УДК 512.8

В. М. Петричкович

О линейных делителях и приводимости многочленных матриц

Пусть

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m, \quad \det A(x) \not\equiv 0 \tag{1}$$

— многочленная матрица, где A_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ — $n \times n$-матрицы над $\mathbb{C}$. Если $A_0 = E$ — единичная матрица, то $A(x)$ называется унитальной. Многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ называется характеристическим многочленом, а его корни — характеристическими корнями матрицы $A(x)$. Матрица $A(x)$ называется приводимой, если существует матрица $P \in GL_n(\mathbb{C})$ такая, что

$$PA(x)P^{-1} = \begin{Vmatrix} A_2(x) & * \\ 0 & A_1(x) \end{Vmatrix},$$

где $A_1(x)$ и $A_2(x)$ — матрицы порядков n_1 и n_2, n_1, $n_2 \geqslant 1$, соответственно. В противном случае $A(x)$ называется неприводимой.

Установим критерий существования и явный вид левых линейных унитальных делителей матрицы (1), элементарные делители которой попарно взаимно просты, а также верхнюю и нижнюю границы для числа линейных унитальных делителей унитальной матрицы $A(x)$ без кратных характеристических корней и зависимость между числом делителей $A(x)$ и ее приводимостью.

Ненулевой вектор $\bar{u}_0 = \| u_{01}\, u_{02} \dots u_{0n} \|$ называется левым характеристическим вектором матрицы $A(x)$, отвечающим характеристическому корню α_0, если $\bar{u}_0 A(\alpha_0) = 0$. Векторы $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{l-1}$ образуют жорданову цепочку, отвечающую характеристическому корню α_0, если удовлетворяют условиям

$$\sum_{p=0}^{i} \frac{1}{p!} \bar{u}_{i-p} A^{(p)}(\alpha_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, l-1,$$

где $A^{(p)}(x)$ — производная p-го порядка матрицы $A(x)$.

Пусть элементарные делители матрицы $A(x)$ попарно взаимно просты. Тогда, согласно [1], существуют матрицы $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ и $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такие, что

$$F(x) = QA(x)R(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ 0 & & & \cdot & \\ & & & 1 & \\ g_1(x) & \dots & & g_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{matrix} \right\|.$$

Обозначим через $\bar{g}(x)$ вектор-строку $\bar{g}(x) = \| g_1(x) \dots g_{n-1}(x) - 1 \|$.

Пусть $(x-\alpha)^r \mid \Delta(x)$. Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что векторы

$$\bar{g}(\alpha),\ (1!)^{-1}\bar{g}^{1}(\alpha),\ \dots,\ ((r-1)!)^{-1}\bar{g}^{(r-1)}(\alpha), \tag{2}$$

$$\bar{g}(\alpha)Q,\ (1!)^{-1}\bar{g}'(\alpha)Q,\ \dots,\ ((r-1)!)^{-1}\bar{g}^{(r-1)}(\alpha)Q \tag{3}$$

образуют жордановые цепочки для матриц $F(x)$ и $A(x)$ соответственно, отвечающие характеристическому корню α. Так как Q — неособенная матрица, то наборы (2) и (3) состоят из линейно зависимых или линейно независимых векторов. Теперь, используя результаты работ [2, 3] о выделяемости линейных множителей из многочленных матриц, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть элементарные делители матрицы $A(x)$ попарно взаимно просты, $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_l)^{r_l}$, $r_1 + \dots + r_l = n$ — делитель характеристического многочлена $\Delta(x)$ матрицы $A(x)$.*

Тогда существует левый линейный делитель $Ex - D$ матрицы $A(x)$ такой, что $\det(Ex - D) = \varphi(x)$ в том и только в том случае, если матрица

$$G = \left\| \begin{matrix} \bar{g}(\alpha_1) \\ (1!)^{-1}\bar{g}'(\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ ((r_1-1)!)^{-1}\bar{g}^{(r_1-1)}(\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{g}(\alpha_l) \\ (1!)^{-1}\bar{g}'(\alpha_l) \\ \cdots\cdots\cdots \\ ((r_l-1)!)^{-1}\bar{g}^{(r_l-1)}(\alpha_l) \end{matrix} \right\|$$

