УДК 519.21

С. А. Мельник

ε-оптимальное управление решением эволюционного уравнения в банаховом пространстве

В работе рассматривается проекционный метод построения ε-оптимального управления решением нелинейного эволюционного стохастического дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Идея метода состоит в следующем. Исходная система аппроксимируется специальным образом построенной конечномерной системой, для которой оптимальное или ε-оптимальное управление можно построить методами, описанными в [1, 3].

Доказано, что при больших размерностях аппроксимирующая и исходная системы близки по функционалу стоимости.

Пусть заданы: $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — полное вероятностное пространство с определенным на нем неубывающим потоком σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$; действительные числа $p > 1$ и $q = p/(p-1)$; действительные сепарабельные рефлексивные пространства V, H, E, U (V — банахово, H, E и U — гильбертовы) и сопряженные к ним, причем справедливы вложения $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$ и V плотно в H в норме H; компактное множество $\mathcal{U} \subset L_2([0, T) \times \Omega; U)$, состоящее из $\mathscr{F}_t$-измеримых функций $u(t, \omega)$, принимающих значения в U.

Введем обозначения: $\|\cdot\|_X$ и $(\cdot, \cdot)$ — норма и скалярное произведение в пространстве X, $\|\cdot\|$ — норма Гильберта — Шмидта, $|||\cdot|||_X^p = M\|\cdot\|_X^p$, $|||x|||_{Xt}^p = \int\limits_0^t |||x(s)|||_X^p ds$, $\langle\langle v^*, v\rangle\rangle$ — значение функционала $v^* \in V^*$ на $v \in V$; $w(t)$ — винеровский процесс относительно $\{\mathscr{F}_t\}$ со значениями в E, ядерным симметричным неотрицательным ковариационным оператором Q и характеристикой $\langle w\rangle_t = \operatorname{tr} Qt$; $\mathscr{L}_Q(E, H)$ — пространство таких линейных операторов Φ, переводящих $Q^{1/2}E$ в H, что $\Phi Q^{1/2}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Пусть при каждых $(t, v, u, \omega) \in [0, T] \times V \times U \times \Omega$ $A(t, v, u, \omega) \in V^*$, $B(t, v, u, \omega) \in \mathscr{L}_Q(E, H)$ и при каждых $v \in V$, $u \in U$ функции $A(t, v, u, \omega)$ и $B(t, v, u, \omega)$ измеримы по (t, ω) и $\mathscr{F}_t$-согласованны. φ — $\mathscr{F}_0$-измеримая функция со значениями в H и такая, что $|||\varphi|||_H < \infty$.

Рассмотрим минимизационную задачу управления решением уравнения

$$\xi^u(t) = \varphi + \int\limits_0^t A(s, \xi^u(s), u(s))\, ds + \int\limits_0^t B(s, \xi^u(s), u(s))\, dw(s) \tag{1}$$

с функционалом стоимости

$$F(\xi^u, u) = M\tilde{F}(\xi^u, u). \tag{2}$$

Здесь (1) понимается как равенство элементов в V^*.

Нам понадобится теорема о непрерывной зависимости решения уравнения (1) от управления.

Т е о р е м а 1. *Пусть при некоторых неслучайных положительных константах C, μ и $\nu \geqslant 0$ при всех $v, v_1, v_2 \in V$, $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ и некоторой неотрицательной $\mathscr{F}_t$-измеримой функции $f(t, \omega)$ такой, что $M\int\limits_0^t f(s)ds < \infty$ равномерно по $u \in U$, выполнены условия:*

1) *функция $\langle\langle A(t, v_1 + \tau v_2, u), v\rangle\rangle$ непрерывна по τ на R^1*

2) $\|A(t, v, u)\|_{V^*}^q \leqslant f(t) + C\|v\|_V^p$;

3) $2\langle\langle A(t, v, u), v\rangle\rangle + \|B(t, v, u)\|^2 \operatorname{tr} Q + \mu\|v\|_V^p \leqslant f(t) + C\|v\|_H^2$;

