УДК 517.5

Д. М. Бушев, Ю. І. Харкевич (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МАЙЖЕ СКРІЗЬ ЗГОРТКИ ФУНКЦІЇ З ДЕЛЬТАПОДІБНИМ ЯДРОМ ДО ЦІЄЇ ФУНКЦІЇ

We establish sufficient conditions for the convergence of the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. These conditions are used for the construction of the subspaces of solutions of differential equations and systems of these equations isometric to the spaces of real functions.

Установлены достаточные условия сходимости свертки функции с дельтаподобным ядром к этой функции, которые используются для построения подпространств решений дифференциальных уравнений и их систем, изометрических пространствам действительных функций.

У статті [1] побудовано простори функцій від $n+k$ змінних, ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на n-вимірному евклідовому просторі. У цій роботі ми будемо використовувати позначення із статті [1], а саме, співвідношення під номером n із [1] будемо позначати $I.n$.

Позначимо через $\widehat{L}_p$, L_p простори функцій, визначених на множині дійсних чисел, модулі p-го степеня яких локально інтегровні й інтегровні на всій дійсній осі з нормами

$$\|f\|_{\widehat{L}_p} = \|f\|_{\widehat{p}} = \sup_{a\in E}\left(\int\limits_a^{a+2\pi} |f(x)|^p\right)^{1/p}, \quad \|f\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\right)^{1/p},$$

$\tilde{L}_p$ — простори 2π-періодичних функцій з нормами

$$\|f\|_{\tilde{p}} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Якщо $p=1$, то $\widehat{L}_1 = \widehat{L}$ і $\tilde{L}_1 = \tilde{L}$.

Нехай нерівність $\overline{y} > \overline{0}$ означає, що всі координати вектора $\overline{y}(y_1,\ldots,y_k)$ є невід'ємними і хоча б одна з них додатна.

Позначимо через $L_1M_k = LM_k$ і $\tilde{L}_1M_k = \tilde{L}M_k$ простори функцій від $k+1$ змінної з нормами

$$\|f\|_{LM_k} = \sup_{\overline{y}(y_1,\ldots,y_k)>\overline{0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x,y_1,\ldots,y_k)|dx,$$

$$\|f\|_{\tilde{L}M_k} = \sup_{\overline{y}>\overline{0}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x,y_1,\ldots,y_k)|dx,$$

$I_{\overline{y}^k}(x) = I(x,y_1,\ldots,y_k) \in LM_k$ і $\tilde{K}_{\overline{y}^k}(x) = \tilde{K}(x,y_1,\ldots,y_k) \in \tilde{L}M_k$ — такі дельтаподібні ядра, що при кожному $\overline{y} > \overline{0}$, $a>0$ і $0<\Delta<\pi$ справджуються рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\overline{y}^k}(x)dx = 1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{K}_{\overline{y}^k}(x)dx,$$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{E\setminus[-a,a]} I_{\overline{y}^k}(x)dx = \lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{\Delta<|x|\leq\pi} \tilde{K}_{\overline{y}^k}(x)dx = 0.$$

Для побудови підпросторів розв'язків диференціальних рівнянь і їх систем, ізометричних просторам дійсних функцій, будуть необхідні достатні умови збіжності майже скрізь при $\overline{y} \to \to \overline{0}+\overline{0}$ функцій $(f * I_{\overline{y}^m})(x)$ (див. I.6, I.10, I.13, I.15) до їх граничних значень $f(x)$. Відомо (див., наприклад, [2, с. 236 – 238]), що майже кожна точка $x \in [a,b]$ сумовної на сегменті $[a,b]$ функції $f(x)$ є її точкою Лебега, тобто точкою, для якої має місце рівність

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|dt = 0, \tag{1}$$

і кожна точка неперервності функції $f(x)$ є її точкою Лебега. Тобто майже кожна точка x функції $f(x) \in \widehat{L}_p$ (див. I.3) є її точкою Лебега, і з рівності (1) випливає, що

$$\left((\forall\varepsilon>0)(\exists\eta(x,\varepsilon)>0): \sup_{|h|<\eta(x,\varepsilon)}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|dt\right\}<\varepsilon\right). \tag{2}$$

Достатні умови збіжності майже скрізь згортки періодичної функції $f(x) \in \tilde{L}_p$ (див. I.2) з дельтаподібними ядрами окремого вигляду встановлено, наприклад, у [3, с. 21]. Умови збіжності майже скрізь згортки 2π-періодичної функції $\tilde{f}(x) \in \tilde{L}_p$ (див. I.5) з дельтаподібними ядрами при деяких додаткових обмеженнях на ядро розглянуто в [4, с. 21].

У даній роботі ми встановимо достатні умови збіжності майже скрізь згортки функції $f(x) \in \hat{L}_p$ з дельтаподібним ядром до функції $f(x)$.

Теорема 1. *Нехай $I_{\overline{y}^k}(x)$ — дельтаподібне ядро (див.* I.9, I.10) *і $f \in \widehat{L}_p$, $p \geq 1$. Якщо для кожного $\eta > 0$ і $\overline{y} > \overline{0}$ знайдеться незростаюча невід'ємна на інтервалі $(0,+\infty)$ функція $\Phi_{\overline{y}^k}(|x|) = \Phi(|x|, y_1, \ldots, y_k)$ з простору LM_k (див.* I.7) *така, що для кожного дійсного $x \neq 0$ виконується нерівність*

$$|I_{\overline{y}^k}(x)| \leq \Phi_{\overline{y}^k}(|x|) \tag{3}$$

і

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{|x|>\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(|x|)dx = 0, \tag{4}$$

то в кожній точці Лебега функції $f(x)$, а отже майже скрізь, справджується рівність

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} (f * I_{\overline{y}^k})(x) = f(x). \tag{5}$$

Доведення. Нехай x — точка Лебега функції $f(x) \in \widehat{L}_p$. Використовуючи (I.9) і (3), отримуємо

$$|(f * I_{\overline{y}^k})(x) - f(x)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_{\overline{y}^k}(x)||f(x-t) - f(x)|dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\eta}^{\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(|t|)|f(x-t) - f(x)|dt + |f(x)| \int\limits_{|t|>\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(|t|)dt + \int\limits_{|t|>\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(|t|)|f(x-t)|dt, \qquad (6)$$

