УДК 517.8

Л. А. Сахнович

Интегральные уравнения Абеля в теории устойчивых процессов

Пусть $x(\tau)$ ($x(0)=0$) — однородный процесс с независимыми приращениями [1], подчиняющийся симметричному устойчивому закону распределения с показателем α, $0<\alpha<2$, т. е.

$$M\{\exp(i\xi x(\tau))\} = \exp(-\tau|\xi|^{\alpha}). \tag{1}$$

Изучим величину

$$p_{\alpha}(t,a) = P\{\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|x(\tau)|<a\}. \tag{2}$$

Для этого, следуя [2], используем операторы

$$A_\alpha f = -\frac{d}{dx} S_\alpha \frac{d}{dx} f, \tag{3}$$

где S_α действуют в $L(-a, a)$ и определяются формулами

$$S_\alpha f = \Gamma(\alpha - 1)/\pi \sin(\alpha\pi/2) \int_{-a}^{a} f(y) |x - y|^{1-\alpha} dy, \quad \alpha \neq 1. \tag{4}$$

Область определения $\mathcal{D}_\alpha$ оператора A_α характеризуется соотношениями

$$f'(x) \in L^2(-a, a); \qquad \frac{d}{dx} S_\alpha f' \in L^2(-a, a); \qquad f(-a) = f(a) = 0. \tag{5}$$

Как известно [3], функции

$$\mathcal{L}_1(x, \alpha) = [1/\Gamma(\alpha - 1)] (a^2 - x^2)^{\alpha/2-1}; \qquad \mathcal{L}_2(x, \alpha) = [x/(\alpha - 1)] \mathcal{L}_1(x, \alpha) \tag{6}$$

удовлетворяют соотношениям $S_\alpha \mathcal{L}_k = x^{k-1}$, $k = 1, 2$. Полагая

$$R(\alpha) = \int_{-a}^{a} \mathcal{L}_1(x, \alpha) dx, \tag{7}$$

введем функции

$$Q_\alpha(x, y) = [\mathcal{L}_1(-y, \alpha) \mathcal{L}_2(x, \alpha) - \mathcal{L}_2(-y, \alpha) \mathcal{L}_1(x, \alpha)]/R(\alpha), \tag{8}$$

$$\Phi_\alpha(x, y) = 1/2 \int_{x+y}^{2a-|x-y|} Q_\alpha[(s + x - y)/2, (s - x + y)/2]. \tag{9}$$

Из (6) — (9) имеем

$$\Phi_\alpha(x, y) = \frac{\sin(\pi\alpha/2) \Gamma[(1 + \alpha)/2] \Gamma[(2 - \alpha)/2]}{\pi^{3/2} \Gamma(\alpha)} \int_{|x-y|}^{(a^2-xy)/a} [z^2 - (x - y)^2]^{\alpha/2-1} dz, \tag{10}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция. Делая замену переменных $z = |x - y| u$, получаем

$$\Phi_\alpha(x, y) = \frac{\sin(\pi\alpha/2) \Gamma[(1 + \alpha)/2] \Gamma[(2 - \alpha)/2]}{\pi^{3/2} \Gamma(\alpha)} \int_{1}^{(a^2-xy)/a|x-y|} (u^2 - 1)^{\alpha/2-1} \times$$
$$\times du |x - y|^{\alpha-1}. \tag{11}$$

Из формул (9), (10) непосредственно получаем лемму.

Лемма 1. 1. *Функция $\Phi_\alpha(x, y)$ неотрицательна и при $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$,*

$$\Phi_\alpha(\pm a, y) = 0, \qquad -a < y < a. \tag{12}$$

2. *Функция $\Phi_\alpha(x, y)$ непрерывна при $1 < \alpha < 2$.*

3. *Функция $\Phi_\alpha(x, y)$ в случае $0 < \alpha < 1$ терпит разрыв лишь при $x = y$, и при некотором c справедливо неравенство*

$$\Phi_\alpha(x, y) \leqslant c |x - y|^{\alpha-1}, \quad -a \leqslant x, y \leqslant a. \tag{13}$$

4. *При $0 < \alpha < 1$, $-a < x < a$ выполняется*

$$\lim_{x \to y} |x - y|^{1-\alpha} \Phi_\alpha(x, y) = \Gamma(1 - \alpha) \sin(\pi\alpha/2)/\pi. \tag{14}$$

В силу леммы 1 оператор

$$B_\alpha f = \int_{-a}^{a} f(y) \Phi_\alpha(x, y) dy \tag{15}$$

ограничен в пространствах $L^p(-a, a)$. Применяя к операторам A_α теоремы 2 и 3 из [4], получаем утверждения:

1. Если $f \in D_\alpha$, то справедливо равенство

$$B_\alpha A_\alpha f = f. \tag{16}$$

2. При $f \in L^2(-a, a)$ и $\| f \| \neq 0$ выполняется неравенство

$$(B_\alpha f, f) > 0. \tag{17}$$

Следствие 1. *Все собственные числа $\mu_n(\alpha)$ оператора B_α, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, положительны, а собственные функции непрерывны.*

Положительность собственных чисел $\mu_n(\alpha)$ непосредственно следует из (17). В силу леммы 1 при любом α найдется натуральное число m, при котором ядро оператора B_α^m непрерывно. Значит, соответствующие собственные функции тоже непрерывны.