неособенная. При этом $D = Q^{-1}G^{-1}JGQ$, *где* $J = J_1 \oplus \ldots \oplus J_l$,

$$J_i = \begin{Vmatrix} \alpha_i & & & & 0 \\ 1 & \alpha_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \alpha_i \end{Vmatrix}$$

— клетки Жордана порядков r_i, $i = 1, \ldots, l$.

Следствие 1. *Пусть* $A(x)$ *— унитальная многочленная матрица, характеристические корни* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$ *которой различны.*

Тогда число левых линейных унитальных делителей матрицы $A(x)$ *равно числу отличных от нуля миноров порядка* n *матрицы*

$$H = \begin{Vmatrix} \bar{g}(\alpha_1) \\ \bar{g}(\alpha_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{g}(\alpha_{mn}) \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

В дальнейшем, где это не оговорено, $A(x)$ будет означать унитальную многочленную матрицу, характеристические корни которой различны. Под делителем матрицы будем понимать левый унитальный делитель.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{sn}(x - \alpha_i)$, $1 \leqslant s < n$, *и* $\varphi(x) \mid \Delta(x)$.

Тогда существует делитель $D(x)$ *степени* s *матрицы* $A(x)$ *такой, что* $\det D(x) = \varphi(x)$ *в том и только в том случае, если матрица*

$$L = \begin{Vmatrix} \bar{g}(\alpha_1) & \alpha_1\bar{g}(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1^{s-1}\bar{g}(\alpha_1) \\ \bar{g}(\alpha_2) & \alpha_2\bar{g}(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2^{s-1}\bar{g}(\alpha_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{g}(\alpha_{sn}) & \alpha_{sn}\bar{g}(\alpha_{sn}) & \ldots & \alpha_{sn}^{s-1}\bar{g}(\alpha_{sn}) \end{Vmatrix}$$

неособенная.

Доказательство. Так как

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{F_{s-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} L = sn,$$

где через $M_{K_{r-1}(x)}(\varphi)$ обозначена матрица значений сопровождающей матрицы $K_{r-1}(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x)$, лемма 1 следует из теоремы 2 [4, с. 100].

Определение. *Набор делителей* $D_1(x), \ldots, D_r(x)$, $r > 1$, *матрицы* $A(x)$ *называем полным, если* $\prod_{i=1}^{r} \det D_i(x) = \det A(x)$.

Лемма 2. *Пусть* $m_1, \ldots, m_r$ *— натуральные числа такие, что* $m_1 + \ldots + m_r = m$.

Тогда для матрицы $A(x)$ *существует полный набор делителей* $D_1(x), \ldots, D_r(x)$ *степеней* $m_1, \ldots, m_r$ *соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$S = \begin{Vmatrix} \bar{g}(\alpha_1) & \alpha_1\bar{g}(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1^{m-1}\bar{g}(\alpha_1) \\ \bar{g}(\alpha_2) & \alpha_2\bar{g}(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2^{m-1}\bar{g}(\alpha_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{g}(\alpha_{mn}) & \alpha_{mn}\bar{g}(\alpha_{mn}) & \ldots & \alpha_{mn}^{m-1}\bar{g}(\alpha_{mn}) \end{Vmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$ — характеристические корни матрицы $A(x)$. Так как матрица $F(x)$ регуляризуется, то, принимая во внимание теорему 3 [4, с. 100], получаем, что

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} M_{F_{m-1}(x)}(\Delta) = mn,$$

т. е. S — неособенная матрица. Поэтому перестановкой строк матрица S приводится к виду $US = \| S_{ij} \|_{i,j=1}^r$, где S_{ii}, $i = 1, \ldots, r$, — неособенные матрицы порядка $m_i n$. Учитывая структуру матриц S_{ii} и лемму 1, получаем, что каждой матрице S_{ii}, $i = 1, \ldots, r$, соответствует делитель $D_i(x)$ степени m_i матрицы $A(x)$, причем характеристические корни делителей $D_i(x)$ попарно непересекаются. Лемма доказана.