де для скорочення запису позначено $\eta = \eta(x, \varepsilon)$. Відомо (див., наприклад, [2, с. 262, 263]), що якщо функція $f(t)$ сумовна на сегменті $[a, b]$ і

$$\mu(f) = \sup_{0<h\leq b-a} \left\{ \frac{1}{h} \left| \int\limits_{a}^{a+h} f(t)dt \right| \right\} < \infty, \qquad (7)$$

то для кожної невід'ємної незростаючої сумовної на проміжку $(a, b]$ функції $g(t)$ маємо

$$\left| \int\limits_{a}^{b} f(t)g(t)dt \right| \leq \mu(f) \int\limits_{a}^{b} g(t)dt. \qquad (8)$$

Покладемо $f_1(t) = |f(x+t) - f(x)|$ і $f_2(t) = |f(x-t) - f(x)|$. Оскільки на інтервалі $(0, \eta)$ функція $\Phi_{\overline{y}^k}(t)$ задовольняє умови сформульованого вище твердження, то, використовуючи співвідношення (7) і (8), означення норми у просторі LM_k і заміну змінних, отримуємо

$$\int\limits_{0}^{\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(t)|f(x+t) - f(x)|dt \leq \mu(f_1) \int\limits_{0}^{\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt \leq$$

$$\leq \left\|\Phi_{\overline{y}^k}\right\|_{LM_k} \sup_{0<h\leq\eta} \left\{ \frac{1}{h} \int\limits_{0}^{h} |f(x+t) - f(x)|dt \right\}, \qquad (9)$$

$$\int\limits_{-\eta}^{0} \Phi_{\overline{y}^k}(|t|)|f(x+t) - f(x)|dt = \int\limits_{0}^{\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(t)|f(x-t) - f(x)|dt \leq$$

$$\leq \mu(f_2) \int\limits_{0}^{\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt \leq \left\|\Phi_{\overline{y}^k}\right\|_{LM_k} \sup_{0<|h|\leq\eta} \left\{ \frac{1}{h} \int\limits_{0}^{h} |f(x-t) - f(x)|dt \right\}. \qquad (10)$$

З (2), (9) і (10) випливає, що в кожній точці Лебега функції $f(x) \in \widehat{L}_p$ виконується нерівність

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(|t|)|f(x+t) - f(x)|dt \leq 2\varepsilon \left\|\Phi_{\overline{y}^k}\right\|_{LM_k}. \qquad (11)$$

Якщо $f \in \widehat{L}_p$, то при довільному $p \geq 1$, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\|f\|_{\widehat{L}} = \sup_{a\in E} \int\limits_{a}^{a+2\pi} |f(t)|dt \leq \sup_{a\in E} \left(\int\limits_{a}^{a+2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int\limits_{0}^{2\pi} dt \right)^{1/q} = (2\pi)^{1/q} \|f\|_{\widehat{p}}, \qquad (12)$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ \widehat{L}_p \subseteq \widehat{L}$ і згідно з (12)

$$\int\limits_{\eta}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)|f(x-t)|dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\eta+2\pi k}^{\eta+2\pi(k+1)} \Phi_{\overline{y}^k}(t)|f(x-t)|dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \max_{t\in[\eta+2\pi k,\eta+2\pi(k+1)]} \Phi_{\overline{y}^k}(t) \int\limits_{\eta+2\pi k}^{\eta+2\pi(k+1)} |f(x-t)|dt \leq$$

$$\leq \|f\|_{\widehat{L}} \sum_{k=0}^{\infty} \max_{t\in[\eta+2\pi k,\eta+2\pi(k+1)]} \Phi_{\overline{y}^k}(t) \leq (2\pi)^{1/q} \|f\|_{\widehat{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \max_{t\in[\eta+k,\eta+k+1]} \Phi_{\overline{y}^k}(t). \qquad (13)$$

Оскільки $\Phi_{\overline{y}^k}(|t|)$ є абсолютно інтегровною, невід'ємною і незростаючою на $(0,+\infty)$, то $\lim_{t\to\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t) = 0$ і

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max_{t\in[\eta+k,\eta+k+1]} \Phi_{\overline{y}^k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \min_{t\in[\eta+k,\eta+k+1]} \Phi_{\overline{y}^k}(t) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\max_{t\in[\eta+k,\eta+k+1]} \Phi_{\overline{y}^k}(t) - \min_{t\in[\eta+k,\eta+k+1]} \Phi_{\overline{y}^k}(t) \right) \leq \int\limits_{\eta}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt + \Phi_{\overline{y}^k}(\eta), \qquad (14)$$

при $0 < \eta_1 < \eta$

$$\int\limits_{\eta_1}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt > \int\limits_{\eta}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt, \quad \int\limits_{\eta_1}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt > (\eta-\eta_1)\Phi_{\overline{y}^k}(\eta). \qquad (15)$$

Зі співвідношень (13)–(15) випливає, що для кожної функції $f \in \widehat{L}_p$

$$\int\limits_{\eta}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)|f(x-t)|dt < (2\pi)^{1/q} \|f\|_{\widehat{p}} \left(1 + \frac{1}{\eta-\eta_1}\right) \int\limits_{\eta_1}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt, \qquad (16)$$

де $\eta > \eta_1 > 0$ і $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Аналогічно доведемо, що

$$\int\limits_{-\infty}^{-\eta} \Phi_{\overline{y}^k}(|t|)|f(x-t)|dt < (2\pi)^{1/q} \|f\|_{\widehat{p}} \left(1 + \frac{1}{\eta-\eta_1}\right) \int\limits_{\eta_1}^{\infty} \Phi_{\overline{y}^k}(t)dt. \qquad (17)$$

З (6), а також співвідношень (4), (11), (16), (17) випливає, що рівність (5) справджується в кожній точці Лебега функції $f(x)$.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що узагальнені дельтаподібні ядра Абеля – Пуассона (I.48), Гаусса – Вейєрштрасса (I.49) задовольняють умови теореми 1, оскільки мажоруюча функція $\Phi_{\overline{y}^k}(|x|)$ збігається з цими ядрами.

***Наслідок* 1.** *Нехай функції $I(x)$ і $\varphi(\overline{y})$ задовольняють умови леми* 2 *з* [1], *існує невід'ємна незростаюча на інтервалі $(0,\infty)$ функція $\Phi(|x|)$, інтегровна на всій дійсній осі і така, що для кожного $x \neq 0$ виконується нерівність*

$$|I(x)| \leq \Phi(|x|) \tag{18}$$

і $f(x) \in \widehat{L}_p$. Тоді функція $I_{\varphi(\overline{y})}(x) = \dfrac{I\left(\dfrac{x}{\varphi(\overline{y})}\right)}{\varphi(\overline{y})}$ — дельтаподібне ядро, і в кожній точці Лебега функції $f(x)$, а отже майже скрізь, має місце рівність (5).