Таким образом, имеет смысл оператор $(E + \lambda B_\alpha)^{-1}$ при $\lambda > 0$. Легко видеть, что этот оператор допускает представление

$$(E + \lambda B_\alpha)^{-1} f = f(x) + \int_{-a}^{a} f(y) \gamma_\alpha(x, y, \lambda)\, dy. \tag{18}$$

Ядро $\gamma_\alpha(x, y, \lambda)$ характеризует лемма.

Лемма 2. 1. *Функция $\gamma_\alpha(x, y, \lambda)$ непрерывна при $1 < \alpha < 2$.*

2. *В случае $0 < \alpha < 1$ функция $\gamma_\alpha(x, y, \lambda)$ терпит разрыв лишь при $x = y$, при этом*

$$|\gamma_\alpha(x, y, \lambda)| \leqslant c(\lambda) |x - y|^{\alpha - 1}, \quad -a \leqslant x,\ y \leqslant a. \tag{19}$$

3. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x \to y} \gamma_\alpha(x, y, \lambda) |x - y|^{1-\alpha} = -\lambda \Gamma(1 - \alpha) \sin(\pi\alpha/2)/\pi, \quad |x| < a, \quad 0 < \alpha < 1.$$

4. *При $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ и $|y| < a$ выполняются соотношения*

$$\gamma(\pm a, y, \lambda) = 0. \tag{20}$$

Утверждения 1 — 4 непосредственно следуют из аналогичных утверждений для ядра $\Phi_\alpha(x, y)$ (лемма 1) и соотношения

$$\lambda \Phi_\alpha(x, y) + \gamma_\alpha(x, y, \lambda) + \lambda \int_{-a}^{a} \Phi_\alpha(x, s) \gamma_\alpha(s, y, \lambda)\, ds = 0.$$

Как и в [2], рассмотрим вспомогательную функцию $\Psi_\alpha(x, y)$ такую, что

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} p_\alpha(t, a)\, dt = \int_{-a}^{a} \Psi_\alpha(x, \lambda)\, dx, \quad \lambda > 0. \tag{21}$$

Введенная функция $\Psi_\alpha(x, y)$ удовлетворяет соотношениям [2]

$$((\lambda E + A_\alpha) f, \Psi_\alpha(x, \lambda)) = f(0), \tag{22}$$

$$0 \leqslant \Psi_\alpha(x, \lambda) \leqslant 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta x} 1/(\lambda + |\eta|^\alpha)\, d\eta, \quad 0 < \alpha < 2. \tag{23}$$

В силу (23) будут выполняться неравенства

$$0 \leqslant \Psi_\alpha(x, \lambda) \leqslant c, \qquad 1 < \alpha < 2, \qquad |x| \leqslant a, \qquad \lambda > 0, \tag{24}$$

$$0 \leqslant \Psi_\alpha(x, \lambda) \leqslant c |x|^{\alpha - 1}, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad |x| \leqslant a, \qquad \lambda > 0, \tag{25}$$

где c не зависит от x.

Теорема 1. *Соотношениям* (22), (24), (25) *удовлетворяет одна и только одна функция*

$$\Psi_\alpha(x, \lambda) = \Phi_\alpha(x, 0) + \int_{-a}^{a} \Phi_\alpha(y, 0) \gamma_\alpha(x, y, \lambda)\, dy, \tag{26}$$

обладающая следующими свойствами:

1) *при* $1 < \alpha < 2$ *она непрерывна на отрезке* $[-a, a]$;
2) *для* $0 < \alpha < 1$ *терпит разрыв лишь при* $x = 0$, *при этом*

$$\lim_{x\to 0} \Psi_\alpha (x, \lambda) | x |^{1-\alpha} = \Gamma (1 - \alpha) \sin (\pi\alpha/2)/\pi; \tag{27}$$

3) *при* $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ *выполняются соотношения*

$$\Psi_\alpha (\pm a, \lambda) = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Утверждения 1)—3) следуют из лемм 1, 2 и равенства (26). Значит, функция $\Psi_\alpha (x, \lambda)$ удовлетворяет соотношениям (24), (25). Перепишем (26) в виде

$$\Psi_\alpha (x, \lambda) = (E + \lambda B_\alpha)^{-1} \Phi_\alpha (x, 0). \tag{29}$$

