УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ ЭНТРОПИЙНЫХ ЧИСЕЛ И КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО – БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We establish the order estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii – Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q with certain relations between the parameters p and q. By using the obtained lower estimates of the entropy numbers, we establish the exact order estimates for the Kolmogorov widths of the same classes of functions in the space L_1.

Знайдено порядкові оцінки ентропійних чисел класів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у метриці простору L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q. Одержані результати застосовано для встановлення оцінок колмогоровських поперечників цих же функціональних класів у просторі L_1.

1. Введение. Основной целью настоящей работы является установление порядковых оценок энтропийных чисел классов Никольского – Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в метрике пространства L_q для ряда значений параметров p и q. Кроме того, полученные оценки снизу энтропийных чисел, в сочетании с известными оценками сверху колмогоровских поперечников этих классов, позволили установить порядок колмогоровских поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_1. Соответствующие асимптотические характеристики будут определены ниже; сначала приведем необходимые обозначения и определения, а также сформулируем вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве полученных результатов.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$, $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi]$, обозначает множество функций f, 2π-периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

В последующих рассуждениях будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\pi_d)$, для которых выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

и множество таких функций будем обозначать $L^0_p(\pi_d)$.

Для функции $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j-й переменной с шагом h :

$$\triangle_{h,j} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l-го порядка

$$\triangle_{h,j}^{l} f(x) = \overbrace{\triangle_{h,j} \ldots \triangle_{h,j}}^{l} f(x)$$

в точке x_j с шагом h.

Далее, если $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \ldots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\triangle_h^k f(x) = \triangle_{h_1,1}^{k_1} \ldots \triangle_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы вектор $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, и параметры $1 \leq p,\ \theta \leq \infty$. Тогда функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int\limits_{\pi_d} \left\| \triangle_h^k f(\cdot) \right\|_p^\theta \prod_{j=1}^{d} \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

и

$$\sup_h \left\| \triangle_h^k f(\cdot) \right\|_p \prod_{j=1}^{d} h_j^{-r_j} \leq 1, \quad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ и $r = (r_1, \ldots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = \overline{1,d}$. Напомним, что классы $B_{p,\theta}^r$ являются аналогами классов функций, введенных О. В. Бесовым [1], и $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r — аналоги классов, введенных С. М. Никольским (см., например, [2, с. 189]). С более подробной информацией о классах $B_{p,\theta}^r$ можно ознакомиться в работах [3, 4]. Далее нам будет удобно пользоваться определением классов $B_{p,\theta}^r$ в несколько ином виде.

Для векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, и $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d} \right\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ введем обозначение

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\widehat{f}(k) = \displaystyle\int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коэффициенты Фурье функции f.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тогда, с точностью до абсолютных постоянных, классы $B_{p,\theta}^r$ можно определить следующим образом (см., например, [3, 4]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f \colon \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} = \Big\{ f: \ \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p \leq 1 \Big\}.$$

Отметим, что при соответствующем видоизменении „блоков” $\delta_s(f,\cdot)$ приведенное определение классов $B^r_{p,\theta}$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$ (см., например, [4], замечание 2.1).

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, сопоставим полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\big)$$

и для $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, положим

$$A_s(f,x) = (f * A_s)(x),$$

где $*$ обозначает операцию свертки. Тогда при $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, с точностью до абсолютных постоянных, классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f: \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,\cdot)\|^\theta_p \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} = \big\{ f: \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f,\cdot)\|_p \leq 1 \big\}.$$

Поскольку в комментариях к полученным результатам будем упоминать классы $W^r_{p,\alpha}$, для удобства напомним их определение.

Пусть $F_r(x,\alpha)$ — многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x,\alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \qquad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме содержатся только те векторы $k = (k_1, \ldots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тогда через $W^r_{p,\alpha}$ обозначим класс функций f, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x,\alpha) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x-y,\alpha)\, dy,$$

$$\varphi \in L_p(\pi_d), \quad \|\varphi\|_p \leq 1.$$

Всюду ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \ldots, r_d)$, которые содержатся в определении рассматриваемых классов функций, упорядочены следующим образом : $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots \leq r_d$. Вектору $r = (r_1, \ldots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что все постоянные $C_i, i = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от параметров, которые содержатся в определении классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. В некоторых случаях будем указывать эту зависимость в явном виде. Если $\mathfrak{M}$ — некоторое конечное множество, то через $|\mathfrak{M}|$ будем обозначать количество его элементов.

Теперь определим асимптотические характеристики, которые будем исследовать.