Доведення. З (18) і інтегровності функції $\Phi(|x|)$ випливає, що функція $I(|x|)$ є абсолютно інтегровною. Тому, згідно з лемою 2 з [1], функція $I_{\varphi(\overline{y})}(x)$ — дельтаподібне ядро. Доведемо, що це ядро задовольняє умови теореми 1. З (18), враховуючи, що функція $\varphi(\overline{y})$ додатна, маємо

$$|I_{\varphi(\overline{y})}(x)| \leq \frac{\Phi\left(\dfrac{x}{\varphi(\overline{y})}\right)}{\varphi(\overline{y})} = \Phi^{\varphi}_{\overline{y}}(|x|). \tag{19}$$

Оскільки функція $\varphi(\overline{y})$ при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ додатна, а $\Phi(|x|)$ невід'ємна і незростаюча на інтервалі $(0,\infty)$, то такою ж є і функція $\Phi^{\varphi}_{\overline{y}}(|x|)$. Використовуючи заміну змінних, отримуємо

$$\int\limits_{\eta}^{\infty} \Phi^{\varphi}_{\overline{y}}(|x|)dx = \int\limits_{\frac{\eta}{\varphi(\overline{y})}}^{\infty} \Phi(t)dt. \tag{20}$$

Оскільки $\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \varphi(\overline{y}) = 0$, то з (20), внаслідок інтегровності функції $\Phi(t)$, випливає, що $\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \displaystyle\int_{\eta}^{\infty} \Phi^{\varphi}_{\overline{y}}(|x|)dt = 0$. Отже, ядро $I_{\varphi(\overline{y})}(x)$ задовольняє умови теореми 1, і в кожній точці Лебега функції $f(x) \in \widehat{L}_p$, а значить майже скрізь, має місце рівність (5).

Наслідок 1 доведено.

Зауважимо, що теорема 1 для функції $\varphi(y) = y$ і для функції $f(x) \in L_p$ випливає з теореми 1.25 із [3, с. 21]. Оскільки для функцій $F(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$ існує невід'ємна мажоруюча функція $\Phi(|x|)$, яка задовольняє умови наслідку 1, то для узагальнених дельтаподібних ядер Фейєра (I.50) в кожній точці Лебега функції $f(x) \in \widehat{L}_p$, згідно з наслідком 1, справджується рівність (5).

Щоб використати теорему 1 або наслідок 1, необхідно для узагальненого ядра вміти будувати мажоранту, яка задовольняє умови теореми 1 або наслідку 1. Встановимо достатні умови збіжності, коли ядро є косинус-перетворенням Фур'є деякої функції. Справедливим є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай при кожному* $\overline{y} > \overline{0}$ *функція* $\psi_{\overline{y}^k}(|u|) = \psi(|u|, \overline{y}) = \psi(|u|, y_1, \ldots, y_k)$ *опукла донизу на проміжку* $[0, \infty)$, $\psi_{\overline{y}^k}(0) = 1$, $\lim_{u\to\infty} \psi_{\overline{y}^k}(|u|) = 0$, *для кожного фіксованого дійсного числа* u *має місце рівність* $\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \psi(|u|, \overline{y}) = 1$ *і* $f(x) \in \widehat{L}_p$, $p \geq 1$. *Тоді для ядра* $\Psi_{\overline{y}^k}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \psi(u, \overline{y}) \cos uxdu$ *в кожній точці Лебега функції* $f(x)$, *а отже майже скрізь, справджується рівність* (5).

Доведення. Згідно з теоремою 1, враховуючи парність функції $\Psi_{\overline{y}^k}(x)$, достатньо встановити, що знайдеться невід'ємна і незростаюча на проміжку $(0, \infty)$ функція $\Phi_{\overline{y}^k}(|x|)$ з простору LM_k така, що для довільних $\overline{y} > \overline{0}$ і $x > 0$ виконується нерівність $\Psi_{\overline{y}^k}(x) \leq \Phi_{\overline{y}^k}(x)$, і при довільному $\eta > 0$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_\eta^\infty \Phi_{\overline{y}^k}(x)dx = 0. \tag{21}$$

Оскільки при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ функція $\psi_{\overline{y}^k}(u)$ опукла донизу на проміжку $[0, +\infty)$, то (див., наприклад, [2, с. 447]) при довільному $\overline{y} > \overline{0}$ і $u > 0$ справджується рівність

$$\psi_{\overline{y}^k}(u) = \psi_{\overline{y}^k}(0) + \int\limits_0^u \psi'_t(t, \overline{y})dt \tag{22}$$

і $\lim_{u\to\infty} \psi_{\overline{y}^k}(u) = 0$, а отже, функція $\psi_{\overline{y}^k}(u)$ є незростаючою і обмеженою на цьому проміжку.

Оскільки функція $\psi_{\overline{y}^k}(u)$ опукла донизу на проміжку $[0, +\infty)$, то з рівності (22) випливає, що функція $\psi_{\overline{y}^k}(u)$ абсолютно неперервна на проміжку $[0, +\infty)$. Тому (див., наприклад, [2, с. 229]) майже при всіх $u \geq 0$

$$\psi'_u(u, \overline{y}) = \psi'_u(u - 0, \overline{y}) = \psi'_u(u + 0, \overline{y}) \leq 0. \tag{23}$$

Інтегруючи частинами, що можливо внаслідок абсолютної неперервності функції $\psi_{\overline{y}^k}(u)$, і використовуючи рівності $\lim_{u\to\infty} \psi_{\overline{y}^k}(|u|) = 0$, $\psi_{\overline{y}^k}(0) = 1$, маємо

$$\Psi_{\overline{y}^k}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(u, \overline{y}) \cos uxdu = -\frac{1}{\pi x}\int\limits_0^\infty \psi'_u(u, \overline{y}) \sin uxdu. \tag{24}$$