4) $2\langle\langle A(t, v_1, u) - A(t, v_2, u), v_1 - v_2\rangle\rangle + \nu\|v_1 - v_2\|_V^p + \|B(t, v_1, u) - B(t, v_2, u)\|^2 \operatorname{tr} Q \leqslant C\|v_1 - v_2\|_H^2$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\|A(t, v, u_n) - A(t, v, u)\|_{V^*} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|B(t, v, u_n) - B(t, v, u)\| = 0$ *при* $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n - u\|_U = 0$ *п. в. в* $[0, T] \times \Omega$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_t |||\xi^{u_n}(t) - \xi^u(t)|||_H^2 + \nu|||\xi^{u_n} - \xi^u|||_{VT}^p\} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия 1—4 обеспечивают существование и единственность решения уравнения (1) [2, теоремы 2.1—2.3 гл. 11]. Воспользовавшись формулой Ито для квадрата нормы [2, с. 91], получаем равенство

$$|||\xi^{u_n}(t) - \xi^u(t)|||_H^2 = \int\limits_0^t |||B(s, \xi^{u_n}(s), u_n(s)) - B(s, \xi^u(s), u(s))|||^2\, ds \times$$

$$\times \operatorname{tr} Q + 2M\int\limits_0^t \langle\langle A(s, \xi^{u_n}(s), u_n(s)) - A(s, \xi^u(s), u(s)), \xi^{u_n}(s) - \xi^u(s)\rangle\rangle\, ds,$$

которое после применения условия 4 переходит в неравенство

$$|||\xi^{u_n}(t)-\xi^u(t)|||_H^2+\nu|||\xi^{u_n}-\xi^u|||_{Vt}^p\leqslant C\int_0^t|||\xi^{u_n}(s)-\xi^u(s)|||_H^2ds+$$

$$+2(|||\xi^{u_n}|||_{Vt}+|||\xi^u|||_{Vt})|||A(s,\xi^u(s),u_n(s))-A(s,\xi^u(s),u(s))|||_{V^*t}+$$

$$+\operatorname{tr}Q\left(\int_0^t|||B(s,\xi^u(s),u_n(s))-B(s,\xi^u(s),u(s))|||^2ds\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left[\left(\int_0^t|||B(s,\xi^u(s),u(s))|||^2ds\right)^{1/2}+2\left(\int_0^t|||B(s,\xi^{u_n}(s),u_n(s))|||^2ds\right)^{1/2}+\right.$$

$$+3\left(\int_0^t|||B(s,\xi^u(s),u_n(s))|||^2ds\right)^{1/2}. \qquad (3)$$

В силу условий 2 и 3

$$\|A(s,\xi^u(s),u_n(s))-A(s,\xi^u(s),u(s))\|_{V^*}^q\leqslant C_1(f(s)+\|\xi^u(s)\|_V^p)$$

и

$$\|B(s,\xi^u(s),u_n(s))-B(s,\xi^u(s),u(s))\|^2\leqslant C_2(f(s)+\|\xi^u(s)\|_H^2+\|\xi^u(s)\|_V^p).$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под интегралом

$$\lim_{n\to\infty}|||A(\cdot,\xi^u(\cdot),u_n(\cdot))-A(\cdot,\xi^u(\cdot),u(\cdot))|||_{V^*T}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}|||B(\cdot,\xi^u(\cdot),u_n(\cdot))-B(\cdot,\xi^u(\cdot),u(\cdot))|||_T=0.$$

Применение к неравенству (3) леммы Гронуолла завершает доказательство теоремы 1.

В дальнейшем будем предполагать, что в условии 4 константа ν строго положительна.

Для произвольного пространства X с базисом $\{x_i\}$ и функции $x(t)\in\in L_2([0,T]\times\Omega;X)$ обозначим $x_i(t)=(x(t),x_i)_X$, $x^N(t)=\sum_{i=1}^N x_i(t)x_i$. Возьмем ортонормированные базисы $\{h_i\}$, $\{e_i\}$, $\{u_i\}$ пространств H, E, U, при этом будем предполагать, что $h_i\in V$, $i=1,2,\ldots$, а e_i — собственные векторы оператора Q. Обозначим через $\mathcal{U}_R$ множество управлений вида $u^R(t)=$ $=\sum_{i=1}^R u_i(t)u_i$, $\bar{\mathcal{U}}=\bigcup_R\mathcal{U}_R$, через $\zeta_i^{u^R}(t)$ — решение уравнения

$$d\zeta_i^{u^R}(t)=\langle\langle A(t,\zeta^{u^R}(t),u^R(t)),h_i\rangle\rangle dt+\sum_{i=1}^N(B(t,\zeta^{u^R}(t),u^R(t))e_j,h_i)_H\times$$

$$\times d(w(t),e_j)_E, \qquad (4)$$

$$\zeta_i^{u^R}(0)=\varphi_i=(\varphi,h_i)_H,$$

где $\zeta^{u^R}(t)=\sum_{i=1}^N\zeta_i^{u^R}(t)h_i$

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы 1, то*

$$\sup_t|||\zeta^{u^R}(t)|||_H^2+|||\zeta^{u^R}|||_{VT}^p\leqslant C,$$

где C не зависит от N и u^R.