Следствие 2 [5]. *Пусть многочленная матрица* (1) *не имеет кратных характеристических корней.*

Тогда матричное уравнение $X^m + X^{m-1}A_1 + \ldots + A_m = 0$ $(X^m + A_1 X^{m-1} + \ldots + A_m = 0)$ *имеет полный набор решений.*

Лемма 3. *Пусть* $(\bar a_1, \ldots, \bar a_n)$, $\underbrace{(\bar b, \ldots, \bar b_n), \ldots, (\bar g_1, \ldots, \bar g_n)}_{p}$ — *попарно непересекающиеся наборы линейно независимых векторов.*

Тогда в множестве $M(\bar a_{i_1}, \ldots, \bar a_{i_r})$ *наборов вида* $(\bar a_{i_1}, \ldots, \bar a_{i_r}, \ldots, \bar x_{j_1}, \ldots, \bar x_{j_q})$, $r + q = n$, *где* $\bar a_{i_1}, \ldots, \bar a_{i_r}$ *фиксированы,* $\bar x_{j_1}, \ldots, \bar x_{j_q}$ *пробегают всевозможные* $\bar b_i, \ldots, \bar g_i$, $i = 1, \ldots, n$, *имеется по крайней мере* p^q *наборов, состоящих из линейно независимых векторов.*

Доказательство проводится индукцией по p.

Из леммы 3 вытекает

Лемма 4. *Пусть* mn *различных векторов размерности* n *можно разбить на* m *непересекающихся множеств по* n *линейно независимых векторов в каждом.*

Тогда из этих векторов можно образовать не менее чем m^n *множеств по* n *линейно независимых векторов.*

Теорема 2. *Число* k *левых линейных унитальных делителей унитальной матрицы* $A(x)$ *без кратных характеристических корней удовлетворяет неравенству* $m^n \leqslant k \leqslant \binom{mn}{n}$.

Доказательство. Согласно лемме 2 матрица $A(x)$ обладает полным набором линейных делителей. Это означает, в силу теоремы 1, что mn строк матрицы (4) можно разбить на m непересекающихся множеств по n линейно независимых строк в каждом. Применяя лемму 4 и следствие 1, получаем, что $k \geqslant m^n$. Если матрица $A(x)$ диагональна или преобразованием подобия приводится к диагональному виду, то $k = m^n$. Если матрица $A(x)$ обладает так называемым свойством абсолютной разложимости [6], то $k = \binom{mn}{n}$. Теорема доказана.

Отметим, что до сих пор были известны многочленные матрицы, про число линейных делителей которых можно было сказать, что оно конечно [4] или же бесконечно [7].

Лемма 5. *Пусть*

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} A_2(x) & * \\ 0 & A_1(x) \end{matrix} \right\|, \tag{5}$$

где $A_1(x)$ *и* $A_2(x)$ — *матрицы порядков* n_1 *и* n_2, $1 \leqslant n_1 \leqslant n-1$, *соответственно. Тогда матрица* $A(x)$ *имеет*

$$k \leqslant \sum_{i=0}^{n_1} \binom{mn_1}{i} \binom{m(n-n_1)}{n-i} \tag{6}$$

линейных делителей.