Оскільки при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ функція $\psi_{\overline{y}^k}(u)$ опукла донизу на проміжку $[0, +\infty)$, то з леми 6.1.2, встановленої в [5, с. 255], і співвідношення (23) випливає, що функція $-\psi'_u(u, \overline{y})$ при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ є невід'ємною і незростаючою на інтервалі $(0, +\infty)$. Тому з (24) випливає, що при $x > 0$

$$0 \leq \Psi_{\overline{y}^k}(x) \leq \frac{1}{\pi x}\int\limits_0^{\pi/x} -\psi'_u(u, \overline{y}) \sin uxdu = \frac{1}{\pi x^2}\int\limits_0^\pi -\psi'_t\left(\frac{t}{x}, \overline{y}\right) \sin tdt = \Phi_{\overline{y}^k}(x). \tag{25}$$

З нерівності (23) випливає, що при довільному $x > 0$, $\overline{y} > \overline{0}$ і $0 \leq t \leq \pi$ виконується нерівність

$$-\left(\psi'_t\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right)\sin t\right)/x^2 \geq 0. \tag{26}$$

З рівності (25), використовуючи зміну порядку інтегрування, що можливо на підставі нерівності (26) (див., наприклад, [2, с. 335]), заміну змінних і рівності $\lim_{x\to\infty}\psi\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right) = 1$, $\lim_{x\to 0}\psi\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right) = 0$, при довільному $\overline{y} > \overline{0}$ і $\eta > 0$ отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \Phi_{\overline{y}^k}(x)dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2}\psi'_t\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right)dx\right)\sin t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\psi'_x\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right)\right)d\left(\frac{t}{x}\right)\sin t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}\left(\lim_{x\to\infty}\psi\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right) - \lim_{x\to 0}\psi\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right)\right)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt < 1, \tag{27}$$

$$\int\limits_\eta^\infty \Phi_{\overline{y}^k}(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}\left(1-\psi\left(\frac{t}{\eta},\overline{y}\right)\right)dt. \tag{28}$$

Із (27) випливає, що функція $\Phi_{\overline{y}^k}(|x|)$ належить простору LM_k. Оскільки при довільному $\overline{y} > \overline{0}$ и $0 \leq t \leq \pi$ виконуються нерівності

$$0 \leq \frac{\sin t}{t}\left(1-\psi\left(\frac{t}{\eta},\overline{y}\right)\right) < \frac{\sin t}{t} < 1, \tag{29}$$

то з рівності (28), враховуючи співвідношення (29), рівність $\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}}\psi(|u|,\overline{y}) = 1$ і використовуючи теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла (див., наприклад, [6, с. 284, 288]), одержуємо рівність (21).

Функції $f(u,x,\overline{y}) = \psi(u,\overline{y})\cos ux$ і $f'_x(u,x,\overline{y}) = -u\psi(u,\overline{y})\sin ux$ при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ неперервні на множині $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, а функція $a(x) = \dfrac{\pi}{x}$ є диференційовною на інтервалі $(0,+\infty)$ і $a'(x) = -\dfrac{\pi}{x^2}$. Тому згідно з теоремою про диференціювання по параметру із змінними межами інтегрування (див., наприклад, [7, с. 272]), функція $\Phi_{\overline{y}^k}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/x}\psi(u,\overline{y})\cos ux du$ диференційовна за змінною x на інтервалі $(0,+\infty)$ і

$$(\Phi_{\overline{y}^k}(x))'_x = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_0^{\pi/x} u\psi(u,\overline{y})\sin ux du + \frac{\pi}{x^2}\psi\left(\frac{\pi}{x},\overline{y}\right)\right). \tag{30}$$

Використовуючи заміну змінних, отримуємо

$$\int\limits_0^{\pi/x} u\psi(u,\overline{y})\sin uxdu = \frac{1}{x^2}\int\limits_0^{\pi} t\psi\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right)\sin tdt. \tag{31}$$

Оскільки при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ функція $\psi_{\overline{y}^k}(u)$ не зростає на $[0,+\infty)$, то при $x > 0$ і $0 \le t \le \pi$ виконується нерівність

$$\psi\left(\frac{t}{x},\overline{y}\right) \ge \psi\left(\frac{\pi}{x},\overline{y}\right). \tag{32}$$

Зі співвідношень (31) і (32) випливає, що при довільному $\overline{y} > \overline{0}$ і $x > 0$

$$\int\limits_0^{\pi/x} u\psi(u,\overline{y})\sin uxdu \ge \frac{\psi(\pi/x,\overline{y})}{x^2}\int\limits_0^{\pi} t\sin tdt = \frac{\pi\psi(\pi/x,\overline{y})}{x^2}, \tag{33}$$

а з (30) і (33) — що $(\Phi_{\overline{y}^k}(x))'_x \le 0$. Тому при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ функція $\Phi_{\overline{y}^k}(u)$ не зростає на інтервалі $(0,+\infty)$. Отже, функція $\Phi_{\overline{y}^k}(|x|)$ належить простору LM_k, є незростаючою і невід'ємною на інтервалі $(0,+\infty)$, при довільному $\overline{y} > \overline{0}$ і $x > 0$ має місце нерівність $\Psi_{\overline{y}^k}(x) \le$ $\le \Phi_{\overline{y}^k}(x)$ і при довільному $\eta > 0$ справедливою є рівність (21).

Теорему 2 доведено.

Наслідок 2. *Нехай* $f(x) \in \widehat{L}_p$, $p \ge 1$,

$$\psi_{\overline{y}^k}(|u|) = \psi(|u|,\overline{y}) = a_{\overline{y}^k}(|u|) - b_{\overline{y}^k}(|u|) = a(|u|,\overline{y}) - b(|u|,\overline{y}), \tag{34}$$

де при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ *функції* $a(|u|,\overline{y})$ *і* $b(|u|,\overline{y})$ *опуклі донизу на проміжку* $[0,+\infty)$,

$$\lim_{u\to\infty} a(|u|,\overline{y}) = \lim_{u\to\infty} b(|u|,\overline{y}) = 0, \tag{35}$$

$$\psi_{\overline{y}^k}(0) = a_{\overline{y}^k}(0) - b_{\overline{y}^k}(0) = 1, \quad a_{\overline{y}^k}(0) < K_1 \tag{36}$$

і для кожного дійсного фіксованого числа u *справджуються рівності*

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} a(|u|,\overline{y}) = a(0,\overline{0}) \quad \lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} b(|u|,\overline{y}) = b(0,\overline{0}). \tag{37}$$

Тоді функція

$$\Psi_{\overline{y}^k}(u) = F^{-1}(\psi_{\overline{y}^k}(|u|))(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{\overline{y}^k}(|u|)e^{-iux}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi_{\overline{y}^k}(u)\cos uxdu \tag{38}$$

— дельтаподібне ядро, і в кожній точці Лебега функції $f(x)$, *а отже майже скрізь, має місце рівність* (5).