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство и $B_{\mathscr{X}}(y, r)$ — шар $\mathscr{X}$ радиуса r с центром в точке y, т. е.

$$B_{\mathscr{X}}(y, r) = \big\{x \in \mathscr{X} : \|x - y\| \leq r\big\}.$$

Для компактного множества $\mathscr{A}$ и $\varepsilon > 0$ определим число

$$N_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) = \min \left\{ n\colon\ \exists y^1, \ldots, y^n \in \mathscr{X} : \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon) \right\}.$$

Тогда величина (см., например, [5, 6])

$$H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) = \log N_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X})$$

называется ε-энтропией множества $\mathscr{A}$ относительно банахова пространства $\mathscr{X}$ (здесь и далее $\log := \log_2$).

С ε-энтропией множества $\mathscr{A}$ тесно связано понятие его энтропийных чисел $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ (см., например, [7]):

$$\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) = \inf \left\{ \varepsilon \colon \exists y^1, \ldots, y^{2^k} \in \mathscr{X} : \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon) \right\}.$$

Отметим, что непосредственно из определений величин $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ и $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ имеем: если $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq k$, то $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq \varepsilon$, и наоборот, оценка $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq \varepsilon$ влечет оценку $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq k$. Иными словами, если $k < H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq k + 1$, то $\varepsilon_{k+1}(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq \varepsilon \leq$ $\leq \varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$. Эти соотношения позволяют из оценок для энтропийных чисел $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ получать оценки для ε-энтропии $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X})$.

Исследования ε-энтропии и близких к ней асимптотических характеристик (ε-емкость, энтропийные числа и т. п.) имеют богатую историю. Истоки этих исследований подробно обсуждаются во введении работы [5], где отмечается, что А. Н. Колмогоров [8], исходя из результатов работ [9, 10] и популярных в то время общих идей теории передачи информации, сформулировал общую программу исследования ε-энтропии и ε-емкости интересных с точки зрения компактов в функциональных пространствах. Заметим, что в той же работе [5] кроме оригинальных результатов приведено систематическое изложение ряда результатов, относящихся к соответствующим направлениям исследований и ранее опубликованных в работах [8 – 14]. Среди последующих работ, в которых изучались энтропийные числа и ε-энтропия классов периодических функций многих переменных $W^r_{p,\alpha}$ и H^r_p и их аналогов, отметим работы [15 – 29], где можно ознакомиться с более обширной библиографией.

Напомним определение одной аппроксимативной характеристики, соответствующим образом связанной с энтропийными числами, о которой будет идти речь в настоящей работе.

Пусть Φ — центрально-симметричное множество нормированного пространства $\mathscr{X}$ и L_M — подпространство размерности M пространства $\mathscr{X}$. Тогда величина

$$d_M(\Phi, \mathscr{X}) = \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in L_M} \|f-u\|_{\mathscr{X}}$$

называется M-мерным колмогоровским поперечником множества Φ в пространстве $\mathscr{X}$. Поперечник $d_M(\Phi, \mathscr{X})$ введен в 1936 г. А. Н. Колмогоровым [30] и до настоящего времени задачи, связанные с оценками колмогоровских поперечников тех или иных функциональных классов, находятся в поле зрения большого количества исследователей. Отметим, что с результатами исследования колмогоровских поперечников классов $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p и $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных можно ознакомиться в монографиях [31 – 33], где также приведены определенные комментарии и соответствующая библиография.

Прежде чем перейти непосредственно к формулировке и доказательству полученных результатов, введем некоторые обозначения и сформулируем необходимые вспомогательные утверждения.

Пусть, по-прежнему, $s=(s_1,\ldots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$ и $\gamma'=(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_d)$ — векторы, которые определены выше. Для $n\in\mathbb{N}$ положим

$$Q^\gamma_n = \bigcup_{(s,\gamma)\le n} \rho(s),\ Q^{\gamma'}_n = \bigcup_{(s,\gamma')\le n} \rho(s), \qquad \triangle Q^{\gamma'}_n = Q^{\gamma'}_n \backslash Q^{\gamma'}_{n-1}$$

и

$$\mathfrak{N}^{\gamma'}_n = \big\{ s=(s_1,\ldots,s_d),\, n-1<(s,\gamma')\le n,\, n\ge d\big\}.$$

Заметим, что $|\triangle Q^{\gamma'}_n| \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Через $S_{Q^\gamma_n}(f,\cdot)$ обозначим ступенчатую гиперболическую сумму Фурье функции $f\in L_1(\pi_d)$ вида

$$S_{Q^\gamma_n}(f,\cdot) = \sum_{(s,\gamma)\le n} \delta_s(f,\cdot).$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема А [34]. *Пусть* $1\le p<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $r_1>\dfrac{1}{p}$. *Тогда*

$$\sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \|f(\cdot)-S_{Q^\gamma_n}(f,\cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1/p)}\, n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}.$$

***Замечание* 1.** Такая же по порядку оценка справедлива и в случае приближения функций $f\in B^r_{p,\theta}$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_{Q^{\gamma'}_n}(f,\cdot)$.

