g_m^{(1)} R_{mn}^{(1)} = \omega^{(p)}(1)$ и $q_n^{(2)}(q_{mn} - f_{m+1}^{(1)} r_{mn}) = q_m^{(2)} R_{mn}^{(2)} = \omega^{(p)}(1)$. Тогда

$$\bar{\tau}_{mn}^{(1)} = q_m^{(1)} R_{mn}^{(1)} = \omega^{(p)}(1), \qquad \bar{\tau}_{mn}^{(2)} = g_n^{(2)} R_{mn}^{(2)} = \omega^{(p)}(1). \tag{11}$$

Так как по предположению (11) применительно к преобразованию (10) являются сильными в степени p тауберовыми условиями, то $H_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$. Следовательно, если воспользоваться (9), $S_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$. В связи с этим представляет интерес выделить те классы $[\gamma]_p$-методов, для которых $\tau_n = \Omega^{(p)}(1)$ или $\tau_{mn}^{(1)} = \Omega^{(p)}(1)$, $\tau_{mn}^{(2)} = \Omega^{(p)}(1)$ являются сильными в степени p тауберовыми условиями. Эта задача для простых рядов решена в [6].

$[\gamma]_p$-Метод, для которого

7) сходятся ряды $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \gamma_{mi}^{(1)}/\lambda_i^{(1)}$, $\sum\limits_{i=l}^{\infty} \gamma_{ni}^{(2)}/\lambda_i^{(2)}$, $m, n = 1, 2, \ldots$;

8) матрицы $\| \Gamma_{mk}^{(1)} \|$ и $\| \Gamma_{nl}^{(2)} \|$, члены которых

$$\Gamma_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} \gamma_{mi}^{(1)}/\lambda_i^{(1)} - \sum_{i=k}^{m} 1/\lambda_i^{(1)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \qquad \Gamma_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} \gamma_{mi}^{(1)}/\lambda_i^{(1)}, \quad k > m,$$

$$\Gamma_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} \gamma_{ni}^{(2)}/\lambda_i^{(2)} - \sum_{i=l}^{n} 1/\lambda_i^{(2)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \quad \Gamma_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} \gamma_{ni}^{(2)}/\tau_i^{(2)}, \quad l > n,$$

являются $[\gamma]_p$-матрицами, обозначим через $[\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)]_p$.

Теорема 3. *Если двойной ряд* (6) $[\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)]_p$-*суммируем*, $p \geqslant 1$, *то он сильно сходится в степени* p, *если при* $m, n \to \infty$

$$F_{mn}^{(1)} = (mn)^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} (kl)^p \, | \Delta\tau_{kl}^{(1)} |^p = o(1), \qquad F_{mn}^{(1)} = O(1),$$

$$F_{mn}^{(2)} = (mn)^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} (kl)^p \, | \Delta\tau_{kl}^{(2)} |^p = o(1), \qquad F_{mn}^{(2)} = O(1).$$

Доказательство. Рассмотрим тождество [7]

$$\Gamma_{mn} - S_{mn} = \sigma_{mn}^{(3)} + \sigma_{mn}^{(5)}, \qquad \sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_{ni}^{(2)} (\tau_{mi}^{(2)} - \tau_{mi-1}^{(2)}),$$

$$\sigma_{mn}^{(5)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)} \Delta\tau_{kl}^{(1)}.$$

Покажем, что $\sigma_{mn}^{(3)} = \Omega^{(p)}(1)$, $\sigma_{mn}^{(5)} = \Omega^{(p)}(1)$. В самом деле,

$$(\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} (mn)^p \, | \Delta\sigma_{mn}^{(3)} |^p = (\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} \left(mn \sum_{l=1}^{\infty} | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} | \, | \Delta\tau_{ml}^{(2)} | \right)^p =$$

$$= (\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} \left(\sum_{l=1}^{\infty} n/l \, | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} | \, ml \, | \Delta\tau_{ml}^{(2)} | \right)^p = (\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} \Bigg[\sum_{l=1}^{\infty} (n/l \, | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} |)^{1/p} \times$$

$$\times \, ml \, | \Delta\tau_{ml}^{(2)} | \, (n/l \, | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} |)^{1/q} \Bigg]^p \leqslant (\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} \sum_{l=1}^{\infty} n/l \, | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} | \, (ml)^p \, | \Delta\tau_{ml}^{(2)} |^p \times$$

$$\times \left(n/l \sum_{l=1}^{\infty} | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} | \right)^{p/q} = O(1)/\mu\nu \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} \sum_{l=1}^{\infty} n/l \, | \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} | \, \Delta (ml F_{ml}^{(2)}).$$