Доказательство. Положим $\det A_1(x) = \prod_{i=1}^{mn_1} (x - \alpha_i)$ и $\det A_2(x) = \prod_{i=1}^{mn_2} (x - \beta_i)$. Рассмотрим многочлен

$$\varphi(x) = (x - \alpha_{i_1}) \ldots (x - \alpha_{i_r})(x - \beta_{j_1}) \ldots (x - \beta_{j_{n-r}}), \quad r > n_1. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что не существует линейного делителя матрицы $A(x)$ с характеристическим многочленом $\varphi(x)$. Так как многочленов вида (7) можно образовать

$$t = \sum_{i=1}^{n-n_1} \binom{mn_1}{n_1+i} \binom{m(n-n_1)}{n-(n_1+i)}, \text{ то } k \leqslant \binom{mn}{n} - t.$$

Последнее соотношение легко преобразовывается в (6). Лемма доказана.

Теорема 3. *Если число k линейных делителей матрицы $A(x)$ без кратных характеристических корней удовлетворяет условию*

$$\binom{m(n-1)}{n} + m\binom{m(n-1)}{n-1} < k \leqslant \binom{mn}{n}, \tag{8}$$

то матрица $A(x)$ неприводима.

Доказательство. Пусть k удовлетворяет (8) и $A(x)$ приводима, т. е. существует неособенная числовая матрица P такая, что матрица $PA(x)P^{-1}$ имеет вид (5) для некоторого $n_1 \geqslant 1$. Так как число линейных делителей матрицы $PA(x)P^{-1}$ равно числу линейных делителей матрицы $A(x)$, то на основании леммы 5 k удовлетворяет (6). Используя биномальные тождества, нетрудно показать, что при $n_1 = 1$ правая часть неравенства (6) принимает наибольшее значение. Поэтому

$$k \leqslant \binom{m(n-1)}{n} + m\binom{m(n-1)}{n-1}.$$

Полученое противоречие и доказывает теорему.

Положим $m = 2$, т. е. $A(x) = Ex^2 + A_1x + A_2$. На основании леммы 2 $2n$ характеристических корней матрицы $A(x)$ можно разбить на два множества $M_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $M_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ так, что строки $\bar{g}(\alpha_1), \ldots, \bar{g}(\alpha_n)$ и $\bar{g}(\beta_1), \ldots, \bar{g}(\beta_n)$ линейно независимы. В дальнейшем строки $\bar{g}(\alpha_i)$ и $\bar{g}(\beta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, будем обозначать через $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_i$ соответственно.

Рассмотрим множество $M(\bar{b}_{i_1}, \ldots, b_{i_q})$ наборов строк вида

$$(\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q}, \bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_{n-q}}), \tag{9}$$

где $\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q}$ фиксированы из $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$, а $\bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_{n-q}}$ пробегают $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$. На основании леммы 3 в множестве $M(\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q})$ имеется по крайней мере один набор, состоящий из линейно независимых строк.

Лемма 6. *Если в множестве $M(\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q})$ имеется только один набор, состоящий из линейно независимых строк, то существует матрица $P \in GL_n(\mathbb{C}]$ такая, что*

$$PA(x)P^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{n-q}(x) & * \\ 0 & A_q(x) \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где $A_q(x)$ — $q \times q$-матрица.

Доказательство. Без ограничения общности можно положить, что $\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q}$ соответственно равны $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_q$, и

$$(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_q, \bar{a}_{q+1}, \ldots, \bar{a}_n) \tag{11}$$

— единственный набор в множестве $M(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_q)$, состоящий из линейно независимых строк. Это означает, что существует линейный делитель $Ex - D$ матрицы $A(x)$, характеристическими корнями которого являются $\beta_1, \ldots, \beta_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n$. Так как $\beta_1, \ldots, \beta_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n$ различны, то матрицу $A(x)$ можно преобразовать к виду

$$TA(x) = \operatorname{diag}(x-\beta_1, \ldots, x-\beta_q, x-\alpha_{q+1}, \ldots, x-\alpha_n)\, \| b_{ij}(x) \|_{i,j=1}^{n}, \tag{12}$$