Лемма А. *Пусть* $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\Big\| \sum_s \delta_s(f, \cdot)\Big\|_p \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{p^*}\right)^{1/p^*}, \tag{1}$$

где $p^* = \min\{2,\, p\}$.

Неравенство (1) является простым следствием теоремы Литтлвуда – Пэли (см., например, теорему А из введения работы [31]) и неоднократно использовалось в работах многих авторов.

Лемма Б [31, с. 11]**.** *Справедлива оценка*

$$\sum_{(s,\gamma')\ge l} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha l} l^{\nu-1}, \quad \alpha > 0.$$

Пусть $\mathscr{X}$ обозначает пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. Как обычно, обозначим через B_2^N и S^{N-1} соответственно единичный евклидов шар в $\mathbb{R}^N$ и его границу. Пусть также $\sigma = \sigma_N$ — нормированная мера Лебега на S^{N-1}. Следующая величина играет важную роль в оценках ε-энтропии и поперечников по Колмогорову (подробнее см. [35]):

$$M_{\mathscr{X}} = \int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_{\mathscr{X}} d\sigma.$$

Справедливо следующее утверждение (см. [36]).

Лемма В. *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_m(B_2^N, \mathscr{X}) \ll \begin{cases} \left(\dfrac{N}{m}\right)^{1/2} M_{\mathscr{X}}, & m \le N, \\ e^{-m/N} M_{\mathscr{X}}, & m > N. \end{cases} \tag{2}$$

Отправляясь от (2), получим соответствующие оценки в пространстве $\mathscr{X} = L_\infty$ для единичных шаров, являющихся тригонометрическими полиномами специального вида. С этой целью для любого множества $G \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G)$ обозначим множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{k\in G} c_k e^{i(k,x)}, \quad x \in \pi_d,$$

а в случае, когда множество G симметрично относительно начала координат $(G = -G)$, положим

$$T_R(G) = \big\{t \in T(G) \colon c_k = \bar{c}_{-k},\, k \in G\big\}.$$

Пусть $T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_q$ — единичный L_q-шар в пространстве $T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})$, т. е.

$$T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_q = \big\{t \in T(\triangle\, Q_n^{\gamma'}) \colon \|t\|_q \le 1\big\}.$$

В принятых обозначениях имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\varepsilon_m\big(T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_2, L_\infty\big) \ll \begin{cases} \Big(|\triangle\, Q_n^{\gamma'}|\; m^{-1}\Big)^{1/2} n^{1/2}, & m \le |\triangle\, Q_n^{\gamma'}|, \\ 2^{-|\triangle Q_n^{\gamma'}|^{-1} m}\; n^{1/2}, & m > |\triangle\, Q_n^{\gamma'}|. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $T_R(\triangle\, Q_n^{\gamma'})$ полиномов из $T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})$ с действительными коэффициентами. Тогда $T_R(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_2$ можно рассматривать как евклидов шар в $\mathbb{R}^N$, $N = |\triangle\, Q_n^{\gamma'}|/2$. Легко видеть, что оценки (3) достаточно доказать для $T_R(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_2$.

Пусть $\mathscr{X}_q^G$ — банахово пространство тригонометрических полиномов $t \in T_R(G)$ с обычной L_q-нормой и deg t — степень полинома t. (Напомним, что под степенью тригонометрического полинома будем понимать наибольшую из степеней экспонент $e^{i(k,x)}$, содержащихся в нем, а deg $e^{i(k,x)} = |k_1| + \ldots + |k_d|$.)

Далее воспользуемся оценкой, полученной в [27]:

$$M_{\mathscr{X}_q^G} \ll \begin{cases} \sqrt{q}, & 1 < q < \infty, \\ \sqrt{\log \deg\, t}, & q = \infty. \end{cases}$$

Поскольку для $t \in T_R(\triangle\, Q_n^{\gamma'})$ имеет место соотношение $\log \deg\, t \ll n$, учитывая вышеизложенное, в силу леммы В приходим к искомым оценкам (3).

Лемма доказана.

Следующее утверждение является следствием одного неравенства Б. Карла (см., например, [37]).

Лемма Г [25, 26]**.** *Пусть $\mathscr{A}$ — компакт в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{X}$. Предположим, что для пары чисел (a, b), где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, либо $a = 0$, $b < 0$, выполняются соотношения*

$$d_m(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\varepsilon_m(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тогда

$$\varepsilon_m(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \asymp d_m(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

2. Основные результаты. Предварительно отметим, что при доказательстве полученных результатов нами используются и развиваются подходы, которые применялись в работах [20, 21, 24, 25] при исследовании соответствующих вопросов на классах $W^r_{p,\alpha}$ и H^r_p периодических функций многих переменных.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ и $r_1 > 1/2$. Тогда*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1 + (1/2 - 1/\theta)_+}\sqrt{\log M}, \tag{4}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. Поскольку $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$, $2 < p < \infty$, оценку (4) достаточно установить для случая $p = 2$.