Доведення. З рівностей (34) і (38) випливає

$$\Psi_{\overline{y}^k}(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(|u|,\overline{y})e^{-iux}du - \int\limits_{-\infty}^{\infty} b(|u|,\overline{y})e^{-iux}du\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty a(|u|, \overline{y}) \cos uxdu - \int_0^\infty b(|u|, \overline{y}) \cos uxdu \right) = A_{\overline{y}^k}(x) - B_{\overline{y}^k}(x), \tag{39}$$

$$|\Psi_{\overline{y}^k}(x)| \le |A_{\overline{y}^k}(x)| + |B_{\overline{y}^k}(x)|. \tag{40}$$

Міркуючи, як і при доведенні теореми 1, встановимо, що функції $A_{\overline{y}^k}(x)$ і $B_{\overline{y}^k}(x)$ невід'ємні, інтегровні на всій дійсній осі і неперервні, за винятком, можливо, точки $x = 0$. Тоді з (40), згідно з формулами обернення (I.70), використовуючи (36), маємо

$$\int_{-\infty}^\infty |\Psi_{\overline{y}^k}(x)| dx \le \int_{-\infty}^\infty A_{\overline{y}^k}(x) dx + \int_{-\infty}^\infty B_{\overline{y}^k}(x) dx = a(0, \overline{y}) + b(0, \overline{y}) < 2K_1 - 1, \tag{41}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \Psi_{\overline{y}^k}(x) dx = a(0, \overline{y}) - b(0, \overline{y}) = 1. \tag{42}$$

При доведенні рівності $\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int_{|\overline{x}|>\eta} |\Psi_{\overline{y}^k}(x)| dx = 0$ в наслідку 6 з [1] використовувалась рівність $\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \psi(|u|, \overline{y}) = \psi(|u|, \overline{0}) = 1$. Міркуючи аналогічно і використовуючи рівності (37), переконуємося, що для кожного $\eta > 0$ справджується рівність

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int_{|\overline{x}|>\eta} |A_{\overline{y}^k}(x)| dx = \lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int_{|\overline{x}|>\eta} |B_{\overline{y}^k}(x)| dx = 0. \tag{43}$$

Зі співвідношень (40) і (43) випливає, що для довільного $\eta > 0$ має місце рівність

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int_{|\overline{x}|>\eta} |\Psi_{\overline{y}^k}(x)| dx = 0, \tag{44}$$

а з (41), (42) і (44) — що функція $\Psi_{\overline{y}^k}(x)$ є дельтаподібним ядром.

Для доведення рівності (5), згідно з теоремою 1, враховуючи парність функції $\Psi_{\overline{y}^k}(x)$, достатньо встановити, що знайдеться незростаюча невід'ємна на $(0, +\infty)$ функція $\Phi_{\overline{y}^k}(x)$ з простору LM_k така, що для довільних $\overline{y} > \overline{0}$ і $x > 0$ має місце нерівність $\Psi_{\overline{y}^k}(x) \le \Phi_{\overline{y}^k}(x)$ і при довільному $\eta > 0$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int_\eta^\infty \Phi_{\overline{y}^k}(x) dx = 0. \tag{45}$$

З (39) і (40), міркуючи, як і при доведенні леми 2, і використовуючи рівність (35), отримуємо, що при $\overline{y} > \overline{0}$, $x > 0$ і $\eta > 0$ мають місце співвідношення

$$|\Psi_{\overline{y}^k}(x)| \le -\frac{1}{\pi x} \left(\int_0^{\pi/x} a'(u, \overline{y}) \sin uxdu + \int_0^{\pi/x} b'(u, \overline{y}) \sin uxdu \right) = \Phi^a_{\overline{y}^k}(x) + \Phi^b_{\overline{y}^k}(x), \tag{46}$$

де при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ функції $\Phi^a_{\overline{y}^k}(x)$ і $\Phi^b_{\overline{y}^k}(x)$ невід'ємні і незростаючі на $(0, +\infty)$, такі, що

$$\int\limits_0^\infty \Phi^a_{\overline{y}^k}(x)dx = \frac{1}{\pi}a(0,\overline{y})\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt < a(0,\overline{y}),$$
$$\int\limits_0^\infty \Phi^b_{\overline{y}^k}(x)dx = \frac{1}{\pi}b(0,\overline{y})\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt < b(0,\overline{y}), \tag{47}$$

$$\int\limits_\eta^\infty \Phi^a_{\overline{y}^k}(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}\left(a(0,\overline{y}) - a\left(\frac{t}{\eta},\overline{y}\right)\right)dt,$$
$$\int\limits_\eta^\infty \Phi^b_{\overline{y}^k}(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}(b\left(0,\overline{y}) - b\left(\frac{t}{\eta},\overline{y}\right)\right)dt. \tag{48}$$

Зі співвідношень (36) і (47) випливає, що функції $\Phi^a_{\overline{y}^k}(|x|)$ і $\Phi^b_{\overline{y}^k}(|x|)$ належать простору LM_k, а з (37) і (48) — що

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_\eta^\infty \Phi^a_{\overline{y}^k}(x)dx = \lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_\eta^\infty \Phi^b_{\overline{y}^k}(x)dx = 0. \tag{49}$$

Покладемо $\Phi_{\overline{y}^k}(x) = \Phi^a_{\overline{y}^k}(x) + \Phi^b_{\overline{y}^k}(x)$. Тоді з (46) і (49) випливає (45).

Наслідок 2 доведено.

Можна довести, що невід'ємне ядро Бесселя $B_y(x) = F^{-1}((1+u^2)^{-y/2})(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty ((1+ u^2)^{-y/2})\cos uxdx$ (див., наприклад, [8, с. 395, 396]) задовольняє умови наслідку 2.

Умови теореми 2 виконуються для функцій $\psi_{\overline{y}^k}(|x|)$, графіки яких при кожному фіксованому $\overline{y} > \overline{0}$ на проміжку $[0, +\infty)$ мають одну точку перегину. Справедливим є таке твердження.