Поскольку условия 1—4 выполнены равномерно по $u\in U$, то доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 4.1 [2].

Следствие. *Существует константа $\hat{C}>0$, не зависящая ни от N, ни от u^R такая, что*

$$|||A(\cdot,\zeta^{u^R}(\cdot),u^R(\cdot))|||_{V^*T}\leqslant\hat{C},\qquad\int_0^t|||B(s,\zeta^{u^R}(s),u^R(s))|||^2ds\leqslant\hat{C}.$$

Доказательство вытекает из условий 2 и 3 теоремы 1 и леммы 1.

Лемма 2. *В условиях теоремы 1*

$$\sup_t ||| \zeta^{u^R}(t) - \zeta^{u^R}(t) |||_H^2 + ||| \zeta^{u^R} - \zeta^{u^R} |||_{VT}^p \to 0$$

при $N \to \infty$ *равномерно по* $u^R \in \overline{\mathcal{U}}$.

Доказательство. Из (1) и (4) получаем соотношение

$$d(\xi_i^{u^R}(t) - \zeta_i^{u^R}(t)) = \langle\langle A(t, \xi^{u^R}(t), u^R(t)) - A(t, \zeta^{u^R}(t), u^R(t)), h_i\rangle\rangle\, dt +$$
$$+ (h_i, B(t, \zeta^{u^R}(t), u^R(t))\, dw(t) - B(t, \zeta^{u^R}(t), u^R(t))\, dw^N(t))_H,$$

из которого вытекает равенство

$$||| \xi^{u^{R_N}}(t) - \zeta^{u^R}(t) |||_H^2 = M \int_0^t \langle\langle A(s, \xi^{u^R}(s), u^R(s)) - A(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s)),$$
$$\zeta^{u^R}(s) - \zeta^{u^R}(s)\rangle\rangle\, ds + \sum_{i=1}^N M < \int_0^{\cdot} (h_i, B(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s))\, dw(s) -$$
$$- B(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s))\, dw^N(s))_H\rangle_t + M \int_0^t \langle\langle A(s, \xi^{u^R}(s), u^R(s)) -$$
$$- A(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s)), \xi^{u^{R_N}}(s) - \zeta^{u^R}(s)\rangle\rangle\, ds. \qquad (5)$$

Оценим предпоследнее слагаемое в (5). Для краткости введем обозначения

$$B_s = B(s, \xi^{u^R}(s), u^R(s)), \qquad B_s^N = B(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s)),$$

$$\sum_{=1}^N M < \int_0^{\cdot} (h_i, B_s dw(s) - B_s^N dw^N(s))_H\rangle_t = \sum_{i=1}^N M \Bigg\{ \langle \int_0^{\cdot} (h_i, (B_s - B_s^N)\, dw(s))_H\rangle_t +$$
$$+ \langle \int_0^{\cdot} (h_i, B_s^N d(w(s) - w^N(s)))\rangle_H\rangle_t + 2\Bigg(\langle \int_0^{\cdot} (h_i, (B_s - B_s^N)\, dw(s))_H\rangle_t \times$$
$$\times \langle \int_0^{\cdot} (h_i, B_s^N d(w(s) - w^N(s)))_H\rangle_t\Bigg)^{1/2} \qquad (6)$$

Для каждого из слагагаемых в правой части (6) получим оценку

$$\sum_{i=1}^N M \langle \int_0^{\cdot} (h_i, (B_s - B_s^N)\, dw(s))_H\rangle_t = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^\infty M \int_0^t (h_i, (B_s - B_s^N)\, e_j)_H^2 (Qe_j, e_j)_E ds \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{tr} Q \int_0^t ||| B_s - B_s^N |||^2\, ds.$$

Как и выше, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^N M \langle \int_0^{\cdot} (h_i, B_s^N d(w(s) - w^N(s)))_H\rangle_t \leqslant \sum_{i=N+1}^\infty (Qe_i, e_i)_E \int_0^t ||| B_s^N |||^2 ds.$$

Подставим полученные результаты в (6). Из равенства (5) и следствия из леммы 1 вытекает соотношение

$$||| \zeta^{u^{R_N}}(t) - \zeta^{u^R}(t) |||_H^2 \leqslant M \int_0^t \langle\langle A(s, \xi^{u^R}(s), u^R(s)) - A(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s)),$$
$$\zeta^{u^R}(s) - \zeta^{u^R}(s)\rangle\rangle\, ds + \int_0^t \| B(s, \xi^{u^R}(s), u^R(s)) - B(s, \zeta^{u^R}(s), u^R(s)) |||^2\, ds \times$$

$$\times \operatorname{tr} Q + C_3 \left[\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} (Qe_i, e_i) \right)^{1/2} + ||| \xi^{u^{R_N}} - \xi^{u^R} |||_{VT} \right],$$