Итак, пусть $f \in B^r_{2,\theta}$, $1 \le \theta \le 2$. Тогда согласно неравенству

$$\left(\sum_l |a_l|^{\mu_2}\right)^{1/\mu_2} \le \left(\sum_l |a_l|^{\mu_1}\right)^{1/\mu_1}, \quad 1 \le \mu_1 \le \mu_2 < \infty$$

(см. [39, с. 43]) можем записать

$$\left\|\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot)\right\|_2 = \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} \ll 2^{-n\,r_1} \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll 2^{-n\,r_1}\|f\|_{B^r_{2,\theta}} \le 2^{-n\,r_1}. \tag{5}$$

Пусть теперь $\theta \in (2,\infty)$. В таком случае, воспользовавшись неравенством Гельдера с показателем $\theta/2$ и леммой Б, будем иметь

$$\left\|\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot)\right\|_2 = \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{-2(s,r)\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{2,\theta}} \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{-2(s,r)\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} \ll 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{6}$$

Таким образом, согласно (5) и (6) для $f \in B^r_{2,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, имеем

$$\left\|\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot)\right\|_2 \ll 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{7}$$

Далее, в соответствие числу M выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства $|Q^{\gamma'}_{m-1}| < M \le |Q^{\gamma'}_m|$. Тогда, приняв во внимание соотношения $|Q^{\gamma'}_m| \asymp |Q^{\gamma'}_{m-1}| \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, будем иметь $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$.

Положим $\beta = \dfrac{1}{2}\min\left\{\left(r_1 - \dfrac{1}{2}\right), \dfrac{1}{2}\right\}$ и

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_\beta\, M 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} & \text{при} \quad n < m, \\ C_\beta\, M 2^{-\beta(n-m)} & \text{при} \quad n \geq m, \end{cases}$$

где $C_\beta > 0$ подобрано так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \leq M.$$

Заметим, что такое $C_\beta > 0$ существует, так как

$$\sum_{n=1}^{m-1} M\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + \sum_{n=m}^{\infty} M\, 2^{-\beta(n-m)} \ll M.$$

Пусть $M_n = [\overline{M}_n]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Тогда $M_n = 0$, если $C_\beta M 2^{-\beta(n-m)} < 1$, т. е. при $n > m_1 = m + \beta^{-1} \log C_\beta M$.

Положим

$$S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}) = \left\{ g\colon g(x) = \sum_{k \in \triangle Q_n^{\gamma'}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},\ f \in B^r_{2,\theta} \right\}$$

и

$$\left\| S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}) \right\|_\infty = \sup_{g \in S_{\triangle Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta})} \|g(\cdot)\|_\infty. \tag{8}$$

В принятых обозначениях можем записать

$$\varepsilon_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \leq \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_\infty) + \sum_{n > m_1} \left\| S_{\triangle Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}) \right\|_\infty = I_1 + I_2. \tag{9}$$

Оценим сначала слагаемое I_2. Для $f \in B^r_{2,\theta}$ согласно теореме A (см. замечание) будем иметь

$$\left\| S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(f, \cdot) \right\|_\infty = \left\| S_{Q_n^{\gamma'}}(f, \cdot) - S_{Q_{n-1}^{\gamma'}}(f, \cdot) + f(\cdot) - f(\cdot) \right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left\| f(\cdot) - S_{Q_n^{\gamma'}}(f, \cdot) \right\|_\infty + \left\| f(\cdot) - S_{Q_{n-1}^{\gamma'}}(f, \cdot) \right\|_\infty \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1 - 1/2)}\ n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\left\| S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}) \right\|_\infty \ll 2^{-n(r_1-1/2)} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}. \tag{10}$$

Таким образом, в силу (10) находим

$$I_2 = \sum_{n > m_1} \left\| S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}) \right\|_\infty \ll \sum_{n > m_1} 2^{-n(r_1-1/2)} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)} \ll$$

$$\ll 2^{-m_1(r_1-1/2)}\, m_1^{(\nu-1)(1-1/\theta)} = J_1. \tag{11}$$

Для продолжения оценки величины J_1 рассмотрим два случая.