где $T \in GL_n(\mathbb{C})$. Через $d_q(x)$ обозначим наибольший общий делитель миноров порядка q подматрицы $B_q(x) = \operatorname{diag}(x - \beta_1, \ldots, x - \beta_q) \| b_{ij}(x) \|_{i,j=1}^{q,n}$ матрицы (12). Тогда $d_q(x) = c \prod_{i=1}^{q} (x - \beta_i)(x - \alpha_i)$, $c \in \mathbb{C}$. Действительно, если допустить, например, $d_q(\alpha_1) \neq 0$, то найдется матрица $T_1 \in GL_n(\mathbb{C})$ такая, что

$$T_1 T A(x) = \operatorname{diag}(x - \beta_1, \ldots, x - \beta_q, x - \alpha_1, x - \alpha_{i_{q+2}}, \ldots$$
$$\ldots, x - \alpha_{i_n}) \|c_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{n},$$

где $\alpha_{i_{q+2}}, \ldots, \alpha_{i_n}$ — некоторые числа из $\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \ldots, \alpha_n$. Это означает, что строки $(\bar{b}_1 \ldots, \bar{b}_q, \bar{a}_1, \bar{a}_{i_{q+2}}, \ldots, \bar{a}_{i_n})$ линейно независимы, что противоречит единственности набора (11), состоящего из линейно независимых строк в множестве $M(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_q)$.

Применяя следствие 1 из [8] к матрице $B_q(x)$, получаем, что матрицу (12) преобразованием подобия можно привести к виду (10), причем $\det A_q(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - \beta_i)(x - \alpha_i)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Если число k линейных делителей матрицы $A(x) = Ex^2 + A_1 x + A_2$ без кратных характеристических корней удовлетворяет условию $2^n \leqslant k < 2(2^n - 1)$, то $A(x)$ приводима.*

Доказательство. Поскольку каждому линейному унитальному делителю матрицы $A(x)$ соответствует набор вида (9), состоящий из линейно независимых строк, и обратно, то учитывая лемму 3 и то, что $k < 2(2^n - 1)$, заключаем, что для некоторых $\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q}$, $1 \leqslant q \leqslant n - 1$, в множестве $M(\bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q})$ имеется только один набор, состоящий из линейно независимых строк. Тогда в силу леммы 6 матрица $A(x)$ приводима. Теорема доказана.

Можно указать границы для числа k линейных делителей матрицы $A(x)$ произвольной степени m такие, что $A(x)$ приводима. Но поскольку выражения и выкладки довольно громоздки, мы их не приводим.

Если $k = m^n$, то матрица $A(x)$ преобразованием подобия приводится к диагональному виду [9].

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теорет. та прикладні питання алгебри і диференц. рівнянь. К.: Наук. думка, 1977, с. 61—66.
2. *Lancaster P., Wimmer H. K.* Zur Theorie der λ-Matrizen.— Math. Nachrichten, 1975, **68** p. 325—330.
3. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення лінійного множника з матричного многочлена.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 11, с. 968—970.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К.: Наук. думка, 1981.— 224 с.
5. *Dennis J. E., Traub J. E., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polynomials.— SIAM J. Numer. Anal., 1976, **13**, N 6, p. 831—845.
6. *Петричкович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов.— В кн.: Матем. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1979, вып. 9, с. 37—41.
7. *Bell J. H.* Families of solutions of the unilateral matrix equation.— Pros. Amer. Math. Soc., 1950, N 1, p. 151—159.
8. *Петричкович В. М.* Розкладність на множники клітково-діагональних і клітково-трикутних поліноміальних матриць.— В кн.: Теорет. та прикладні питання алгебри і диференц. рівнянь. К.: Наук. думка, 1977, с. 92—97.
9. *Коляда Р. В., Петричкович В. М.* Диагонализация матричных многочленов. — В кн.: XVI Всесоюзн. алгебр. конф.: Тез. докл. Л.: Изд-во ЛОМИ АН СССР, 1981, ч. II, с. 72.

Ин-т прикл. проблем мех. и матем. АН УССР, Львов

Поступила в редакцию 28.04.83