Если к сумме $\sum_{l=1}^{p} nl^{-1}(\Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} | \Delta(mlF_{ml}^{(2)})$ применить преобразование Абеля и принять во внимание, что $\| \Gamma_{nl}^{(2)} \|$ — $[\gamma[_p$-матрица, тем более, что $\Gamma_{nl}^{(2)} \to 0$, $l \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$(\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} (mn)^p \,|\, \Delta\sigma_{mn}^{(3)} |^p = O(1)(\mu\nu)^{-1} \sum_{m,n=1}^{\mu,\nu} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma^*_{nl} \Delta_m (mF_{ml}^{(2)}) =$$

$$= (\nu)^{-1} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma^*_{nl} F_{\mu l}^{(2)} = O(1)(\nu)^{-1} \sum_{n=1}^{\nu} \omega_{\mu n} = Q_{\mu\nu},$$

$$\Gamma^*_{nl} = l\,[nl^{-1} \,|\, \Delta_n \Gamma_{nl}^{(2)} \,| - n/l + 1 \,|\, \Delta_n \Gamma_{nl+1}^{(2)} |].$$

Но $\omega_{\mu n} \to 0$, $\mu, n \to \infty$. Это легко получить из неравенства

$$|\,\omega_{\mu n}| \leqslant \sum_{l=1}^{\nu_0} |\,\Gamma^*_{nl} \,|\, F_{\mu l}^{(2)} + \sum_{l=\nu_0+1}^{\infty} |\,\Gamma^*_{nl} \,|\, F_{\mu l}^{(2)},$$

а следовательно, $Q_{\mu\nu} = o(1)$, $\mu, \nu \to \infty$. Таким образом, $\sigma_{mn}^{(3)} = \Omega^{(p)}(1)$. Это верно при $p = 1$. Так как $\| \Gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)} \|$ — $[\gamma]_p$-матрица, то $\sigma_{mn}^{(5)} = \Omega^{(p)}(1)$. В таком случае $S_{mn} = \Omega^{(p)}(1)$.

Пусть $\varphi(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} x^k y^l u_{kl}$ A — средние двойного ряда.

Теорема 4. *Если двойной ряд* (6) $[A]_p$-*суммируем*, $p \geqslant 1$, *то он сильно сходится в степени* p, *если*

$$\overline{\tau}_{mn}^{(1)} = m \sum_{l=1}^{n} u_{ml} = \Omega^{(p)}(1), \qquad \overline{\tau}_{mn}^{(2)} = n \sum_{k=1}^{n} u_{kn} = \Omega^{(p)}(1).$$

Доказательство. Положим $\lambda_m^{(1)} = m$, $\lambda_n^{(2)} = n$, $x = 1 - m^{-1}$, $y = 1 - n^{-1}$. Тогда

$$\Gamma_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} (1 - m^{-1})^{i}/i - \sum_{i=k}^{m} i^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad \Gamma_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} (1 - m^{-1})^{i}/i, \; k > m,$$

$$k > m,$$

$$\Gamma_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} (1 - n^{-1})^i/i - \sum_{i=l}^{n} i^{-1}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \quad \Gamma_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} (1 - n^{-1})^{i}/i, \quad l > n.$$

Нетрудно доказать (см. [6]), что матрица $\| \Gamma_{mk}^{(1)} \|$, а следовательно, и матрица $\| \Gamma_{nl}^{(2)} \|$ — $[\gamma]_p$-матрицы. Осталось применить теорему 3.

Тауберовы условия можно ослабить, если применить теорему 2, положив в ней $p_m^{(1)} = 1$, $p_n^{(2)} = 1$, $q_m^{(1)} = m + 1$, $q_n^{(2)} = n + 1$, $\lambda_m^{(1)} = m$, $\lambda_n^{(2)} = n$.

Теорема 5. *Если двойной ряд* (6) $[A]_p$-*суммируем к* S, $p \geqslant 1$, *то он сильно сходится в степени* p *к* S, *если в узком смысле*

$$(m+1)^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} k u_{kl} = \omega^{(p)}(1), \qquad (n+1)^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} l u_{kl} = \omega^{(p)}(1),$$

$$[(m+1)(n+1]^{-1} \sum_{k,l=1}^{m,n} kl u_{kl} = \omega^{(p)}(1).$$

1. *Слепенчук К. М.* Об условиях абсолютной и сильной суммируемости в степени p рядов.— Изв. вузов. Математика, 1981, № 10, с. 79—82.
2. *Сліпенчук К. М.* Деякі загальні теореми тауберового типу.—-Доп. АН УРСР. Сер. А, 1960, № 10, с. 1315—1318.

3. *Meyer-König W., Tietz H.* Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie.— Arch. mat., 1969, **5**, N 4, S. 177—186.
4. *Слепенчук К. М.* Об условиях обратимости в теории суммируемости двойных рядов.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 6, с. 830—835.
5. *Слепенчук К. М.* Сильная суммируемость двойных рядов матричными методами и теоремы тауберового типа для этих методов.— Мат. заметки, 1975, **17**, вып. 3, с. 391—400.
6. *Слепенчук К. М. Новикова Н. С., Удалая Н. И.* Сильная суммируемость рядов матричными методами. I.— Изв. вузов. Математика, 1975, № 11, с. 78—88.
7. *Слепенчук К.М.* Об условиях обратимости в теории абсолютной суммируемости двойных рядов.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 2, с. 189—194.

Днепропетровск. гос. ун-т

Поступила в редакцию 27.12.82