Предположим сначала, что $r_1 \geq 1$. В таком случае $\beta = 1/4$ и соответственно $m_1 = m + \log(C_\beta M)^4$. Тогда для J_1 получим оценку

$$J_1 = 2^{-m(r_1-1/2)}(C_\beta M)^{-4(r_1-1/2)}(m+\log(C_\beta M)^4)^{(\nu-1)\left(1-1/\theta\right)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m\left(r_1-1/2\right)}2^{-4\left(r_1-1/2\right)m}m^{-4(\nu-1)\left(r_1-1/2\right)}m^{(\nu-1)\left(1-1/\theta\right)} \ll$$

$$\ll 2^{-mr_1}m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{12}$$

Пусть теперь выполнено условие $\dfrac{1}{2} < r_1 < 1$. Тогда $\beta = \dfrac{1}{2}\left(r_1 - \dfrac{1}{2}\right)$ и, следовательно, $m_1 = m + \log(C_\beta M)^{\frac{4}{2r_1-1}}$. В таком случае величина J_1 допускает оценку

$$J_1 = 2^{-m\left(r_1-1/2\right)}(C_\beta M)^{-2}(m+\log(C_\beta M)^{\frac{4}{2r_1-1}})^{(\nu-1)\left(1-1/\theta\right)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m\left(r_1-1/2\right)}2^{-2\,m}\,m^{-2(\nu-1)}m^{(\nu-1)\left(1-1/\theta\right)} \ll 2^{-m\,r_1}m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{13}$$

Таким образом, принимая во внимание (12) и (13), из (11) имеем

$$I_2 \ll 2^{-m\,r_1}\,m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{14}$$

Теперь перейдем к оценке величины I_1. С этой целью представим эту величину в виде двух слагаемых

$$I_1 = \sum_{n\leq m}\varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle\,Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}),L_\infty\right) + \sum_{m<n\leq m_1}\varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle\,Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}),L_\infty\right). \tag{15}$$

Для оценки первого слагаемого, воспользовавшись соотношением (7) и леммой 1, будем иметь

$$\sum_{n\leq m}\varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle\,Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}),L_\infty\right) \ll$$

$$\ll \sum_{n\leq m}2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}\varepsilon_{M_n}(T(\triangle\,Q_n^{\gamma'})_2,L_\infty) \ll$$

$$\ll \sum_{n\leq m}2^{-n\,r_1}\,n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}\,2^{-C_\beta M\,2^{-\frac{1}{2}(m-n)}|\triangle Q_n^{\gamma'}|^{-1}}n^{1/2} = J_2. \tag{16}$$

Далее, приняв во внимание соотношения $|\triangle\,Q_n^{\gamma'}| \asymp 2^n\,n^{\nu-1}$ и $M \asymp 2^m\,m^{\nu-1}$, легко убедиться, что величина J_2 допускает оценку

$$J_2 \ll 2^{-m\,r_1}\,m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}m^{1/2}. \tag{17}$$

Чтобы оценить второе слагаемое правой части (15), также воспользуемся соотношением (7) и леммой 1. Выполнив элементарные преобразования, получим

$$\sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\Big(S_{\triangle Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_\infty\Big) \ll$$

$$\ll \sum_{m<n\le m_1} 2^{-n r_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \varepsilon_{M_n}\big(T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_2, L_\infty\big) \ll$$

$$\ll \sum_{m<n\le m_1} 2^{-n r_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} |\triangle\, Q_n^{\gamma'}|^{1/2} M^{-1/2} 2^{\beta(n-m)} n^{1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 m} m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} m^{1/2}. \tag{18}$$

Таким образом, с учетом (15) – (18) приходим к оценке

$$I_1 \ll 2^{-m r_1}\, m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} m^{1/2}. \tag{19}$$

Наконец, подставив (14) и (19) в (9) и приняв во внимание, что $M \asymp 2^m m^{\nu-1}$, придем к искомой оценке величины $\varepsilon_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty)$:

$$\varepsilon_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \ll 2^{-m r_1}\, m^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} m^{1/2} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+} \sqrt{\log M}.$$

Теорема доказана.

Теперь приведем некоторые комментарии к полученному результату. Для начала отметим, что с помощью рассуждений, которые применялись при доказательстве оценки (4), можно получить такое утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ *и* $r_1 > 1$. *Тогда*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+}, \tag{20}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. В целом доказательство оценки (20) является фактически повторением схемы доказательства теоремы 1, и поэтому здесь мы ограничимся указанием только тех изменений, которые необходимо внести в проводимые рассуждения. Так, при выводе аналога оценки (10) нужно вместо теоремы А использовать следующее утверждение.

Теорема А$'$ [38]. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \|f(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\|_q \asymp 2^{-n(r_1-1/p+1/q)}\, n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+}.$$

Далее, при доказательстве оценок аналогичных (16) – (18) вместо леммы 1 нужно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1$'$ [21]. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q < \infty$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\varepsilon_M\big(T(\triangle\, Q_n^\gamma)_p, L_q\big) \ll \begin{cases} |\triangle\, Q_n^\gamma|\, M^{-1} \ln^2\big(|\triangle\, Q_n^\gamma|\, M^{-1}\big), & 2M \le |\triangle\, Q_n^\gamma|, \\ 2^{-M|\triangle Q_n^\gamma|^{-1}}, & 2M \ge |\triangle\, Q_n^\gamma|. \end{cases} \tag{21}$$

Заметим, что такого же вида оценки имеют место и по отношению к множеству полиномов $T(\triangle\, Q_n^{\gamma'})_p$ при соответствующей замене в правой части (21) множества $\triangle\, Q_n^\gamma$ на $\triangle\, Q_n^{\gamma'}$.