Из (16) получаем

$$((\lambda E + A_\alpha) g, \Psi_\alpha) = ((E + \lambda B_\alpha) A_\alpha g, \Psi_\alpha) = (A_\alpha g, \Phi_\alpha (x, 0)). \tag{30}$$

Так как $\Phi_\alpha (x, 0) = B_\alpha \delta (x)$, $\delta (x)$ — функция Дирака, то согласно (16) и (30) функция Ψ_α удовлетворяет условию (22). Допустим, что при некоторых $\lambda > 0$ и $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, существует еще функция $\Psi(x)$, удовлетворяющая требованиям (22), (24), (25). Тогда будет выполняться равенство

$$((\lambda E + A_\alpha) g, \varphi) = 0, \qquad \varphi (x) = \Psi_\alpha (x, \lambda) - \Psi (x). \tag{31}$$

Равенство (31) запишем в форме

$$(A_\alpha g, (E + \lambda B_\alpha) \varphi) = 0. \tag{32}$$

Из [4, теорема 2] следует, что область значений оператора A_α плотна во всех пространствах $L^p (-a, a)$, $p \geqslant 1$. Значит, в силу (32) имеем $\varphi (x) = 0$.

Доказанная теорема содержит ответы на все вопросы, поставленные в [2, § 8].

Обозначим через $\mu_j (\alpha)$, $j = 1, 2, \ldots$, спектр оператора B_α, расположенный в порядке убывания. Соответствующие собственные функции обозначим через $g_j (x, \alpha)$, $\| g_j \| = 1$. При $1 < \alpha < 2$ применима теорема Мерсера:

$$\Phi_\alpha (x, y) = \sum_1^\infty \mu_j (\alpha) g_j (x, \alpha) g_j (y, \alpha). \tag{33}$$

Из формул (29), (33) следует

$$\Psi_\alpha (x, \lambda) = \sum_1^\infty \mu_j (\alpha) g_j (0, \alpha) g_j (x, \alpha)/(1 + \lambda\mu_j (\alpha)), \quad 1 < \alpha < 2.$$

Отсюда согласно (21) находим

$$p_\alpha (t, a) = \sum_1^\infty g_j (0, \alpha) \int_{-a}^{a} g_j (x, \alpha) \, dx e^{-t/\mu_j(\alpha)}. \tag{34}$$

Если $0 < \alpha < 1$, то при некотором m ядро оператора B_α^m непрерывно. Значит, согласно теореме Мерсера выполняется неравенство

$$\sum_1^\infty \mu_j^m (\alpha) g_j^2 (x, \alpha) < \infty. \tag{35}$$

Тогда ряд

$$q_\alpha (t, a) = \sum_1^\infty g_j (0, \alpha) \int_{-a}^{a} g_j (x, \alpha) \, dx e^{-t/\mu_j(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

будет сходящимся. Легко убедиться, что $q_\alpha (t, a) = p_\alpha (t, a)$. Таким образом, формула (34) доказана при $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$. В случае $\alpha = 1$ этот результат получен в [2].

Замечание. Так как $\Phi_\alpha (x, y) \geqslant 0$, то собственное число $\mu_1 (\alpha)$ имеет первую кратность и $g_1 (x, \alpha) \geqslant 0$. Из неравенства $\Phi_\alpha (0, y) > 0$ следует $g_1(0, \alpha) > 0$. Тогда из (34) при $0 < \alpha < 2$ получим

$$p_\alpha(t, a) = g_1(0, \alpha) \int_{-a}^{a} g_1(x, \alpha)\, dx e^{-t/\mu_1(\alpha)} [1 + o(1)], \quad t \to \infty. \tag{36}$$

В силу (35) имеет смысл функция

$$p_\alpha(x_0, x, t) = \sum_{1}^{\infty} g_j(x_0, \alpha)\, g_j(x, \alpha)\, e^{-\lambda_j(\alpha)t}, \tag{37}$$

где $\lambda_j(\alpha) = \mu_j^{-1}(\alpha)$. Введем еще функцию

$$\rho_\alpha(x, t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-|\xi|^\alpha t} d\xi. \tag{38}$$

Из вероятностной интерпретации функций $p_\alpha(x_0, x, t)$ и $\rho_\alpha(x - x_0, t)$ (см. [2]) непосредственно вытекает неравенство

$$p_\alpha(x_0, x, t) \leqslant \rho_\alpha(x - x_0, t). \tag{39}$$

Полагая в (39) $x_0 = x$ и учитывая (38), имеем

$$p_\alpha(x, x, t) \leqslant t^{-1/\alpha} \Gamma(1/\alpha + 1)/\pi. \tag{40}$$

Из (40) следует, что справедлива оценка сверху

$$q_\alpha(t) = \int_{-a}^{a} p_\alpha(x, x, t)\, dx \leqslant \Gamma(1/\alpha + 1)\, t^{-1/\alpha} (2a/\pi). \tag{41}$$

Чтобы оценить $q_\alpha(t)$ снизу, обратимся к операторам B_α. Из формул (9), (10) может быть выведено следующее уточнение леммы 1.