Наслідок 3. *Нехай $f(x) \in \widehat{L}_p$, $p \geq 1$, функція $\psi(|u|)$ опукла догори і незростаюча на сегменті $[0, c]$ і донизу на проміжку $(c, +\infty)$, точка $P(c, \psi(c))$ є точкою перегину графіка функції $\psi(|u|)$,*

$$\psi(0) = 1, \tag{50}$$

$$\lim_{u\to\infty} \psi(|u|) = 0, \tag{51}$$

$$\min\{\psi'(c-0), \psi'(c+0)\} = K, \tag{52}$$

а функція $\varphi(\overline{y})$ додатна на множині $\Pi^+_{0,k} = \{\overline{y} \in E^k : (\overline{y} > \overline{0})\}$ (I.6) *і*

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \varphi(\overline{y}) = 0. \tag{53}$$

Тоді

$$\psi(|u|) = a(|u|) - b(|u|), \tag{54}$$

де

$$a(|u|) = \begin{cases} \psi(c) + K(|u| - c), & 0 \le |u| \le c, \\ \psi(|u|), & |u| \ge c, \end{cases}$$

$$b(|u|) = \begin{cases} a(|u|) - \psi(|u|), & 0 \le |u| \le c, \\ 0, & |u| \ge c, \end{cases} \tag{55}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(|u|) e^{-iux} du = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \psi(u) \cos uxdu =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{0}^{\infty} a(u) \cos uxdu - \int_{0}^{\infty} b(u) \cos uxdu \right) = A(x) - B(x), \tag{56}$$

функції $A(x)$ і $B(x)$ невід'ємні і інтегровні на всій числовій осі,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = \psi(0) = 1, \tag{57}$$

функція

$$\Psi_{\varphi(\overline{y})}(x) = \frac{1}{\varphi(\overline{y})} \Psi\left(\frac{x}{\varphi(\overline{y})}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varphi(\overline{y})|u|) e^{-iux} du = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \psi(\varphi(\overline{y})|u|) \cos uxdu \tag{58}$$

— дельтаподібне ядро і в кожній точці Лебега функції $f(x)$, а отже майже скрізь, має місце рівність

$$\lim_{\overline{y} \to \overline{0}+\overline{0}} (f * \Psi_{\varphi(\overline{y})})(x) = f(x). \tag{59}$$

Доведення. Відомо (див., наприклад, [5, с. 255]), що кожна функція опукла догори (донизу) на сегменті $[a, b]$, має в кожній точці інтервалу (a, b) скінченні односторонні похідні, які відповідно не зростають (не спадають) на інтервалі (a, b). Тому рівність (52) означає, що похідні $\psi'(c-0)$ і $\psi'(c+0)$ скінченні в точці $u = c$. З рівностей (52), (55) випливає, що на сегменті $[0, c]$ графік функції $a(u)$ збігається з ліво- або правосторонньою дотичною, проведеною до графіка $\psi(u)$ в точці $P(c, \psi(c))$, а на інтервалі $(c, +\infty)$ — з графіком функції $\psi(u)$. Оскільки функція $\psi(u)$ опукла догори на сегменті $[0, c]$ і донизу на проміжку (c, ∞), то з рівностей (54), (55) випливає, що функції $a(u)$ і $b(u)$ опуклі донизу на проміжку $[0, +\infty)$ і згідно з рівностями (55)

$$\lim_{u \to \infty} a(u) = \lim_{u \to \infty} \psi(u) = \lim_{u \to \infty} b(u) = 0. \tag{60}$$

Отже (див., наприклад, [9, с. 167]), функції $A(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} a(u)\cos uxdu$ і $B(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} b(u)\cos uxdu$ інтегровні, невід'ємні на всій дійсній осі, неперервні, за винятком, можливо, точки $x = 0$ і

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x)dx = a(0), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(x)dx = b(0). \tag{61}$$

З рівностей (50), (55), (56) і (61) випливає рівність (57) і внаслідок невід'ємності функцій $A(x)$ і $B(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|dx \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |A(x)|dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |B(x)|dx = a(0) + b(0) = 2(\psi(c) - Kc) - 1. \tag{62}$$

З (57), (62), згідно з лемою 2 з [1], випливає, що функція $\Psi_{\varphi(\overline{y})}(x)$ (I.60) — дельтаподібне ядро. З (50), (51), (54) і (55), враховуючи додатність функції $\varphi(\overline{y})$, при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ отримуємо

$$\begin{gathered}\psi(u,\overline{y}) = \psi(\varphi(\overline{y})u) = a(\varphi(\overline{y})u) - b(\varphi(\overline{y})u), \quad \psi(0,\overline{y}) = a(\varphi(\overline{y})0) - b(\varphi(\overline{y})0) = \psi(0) = 1, \\ a(\varphi(\overline{y})0) = \psi(c) - Kc < K_1, \quad \lim_{u\to\infty} a(\varphi(\overline{y})u) = \lim_{u\to\infty} \psi(\varphi(\overline{y})u) = 0 = \lim_{u\to\infty} b(\varphi(\overline{y})u).\end{gathered} \tag{63}$$

Використовуючи (53), (55) і неперервність функцій $a(|u|)$ і $b(|u|)$ на всій дійсній осі, маємо

$$\begin{gathered}\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} a(\varphi(\overline{y})|u|) = a(0) = \psi(c) - Kc, \\ \lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} b(\varphi(\overline{y})|u|) = b(0) = a(0) - \psi(0) = \psi(c) - Kc - 1.\end{gathered} \tag{64}$$

Оскільки функція $\varphi(\overline{y})$ є додатною, а $a(u)$ і $b(u)$ опуклі донизу на проміжку $[0, +\infty)$, то при кожному $\overline{y} > \overline{0}$ функції $a(\varphi(\overline{y})u)$ і $b(\varphi(\overline{y})u)$ опуклі донизу на проміжку $[0, +\infty)$. Зі співвідношень (63), (64) випливає, що функція $\psi(|u|, \overline{y})$ задовольняє умови наслідку 2.

Наслідок 3 доведено.

Можна перевірити, що функція $\psi^{\alpha}(u) = e^{-|u|^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, задовольняє умови наслідку 3. Тому дельтаподібні узагальнені ядра Гаусса – Вейєрштрасса (I.39) і

$$\Psi^{\alpha}_{\varphi(\overline{y})}(x) = \frac{1}{(\varphi(\overline{y}))^{1/\alpha}}\Psi^{\alpha}\left(\frac{x}{(\varphi(\overline{y}))^{1/\alpha}}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})u^{\alpha}}\cos uxdu \tag{65}$$

задовольняють умови цього наслідку, а при $0 < \alpha \le 1$ ядро (65) задовольняє умови теореми 2.