Наконец значение β, которое используется при доказательстве теоремы 1, следует задать по формуле $\beta = \dfrac{1}{2}\min\big\{(r_1-1), 1\big\}$.

Теорема доказана.

В связи с оценкой (20) обратим внимание на то обстоятельство, что величины $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$, $1 < p,\, q < \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, ранее исследовались Динь Зунгом [28] и при этом был получен следующий результат.

Теорема 2′. *Пусть* $1 < p,\, q < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$ *и* $r_1 > 0$. *Тогда*:

1) при $r_1 > \dfrac{1}{p}$

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-\frac{1}{\max\{p,\theta\}}};$$

2) при $r_1 > \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+$ и $\theta \geq \min\{2, q\}$

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \tag{22}$$

Важно отметить, что методы получения оценок (20) и (22) существенно различаются и, кроме того, легко убедиться, что в некоторых случаях оценки, полученные в теореме 2, точнее оценок (22).

Отметим также, что утверждения, аналогичные теоремам 1, 2, для классов H^r_p и $W^r_{p,\alpha}$ получены в работах [20, 21, 27].

Для доказательства следующего утверждения нам понадобятся еще некоторые дополнительные обозначения.

Пусть

$$\overline{\rho}(s) = \big\{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\big\}$$

и

$$T(\overline{\rho}(s)) = \left\{t \colon\ t(x) = \sum_{k \in \overline{\rho}(s)} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}\right\}.$$

Заметим, что каждый полином $t \in T(\overline{\rho}(s))$, $s_j \geq 2$, $j = \overline{1,d}$, может быть представлен в виде

$$t(x) = e^{i(k^s,x)} t^1(x),$$

где $k^s = (k_1^{s_1}, \ldots, k_d^{s_d})$, $k_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, $j = \overline{1,d}$ и $t^1(x)$ — полином степени 2^{s_j-2} по переменной x_j, $j = \overline{1,d}$.

Для $m = (m_1, \ldots, m_d)$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, обозначим через $RT(m)$ множество действительных тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{\substack{|k_j| \leq m_j \\ j=\overline{1,d}}} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Пусть $T'(\overline{\rho}(s))$ обозначает множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = e^{i(k^s,x)} t^1(x), \quad t^1 \in RT(2^{s-2}).$$

Для четного n определим множества

$$\Omega_n^* = \big\{ s \colon \|s\|_1 = n,\ s_j - \text{четные числа},\ j = \overline{1,d} \big\},$$

$$Q_n' = \bigcup_{s \in \Omega_n^*} \overline{\rho}(s),$$

$$T'(Q_n') = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{s \in \Omega_n^*} e^{i(k^s,x)} t_s^1(x), \ \ t_s^1 \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $r_1 > 0$, $1 \le \theta < \infty$. *Тогда*

$$\varepsilon_M(B_{\infty,\theta}^r, L_1) \gg M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1/2 - 1/\theta}. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, что для доказательства оценки (23) достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. Установим сначала оценку величины $\varepsilon_M(B_{\infty,\theta}^r, L_2)$. С этой целью рассмотрим множество тригонометрических полиномов

$$T'(Q_n')_\infty = \big\{ t \in T'(Q_n') \colon \|t_s^1\|_\infty \le 1 \big\}.$$

Для $f \in L_2(\pi_d)$ определим функции

$$f_n^R(x) = \sum_{s \in \Omega_n^*} e^{i(k^s,x)} \mathrm{Re}\Big(\overline{\delta}_s(f,x) e^{-i(k^s,x)} \Big),$$

$$f_n^I(x) = \sum_{s \in \Omega_n^*} e^{i(k^s,x)}\, \mathrm{Im}\Big(\overline{\delta}_s(f,x) e^{-i(k^s,x)} \Big),$$

где

$$\overline{\delta}_s(f,x) = \sum_{k \in \overline{\rho}(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}.$$

Тогда $f_n^R \in T'(Q_n')$ и для любого $t \in T'(Q_n')$ имеем

$$\big\| f(\cdot) - t(\cdot) \big\|_2^2 \ge \big\| f_n^R(\cdot) + i\, f_n^I(\cdot) - t(\cdot) \big\|_2^2 =$$

$$= \sum_{s \in \Omega_n^*} \big\| t_s(\cdot) - \mathrm{Re}(\overline{\delta}_s(f,\cdot) e^{-i(k^s,\cdot)}) - i\, \mathrm{Im}(\overline{\delta}_s(f,\cdot) e^{-i(k^s,\cdot)}) \big\|_2^2 \ge \big\| t(\cdot) - f_n^R(\cdot) \big\|_2^2.$$

Отсюда делаем вывод, что при рассмотрении ε-сети множества $T'(Q_n')_\infty$ в L_2 можно считать, что ее элементы принадлежат $T'(Q_n')$.