Лемма 3. *При $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ выполняется равенство*

$$\Phi_\alpha(x, y) = \Gamma(1 - \alpha) |x - y|^{\alpha - 1} \sin(\pi\alpha/2)/\pi + \Psi_\alpha(x, y), \tag{42}$$

где функция $\Psi_\alpha(x, y)$ для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|\Psi_\alpha(x, y)| + |\partial \Psi_\alpha(x, y)/\partial y| \leqslant M_\varepsilon, \quad -a + \varepsilon \leqslant x, y \leqslant a - \varepsilon. \tag{43}$$

Если $1 < \alpha < 2$, то выполняется еще неравенство

$$|\partial^2 \Psi_\alpha(x, y)/\partial y^2| \leqslant M_\varepsilon, \quad -a + \varepsilon \leqslant x, y \leqslant a - \varepsilon. \tag{44}$$

Определим оператор проектирования при помощи формулы

$$P_\varepsilon f = \begin{cases} f(x), & x \in [-a + \varepsilon,\ a + \varepsilon] \\ 0, & x \overline{\in} [-a + \varepsilon,\ a + \varepsilon]. \end{cases}$$

Введем операторы

$$B_{\alpha,\varepsilon} = P_\varepsilon B_\alpha P_\varepsilon, \qquad C_{\alpha,\varepsilon} = P_\varepsilon S_{\alpha-\varepsilon} P_\varepsilon. \tag{45}$$

Из леммы 3 и теоремы об s-числах получаем

$$s_n(B_{\alpha,\varepsilon} - C_{\alpha,\varepsilon}) = o(n^{-3/2}), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{46}$$

$$s_n(B_{\alpha,\varepsilon} - C_{\alpha,\varepsilon}) = o(n^{-5/2}), \quad 1 < \alpha < 2. \tag{47}$$

Как известно [5, 6], справедливо асимптотическое равенство

$$s_n(C_{\alpha,\varepsilon}) = [2(a - \varepsilon)/\pi n]^\alpha [1 + o(1)], \quad 0 < \alpha < 2, \quad \alpha \neq 1. \tag{48}$$

Согласно теореме Фань-Цюя, из (46) — (48) находим

$$s_n(B_{\alpha,\varepsilon}) = [2(a - \varepsilon)/\pi n]^\alpha [1 + o(1)], \quad 0 < \alpha < 2, \quad \alpha \neq 1. \tag{49}$$

Для функции $q_{\alpha,\varepsilon} = \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-t/s_j(B_{\alpha,\varepsilon})]$ в силу (49) выполняется соотношение

$$q_{\alpha,\varepsilon} = \Gamma(1/\alpha + 1)\, 2(a - \varepsilon)/\pi t^{-1/\alpha}(1 + o(1)), \quad t \to 0. \tag{50}$$

Из неотрицательности B_α и (45) получаем $\mu_n(B_\alpha) = s_n(B_\alpha)$, $\mu_n(B_\alpha) \geqslant s_n(B_{\alpha,\varepsilon})$. Значит, справедливо неравенство

$$q_\alpha(t) \geqslant q_{\alpha,\varepsilon}(t). \tag{51}$$

Из соотношений (41), (50), (51) непосредственно получаем асимптотическое равенство

$$q_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp[-\lambda_j(\alpha)\, t] = \Gamma(1/\alpha + 1)(2a/\pi)\, t^{-1/\alpha}[1 + o(1)], \quad t \to 0. \tag{52}$$

Отсюда согласно теореме Харди — Литтльвуда следует соотношение для спектра оператора A_α

$$\lambda_n(\alpha) = (\pi n/(2a))^\alpha [1 + o(1)], \quad n \to \infty, \quad 0 < \alpha < 2, \quad \alpha \neq 1. \tag{53}$$

Формулы (52), (53) могут быть выведены и для случая $\alpha = 1$.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями.— М.: Физматгиз, 1963.— 278 с.
2. *Кац М.* О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями.— Математика. Сб. переводов, 1957. **1**, вып. 2, с. 95—124.
3. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке.— Успехи мат. наук, 1980, **35**, вып. 4, с. 69—128.
4. *Сахнович Л. А.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 328—333.
5. *Кас М.* Distribution of Eigenvalues.— Michigan Math. J., 1955—56, N 3, p. 141—148.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов.— Изв. АН СССР. Матем., 1970, **34**, № 5, с. 1142—1158.

Одесск. электротехн. ин-т связи

Поступила в редакцию 22.06.82
после доработки — 24.08.83