Далі встановимо достатні умови збіжності для ядра, яке є згорткою дельтаподібних ядер. Якщо рівність (5) має місце для кожного дельтаподібного ядра $(I^i_{y_i})(x) = (I^i)_{y_i}(x)$, $i = \overline{1, n}$, то ця рівність справджується і для згортки цих ядер.

Теорема 3. *Нехай дельтаподібні ядра $(I^i)_{y_i}(x)$, $i = \overline{1, n}$, задовольняють умови теореми 1 і $f \in \widehat{L}_p$, $p \ge 1$. Тоді в кожній точці Лебега функції $f(x)$, а отже майже скрізь, справджується рівність*

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} (((I^1)_{y_1} * \ldots * (I^n)_{y_n}) * f)(x) = f(x). \tag{66}$$

Доведення. Згідно з наслідком 3 з [1], функція $I_{\overline{y}^n}(x) = ((I^1)_{y_1} * \ldots * (I^n)_{y_n}(x)$ — дельтаподібне ядро. Покажемо, що для кожного $\eta > 0$ і $\overline{y} > \overline{0}$ знайдеться незростаюча невід'ємна на інтервалі $(0, +\infty)$ функція $\Phi_{\overline{y}^n}(|x|)$ з простору LM_n така, що для кожного дійсного $x \neq 0$ виконується нерівність

$$|I_{\overline{y}^n}(x)| \leq \Phi_{\overline{y}^n}(|x|), \tag{67}$$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{|x|>\eta} \Phi_{\overline{y}^n}(|x|)dx = 0. \tag{68}$$

Тоді, згідно з теоремою 1, має місце рівність (66).

Для спрощення запису доведення будемо проводити при $n = 2$. Оскільки ядра $(I^i)_{y_i}(x)$, $i = \overline{1,2}$, задовольняють умови теореми 1, то існують незростаючі невід'ємні на інтервалі $(0, +\infty)$ функції $(\Phi^i)_{y_i}(|x|)$, $i = \overline{1,2}$, з простору LM_1 такі, що для кожного дійсного $x \neq 0$ мають місце співвідношення

$$|(I^i)_{y_i}(x)| \leq (\Phi^i)_{y_i}(|x|), \tag{69}$$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{|x|>\eta} (\Phi^i)_{y_i}(|x|)dx = 0, \tag{70}$$

де η — довільне додатне число.

Доведемо, що функція $\Phi_{\overline{y}^2}(|x|) = ((\Phi^1)_{y_1} * (\Phi^2)_{y_2})(|x|) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi^1)_{y_1}(|t|)(\Phi^2)_{y_2}(|x-t|)dt$ задовольняє співвідношення (67) і (68). Оскільки згортка невід'ємних і інтегровних функцій є невід'ємною й інтегровною функцією, то функція $\Phi_{\overline{y}^2}(|x|)$ інтегровна і невід'ємна на інтервалі $(0, +\infty)$. Використовуючи нерівності (69), маємо

$$|I_{\overline{y}^2}(x)| \leq (|(I^1)_{y_1}|) * (|(I^2)_{y_2}|)(x) \leq ((\Phi^1)_{y_1} * (\Phi^2)_{y_2})(|x|) = \Phi_{\overline{y}^2}(|x|),$$

тобто виконується нерівність (67). Нехай $x_2 \geq x_1 > 0$. Використовуючи заміну змінних і враховуючи, що функція

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, u) = (\Phi^2)_{y_2}(|(x_2 - x_1)/2 - u|) - (\Phi^2)_{y_2}(|(x_2 - x_1)/2 + u|)$$

непарна по змінній u, отримуємо

$$\Phi_{\overline{y}^2}(x_2) - \Phi_{\overline{y}^2}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Phi^1)_{y_1}(|t|) \left((\Phi^2)_{y_2}(|x_2 - t|) - (\Phi^2)_{y_2}(|x_1 - t|)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Phi^1)_{y_1}(|(x_1 + x_2)/2 + u|) \left((\Phi^2)_{y_2}(|(x_2 - x_1)/2 - u|) - (\Phi^2)_{y_2}(|(x_2 - x_1)/2 + u|)\right) du =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \left((\Phi^1)_{y_1}(|(x_1 + x_2)/2 + u|) - (\Phi^1)_{y_1}(|(x_1 + x_2)/2 - u|)\right) \times$$

$$\times \left((\Phi^2)_{y_2}(|(x_2 - x_1)/2 - u|) - (\Phi^2)_{y_2}(|(x_2 - x_1)/2 + u|) \right) du. \tag{71}$$

Оскільки функції $(\Phi^i)_{y_i}(|x|)$ не зростають на $(0, +\infty)$, то з (71) випливає, що при $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ и $x_2 \geq x_1 > 0$ виконується нерівність $\Phi_{\overline{y}^2}(x_2) - \Phi_{\overline{y}^2}(x_1) \leq 0$, тобто функція $\Phi_{\overline{y}^2}(|x|)$ не зростає на $(0, +\infty)$. Доведення рівності (68) аналогічне доведенню (54) в лемі 3 з [1].

Теорему 3 доведено.

Якщо $\Psi_{\overline{y}^m}(x)$ — дельтаподібне ядро (24), то $\widetilde{\Psi}_{\overline{y}^m}(x) = \sum_{k \in Z} \Psi_{\overline{y}^m}(x)(x - 2\pi k)$ — його 2π-періодичний аналог (I.91), який, згідно з лемою 9 з [1], є парним дельтаподібним ядром і, згідно з (I.55, I.69, I.72, I.87, I.91), має ряд Фур'є

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_{\overline{y}^m}(|k|) e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{\overline{y}^m}(k) \cos kx \right) \sim \widetilde{\Psi}_{\overline{y}^m}(x). \tag{72}$$

Тоді, згідно з рівностями (I.48, I.49, (65)),

$$\widetilde{P}_{\varphi(\overline{y})}(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})|k|} e^{-ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})k} \cos kx \right), \tag{73}$$

$$\widetilde{W}_{\varphi(\overline{y})}(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})k^2} e^{-ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})k^2} \cos kx \right), \tag{74}$$

$$\widetilde{\Psi}^{\alpha}_{\varphi(\overline{y})}(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})|k|^\alpha} e^{-ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varphi(\overline{y})k^\alpha} \cos kx \right) \tag{75}$$