Далее, положим $M = |Q_n'| \asymp 2^n n^{d-1}$ и воспользуемся оценкой из [21]:

$$\varepsilon_M(T'(Q_n')_\infty 2^{-r_1 n}, L_2) \gg 2^{-r_1 n} |\Omega_n^*|^{1/2} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + 1/2}. \tag{24}$$

Поскольку имеет место включение

$$T'(Q'_n)_\infty 2^{-r_1 n} \subset C_1(d) H^r_\infty,$$

для любой функции $f \in T'(Q'_n)_\infty 2^{-r_1 n}$ выполнено соотношение (см. [31, с. 32])

$$\|A_s(f,\cdot)\|_\infty \ll 2^{-(r,s)}, \quad s \in \Omega^*_n. \tag{25}$$

Поэтому, воспользовавшись (25), для $f \in T'(Q'_n)_\infty 2^{-r_1\, n}$ будем иметь

$$\|f\|_{B^r_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in \Omega^*_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,\cdot)\|^\theta_\infty \right)^{1/\theta} \ll \left(\sum_{s \in \Omega^*_n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}. \tag{26}$$

Из (26) заключаем, что

$$T'(Q'_n)_\infty 2^{-r_1 n} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \subset C_2(d) B^r_{\infty,\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty. \tag{27}$$

Таким образом, согласно (27) и (24) можем записать

$$\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_2) \gg \varepsilon_M\Big(T'(Q'_n)_\infty 2^{-r_1\, n} n^{-\frac{d-1}{\theta}}, L_2\Big) \gg$$

$$\gg 2^{-r_1 n} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \tag{28}$$

Теперь установим оценку (23). Непосредственно из (28) следует, что в $T'(Q'_n)_\infty 2^{-r_1 n} n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ найдется 2^M функций $\{f_j(\cdot)\}_{j=1}^{2^M}$ таких, что для $i \ne j$ будет выполнена оценка

$$\big\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\big\|_2 \gg 2^{-r_1\, n}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{29}$$

Тогда легко убедиться, что из (29) следует оценка

$$\big\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\big\|_1 \gg 2^{-r_1\, n}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{30}$$

Действительно, воспользовавшись неравенством [40, с. 330]

$$\|f(\cdot)\|_a \le \|f(\cdot)\|_1^\alpha \|f(\cdot)\|_b^{1-\alpha}, \quad f \in L_b, \quad 1 < a < b, \qquad \alpha = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)^{-1},$$

можем записать

$$\|f(\cdot)\|_2 \le \|f(\cdot)\|_1^{1/3} \|f(\cdot)\|_4^{2/3}.$$

Отсюда имеем

$$\|f(\cdot)\|_1^{1/3} \ge \|f(\cdot)\|_2 \|f(\cdot)\|_4^{-2/3}. \tag{31}$$

Далее, пусть

$$f_l(x) = 2^{-r_1 n} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \varphi_l(x), \quad l = \overline{1, 2^M},$$

где $\varphi_l \in T'(Q'_n)_\infty$. Тогда в силу леммы A для $i \ne j$ будем иметь

$$\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\|_4 \ll \left(\sum_{s\in\Omega_n^*} \|\delta_s((f_i - f_j), \cdot)\|_4^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 n} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s\in\Omega_n^*} \|\delta_s((\varphi_i - \varphi_j), \cdot)\|_\infty^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 n} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s\in\Omega_n^*} (\|\delta_s(\varphi_i, \cdot)\|_\infty + \|\delta_s(\varphi_j, \cdot)\|_\infty)^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 n} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s\in\Omega_n^*} 1 \right)^{1/2} \asymp 2^{-r_1 n} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{32}$$

Таким образом, используя оценки (29), (32) и неравенство (31), получаем

$$\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\|_1 \gg 2^{-r_1 n}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Отсюда следует искомая оценка

$$\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_1) \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Теорема доказана.

Отправляясь от оценок (4) и (23), можно сформулировать такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тогда*

$$M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta} \ll \varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta} \log^{1/2} M.$$

Покажем, что в одномерном случае можно получить точную по порядку оценку величины $\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty)$.

Теорема 4. *Пусть* $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$, $2 \le p \le \infty$. *Тогда при* $r_1 > \dfrac{1}{2}$

$$\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}. \tag{33}$$

Доказательство. Поскольку в силу теоремы 3

$$\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \gg M^{-r_1}, \qquad p \ge 1, \quad r_1 > 0, \tag{34}$$

и (см. [33], гл. 4, §4.4)

$$d_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1+(1/p-1/2)_+}, \qquad 1 \le p, \theta \le \infty, \quad r_1 > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}, \tag{35}$$

используя лемму Г, из (34) и (35) получаем (33).