которое после применения условия 4 и неравенства Гельдера переходит в неравенство

$$||| \xi^{u^R}(t) - \zeta^{u^R}(t) |||_H^2 + \nu ||| \xi^{u^R} - \zeta^{u^R} |||_{Vt}^p \leqslant C \int_0^t ||| \zeta^{u^R}(s) - \zeta^{u^R}(s) |||_H^2 ds +$$

$$+ C_3 \left[\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} (Qe_i, e_i)_E \right)^{1/2} + ||| \xi^{u^R} - \xi^{u^{R_N}} |||_{HT} + ||| \xi^{u^R} - \xi^{u^{R_N}} |||_{VT} \right]. \quad (7)$$

Слагаемые в квадратных скобках стремятся к нулю при $N \to \infty$ равномерно по $u^R \in \overline{\mathcal{U}}$ в силу ядерности Q и компактности $\mathcal{U}$. Применение к (7) леммы Гронуолла завершает доказательство леммы 2.

Пусть функционал $\tilde{F}(\xi^u, u)$ непрерывен относительно метрики $r((\xi_1, u_1), (\xi_2, u_2)) = \| \xi_1 - \xi_2 \|_{HT}^2 + \| u_1 - u_2 \|_{vT}^2$. Тогда в силу теоремы 1 $\lim\limits_{R\to\infty} F(\zeta^{u^R}, u^R) = F(\xi^u, u)$, т. е. $\overline{\mathcal{U}}$ плотно в $\mathcal{U}$. Предположим, что задача управления для системы (4) с функционалом стоимости $F(\zeta^{u^R}, u^R)$ решена и $u_*^{NR}(t)$ — оптимальное управление, а $\zeta^{u_*^{NR}}(t)$ — соответствующий ему процесс, построенный по решению системы (4), $u_*(t)$ — оптимальное управление для задачи (1), (2) и ξ^{u*} — соответствующее ему решение уравнения (1). Управление $u_*^{NR}(t)$ может быть не оптимальным, а лишь ε-оптимальным. Для краткости индекс управления у ξ и ζ будем опускать. Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, функционал $\tilde{F}$ непрерывен относительно метрики r и при любом $u \in \mathcal{U}$ удовлетворяет условию $|\tilde{F}(\xi_1, u) - \tilde{F}(\xi_2, u)| \leqslant g(\| \xi_1 - \xi_2 \|_{HT})$, где $0 < g(x) \leqslant C$ при $x > 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$.*

Тогда $\lim\limits_{NR\to\infty} F(\zeta, u_*^{NR}) = F(\xi, u_*)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем N и R такими, чтобы выполнялись неравенства

$$|F(\xi, u_*^R) - F(\zeta, u_*^R)| < \varepsilon/2, \quad (8)$$

$$|F(\xi, u_*^{NR}) - F(\zeta, u_*^{NR})| < \varepsilon, \quad (9)$$

$$|F(\xi, u_*) - F(\xi, u_*^R)| < \varepsilon/2. \quad (10)$$

Такие N и R существуют, так как (8) и (9) вытекают из ограничений на $\tilde{F}$ и леммы 2, а (10) следует из плотности $\overline{\mathcal{U}}$ в $\mathcal{U}$. Если $F(\xi, u_*) - F(\zeta, u_*^{NR}) > 0$, то $0 < F(\xi, u_*) - F(\zeta, u_*^{NR}) \leqslant F(\xi, u_*^{NR}) - F(\zeta, u_*^{NR}) < \varepsilon$ в силу (9). Если $F(\xi, u_*) - F(\zeta, u_*^{NR}) < 0$, то $0 > F(\xi, u_*) - F(\zeta, u_*^{NR}) \geqslant F(\xi, u_*) - F(\zeta, u_*^R) = F(\xi, u_*) - F(\xi, u_*^R) + F(\xi, u_*^R) - F(\zeta, u_*^R) > -\varepsilon$ в силу (8) и (10). Теорема доказана.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы.— К.: Наук. думка, 1977.— 251 с.
2. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях.— В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1979, **14**, с. 71—147.
3. *Мельник С. А.* ε-оптимальное управление для одной конечномерной системы. Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и задачи управления: Препринт 82—20.— К.: Ин-т кибернетики, 1982, с. 38—42.

Донецк. гос. ун-т

Поступила в редакцию 03.04.83