— ряди Фур'є дельтаподібних аналогів ядер Абеля – Пуассона, Гаусса – Вейєрштрасса і $\Psi^{\alpha}_{\varphi(\overline{y})}(x)$ (65). Оскільки при кожному $y > 0$ ряди $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-yk}$, $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-yk^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-yk^\alpha}$ збігаються абсолютно, то за теоремою Вейєрштрасса ряди Фур'є (73) – (75) збігаються абсолютно і рівномірно і справджуються рівності

$$\widetilde{P}_y(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-y|k|} e^{-ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-yk} \cos kx \right), \tag{76}$$

$$\widetilde{W}_y(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-yk^2} e^{-ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-yk^2} \cos kx \right), \tag{77}$$

$$\widetilde{\Psi}^{\alpha}_y(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-y|k|^\alpha} e^{-ikx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-yk^\alpha} \cos kx \right). \tag{78}$$

Згортка періодичної функції з неперіодичним ядром майже скрізь збігається зі згорткою цієї функції з періодичним аналогом ядра. Справедливим є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай $\widetilde{f} \in \widetilde{L}_p$, $I(x) \in L$ и $\widetilde{I}(x)$ — 2π-періодичний аналог функції $I(x)$. Тоді в кожній точці Лебега функції $f(x)$, а отже майже скрізь, справджується рівність*

$$(\widetilde{f} * I)(x) = (\widetilde{f} * \widetilde{I})(x). \tag{79}$$

Доведення. Якщо $f(x)$ сумовна на сегменті $[a,b]$, то (див., наприклад, [2, с. 234, 237]) похідна від її невизначеного інтеграла Лебега $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ майже скрізь рівна $f(x)$, тобто майже скрізь

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \tag{80}$$

і множина точок Лебега функції $f(x)$ міститься у множині точок, для яких має місце рівність (80).

Нехай функції $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$ належать простору $\widetilde{L}_p \subseteq \widetilde{L}$ і всі їх коефіцієнти Фур'є рівні, тобто для кожного $k \in Z$: $c_k(\widetilde{f}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)e^{-ikx}dx = c_k(\widetilde{g})$. Тоді (див., наприклад, [10, с. 64, 66]) у кожній точці x, в якій має місце (80), а отже і в кожній точці Лебега функції $\widetilde{f}(x)$, справджується рівність

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{g}(x). \tag{81}$$

Згортка $(\widetilde{f} * I)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x-t)I(t)dt$ є 2π-періодичною функцією. Знайдемо її коефіцієнти Фур'є

$$c_k(\widetilde{f} * I) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\widetilde{f} * I)(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x-t)I(t)e^{-ikx}dt\right)dx. \tag{82}$$

Оскільки функція $\widetilde{f}(x) \in \widetilde{L}_p \subseteq \widetilde{L}$, а функція $I(t)$ є абсолютно інтегровною на всій дійсній осі, то функція $|\widetilde{f}(x-t)I(t)e^{-ikx}|$ абсолютно інтегровна на множині $[0,2\pi] \times (-\infty,\infty)$. Тому, використовуючи теорему Фубіні про зміну порядку інтегрування, з рівності (82) отримуємо

$$c_k(\widetilde{f} * I) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} I(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x-t)e^{-ikx}dt\right)dx = c_k(\widetilde{f})\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(t)e^{-ikt}dt = 2\pi c_k(\widetilde{f})F^{-1}(I)(k). \tag{83}$$

З рівності (83) випливає, що

$$2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\widetilde{f})F^{-1}(I)(k)e^{ikx} \sim (\widetilde{f} * I)(x) \tag{84}$$

— ряд Фур'є функції $(\widetilde{f} * I)(x)$. На підставі рівності (I.87) $\sum_{-\infty}^{\infty} F^{-1}(I)(k)e^{ikx} \sim \widetilde{I}(x)$ — ряд Фур'є функції $\widetilde{I}(x)$. Тому (див., наприклад, [11, с. 66])

$$2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\widetilde{f})F^{-1}(I)(k)e^{ikx} \sim (\widetilde{f} * \widetilde{I})(x) \tag{85}$$

— ряд Фур'є функції $(\widetilde{f} * \widetilde{I})(x)$. Зі співвідношень (85), (84) випливає, що ряди Фур'є функцій $(\widetilde{f} * I)(x)$ і $(\widetilde{f} * \widetilde{I})(x)$ збігаються. Отже, на підставі рівностей (81) у кожній точці Лебега функції $\widetilde{f}(x)$, а отже майже скрізь, справджується рівність (79).

Теорему 4 доведено.

Зауважимо, що теорема 4 при деяких додаткових обмеженнях на функцію $I(x)$ розглядалась в [4, с.21].

***Наслідок* 4.** *Якщо дельтаподібне ядро* $I_{\overline{y}^k}(x)$ *задовольняє умови теореми* 1 *і* $\widetilde{f}(x) \in \widetilde{L}_p$, $p \geq 1$, *то в кожній точці Лебега функції* $\widetilde{f}(x)$, *а отже майже скрізь, справджується рівність*

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} (\widetilde{I}_{\overline{y}^k} * \widetilde{f})(x) = \widetilde{f}(x), \tag{86}$$

де $\widetilde{I}_{\overline{y}^k}(x)$ — 2π-*періодичний аналог* $I_{\overline{y}^k}(x)$.

Доведення. Оскільки $\widetilde{L}_p \subseteq \widehat{L}_p$, то кожна функція $\widetilde{f}$ з простору $\widetilde{L}_p$ належить простору $\widehat{L}_p$. Згідно з теоремою 1, у кожній точці Лебега функції $\widetilde{f}(x)$, а отже майже скрізь, має місце рівність

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} (I_{\overline{y}^k} * \widetilde{f})(x) = \widetilde{f}(x). \tag{87}$$

З рівності (87), згідно з теоремою 4, випливає рівність (86).

Наслідок 4 доведено.

1. *Бушев Д. М.* Ізометричність функціональних просторів з різним числом змінних // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1027 – 1045.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
4. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на класах сверток. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт НАН Украины. Ин-т математики; № 96.11).
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, 1972. – 496 с.
7. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. – М.: Наука, 1980. – Ч. II. – 447 с.
8. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
9. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 480 с.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
11. *Эдварс Р.* Ряды Фурье в современном приложении: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – Т. 1. – 260 с.

Одержано 05.09.14,
після доопрацювання — 03.09.15