Теорема доказана.

В заключение работы приведем еще один результат, в котором содержится, в частности, оценка колмогоровского поперечника класса $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_1.

Теорема 5. *Пусть* $2 \le p \le \infty$, $1 \le q < p$, $2 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \tag{36}$$

Доказательство. Пусть $\theta \in [2, \infty)$. Тогда, с одной стороны, в силу теорем 4.2.8, 4.2.11 [33] (гл. 4, § 4.2) имеем

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}, \quad 1 \le q < p < \infty, \quad p \ge 2. \tag{37}$$

С другой стороны, согласно теореме 3

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg \varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_1) \gg M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \tag{38}$$

Следовательно, применив лемму Г по отношению к (37) и (38), можем записать

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Пусть теперь $\theta = \infty$. Тогда, снова используя лемму Г применительно к оценкам

$$\varepsilon_M(H^r_\infty, L_1) \gg M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2}$$

и

$$d_M(H^r_p, L_q) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2}, \qquad 1 < q \le p < \infty, \quad p \ge 2$$

(см., например, [21, 41] соответственно), получаем (36).

Теорема доказана.

Важно отметить, что в (36) содержится новая оценка колмогоровского поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_1)$. Для всех остальных значений параметров, которые фигурируют в условии теоремы 5, порядки величин $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ были известны ранее (см., например, [33], гл. 4, § 4.2).

1. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
5. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 2. – С. 3 – 86.
6. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. – М.: Физматгиз, 1959. – 228 с.
7. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quant. Approxim. – New York: Acad. Press, 1980. – P. 163 – 176.
8. *Колмогоров А. Н.* Асимптотические характеристики некоторых вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. – 1956. – **108**, № 3. – С. 385 – 389.
9. *Витушкин А. Г.* К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. – 1955. – **95**, № 4. – С. 701 – 704.
10. *Колмогоров А. Н.* Оценки минимального числа элементов ε-сетей в различных функциональных пространствах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, № 1. – С. 192 – 193.
11. *Витушкин А. Г.* Абсолютная энтропия метрических пространств // Докл. АН СССР. – 1957. – **117**, № 2. – С. 745 – 748.
12. *Тихомиров В. М.* Об ε-энтропии некоторых классов аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1957. – **117**, № 2. – С. 191 – 194.

13. *Бабенко К. И.* О энтропии одного класса аналитических функций // Науч. докл. высш. шк. – 1958. – **1**, № 2. – С. 9 – 16.
14. *Ерохин В. Д.* Об асимптотике ε-энтропии аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1958. – **120**, № 5. – С. 949 – 952.
15. *Смоляк С. А.* ε-Энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ в метрике L_2 // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 1. – С. 30 – 33.
16. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Кусочно-полиномиальные приближения классов W_p^{α} // Мат. сб. – 1967. – **73**, № 3. – С. 331 – 355.
17. *Бахвалов Н. С.* Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 6. – С. 655 – 664.
18. *Трибель Х.* Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева – Бесова // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 1. – С. 27 – 41.
19. *Динь Зунг.* Приближение гладких функций многих переменных средствами гармонического анализа: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – М., 1985. – 312 с.
20. *Темляков В. Н.* Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Докл. АН СССР. – 1988. – **301**, № 2. – С. 288 – 291.
21. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
22. *Belinskii E. S.* Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Anal. Math. – 1989. – **15**. – P. 67 – 74.
23. *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1990. – С. 22 – 37.
24. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
25. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 6. – С. 922 – 925.
26. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // E. J. Approxim. – 1996. – **2**, № 1. – P. 89 – 98.
27. *Belinskii E. S.* Estimates of entropy numbers and gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approxim. Theory. – 1998. – **93**. – P. 114 – 127.
28. *Dinh Dung.* Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension // J. Complexity. – 2001. – **17**, № 2. – P. 467 – 492.
29. *Temlyakov V. N.* An inequality for the entropy numbers and its application // J. Approxim. Theory. – 2013. – **173**. – P. 110 – 121.
30. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – P. 107 – 111.
31. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
32. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ., 1993. – 419 p.
33. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
34. *Романюк А. С.* Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91 – 116.
35. *Pisier G.* The volume of convex bodies and Banach space geometry. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
36. *Pajor A., Tomczak-Jaegermann N.* Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, № 4. – P. 637 – 642.
37. *Carl B.* Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. – 1981. – **41**. – P. 290 – 306.
38. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
39. *Харди Г., Литтлвуд И. Е., Пойа Дж.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
40. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
41. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\overline{\alpha}}$ и $\widetilde{H}_p^{\overline{\alpha}}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.

Получено 26.02.15