КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.925.51

І. Є. Вітриченко (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ПРО ОСОБЛИВИЙ КРИТИЧНИЙ ВИПАДОК СТІЙКОСТІ НЕАВТОНОМНОЇ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

We obtain sufficient conditions of the Lyapunov stability of a trivial solution of nonautonomous essentially nonlinear differential system in a special critical case.

Одержано достатні умови стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку неавтономної істотно нелінійної диференціальної системи в одному особливому критичному випадку.

1. Постановка задачі. Досліджується стійкість [1] положення рівноваги при $t \to +\infty$ диференціальної системи (д. с.) з неперервними правими частинами спеціального вигляду

$$\begin{gathered} Y'_{n_1} = \Phi_{n_1}(t, Y), \\ Y'_{n_s} = \pi_s(t)\big[\mu_s E_{n_s} + P_{n_s}(t)\big]Y_{n_s} + Y_{n_s}\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{n_s, Q_{n_1}}(t) Y_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_s}(t, Y), \\ s = \overline{2, k}, \end{gathered} \tag{1}$$

де $t \in \Delta$, $\Delta \equiv [t_0, +\infty[$, $Y = \operatorname{col}\big(Y_{n_1}, \ldots, Y_{n_k}\big)$, вектор-функції $\Phi_{n_s} : \Delta \times \mathbf{S}(Y, r_0) \mapsto \mapsto \mathbf{R}^n$ малі у деякому сенсі, $\mathbf{S}(Y, r_0) \equiv \big\{Y \in \mathbf{R}^n : \|Y\| \leq r_0\big\}$, $\Phi_{n_s}\big(t, \overline{0}\big) \equiv \overline{0}$, $s = \overline{1, k}$, $\overline{0} := \operatorname{col}(0, \ldots, 0)$, $n_1 + \ldots + n_k = n$, $n, k \in \mathbf{N}$, $\pi_s : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$, $\mu_s \in \mathbf{R}$, $\mu_s \neq 0$, E_{n_s} — одиничні матриці, $P_{n_s} : \Delta \mapsto \mathbf{R}^{n_s \times n_s}$, $\|P_{n_s}\| = o(1)$, $t \to +\infty$, $h_{n_s, Q_{n_1}} : \Delta \mapsto \mapsto \mathbf{R}$, $s = \overline{2, k}$, $\|Q_{n_1}\| = \overline{1, m-1}$, $m \geq 2$ — натуральне число, $Y^Q := \prod_{s=1}^{n} y_s^{q_s}$, $Y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $s = \overline{1, n}$, $\|Q\| = = q_1 + \ldots + q_n$.

2. Основні результати. Якщо врахувати мализну вектор-функцій Φ_{n_s}, $s = \overline{1, k}$, і на деякий час вилучити їх із д. с. (1), то новоутворена д. с. матиме сім'ю розв'язків вигляду

$$Y_{n_1} = C_{n_1}, \qquad Y_{n_s} \equiv \overline{0}, \qquad s = \overline{2, k}, \tag{2}$$

де C_{n_1} — довільний сталий n_1-вимірний вектор. Зрозуміло, що сім'я розв'язків (2) при $C_{n_s} = \overline{0}$, $s = \overline{1, k}$, містить тривіальний розв'язок $Y \equiv \overline{0}$.

Покажемо, що можна вказати умови, за якими всі розв'язки $Y = Y(t; t_0, Y_0)$, $Y_0 = Y(t_0; t_0, Y_0)$ д. с. (1) з досить малим за нормою початковим вектором Y_0 мають властивість

$$\lim_{t\to+\infty}\left\| Y_{n_1}(t;T,Y_0)\right\| = \text{const},\qquad \lim_{t\to+\infty}\left\| Y_{n_s}(t;T,Y_0)\right\| = 0,\quad s=\overline{2,k},\quad T\in\Delta.$$

Нехай

$$\mathbf{L}_\Delta := \left\{ f:\Delta\mapsto\mathbf{R}:\ \int^{+\infty}|f|\,dt<+\infty\right\}.$$

Теорема 1. *Нехай д. с.* (1) *така, що*:

1) $\mu_s<0,\ s=\overline{2,k}$;

2) *існує* $\nu:\Delta\mapsto\mathbf{R}_+,\ \nu\in\mathbf{C}^1_\Delta,$ *така, що* $\nu=o(1),\ \nu'(\nu\pi)^{-1}=o_s(1),\ t\to+\infty,$ $s=\overline{2,k},\ \exists\, M\in\mathbf{R}_+$

$$M := \max_{2\le s\le k}\sup_{t\in\Delta}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\pi_s\left[\mu_s-\nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1}\left|h_{n_s,Q_{n_1}}\right|\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}\pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1}-\mu_s\right]dt\right\}d\tau,$$

існують $\varphi_s:\Delta\mapsto\mathbf{R}_+,\ s=\overline{1,k},$ *такі, що*

$$\forall\,\varepsilon\in\,]0,1]:\ \left\|\Phi_{n_1}\left(t,\varepsilon E_{n_1},\varepsilon\nu E_{n_2},\ldots,\varepsilon\nu E_{n_k}\right)\right\| \le \varepsilon\nu\varphi_1,$$

$$\nu\varphi_1\in\mathbf{L}_\Delta,\qquad \left\|\Phi_{n_s}\left(t,\varepsilon E_{n_1},\varepsilon\nu E_{n_2},\ldots,\varepsilon\nu E_{n_k}\right)\right\| \le \varepsilon\,\varphi_s,$$

$$I_s(t,T) := \exp\left\{\mu_s\int_T^t\pi_s\,d\tau\right\}\int_T^t\left(\pi_s\left\|P_{n_s}\right\|+\nu^{-1}\varphi_s\right)\exp\left\{-\mu_s\int_T^\tau\pi_s\,dt\right\}d\tau = o(1),$$

$$t\to+\infty,\qquad s=\overline{2,k}.$$

Тоді її тривіальний розв'язок є стійким за Ляпуновим при $t\to+\infty$.

Доведення. Виконавши для д. с. (1) заміну

$$Y_{n_1} = X_{n_1},\qquad Y_{n_s}\equiv\nu X_{n_s},\quad s=\overline{2,k}, \tag{3}$$

одержимо відносно $X_{n_s},\ s=\overline{1,k},$ д. с. вигляду

$$X'_{n_1} = \Phi_{n_1}\left(t,X_{n_1},\nu X_{n_2},\ldots,\nu X_{n_k}\right),$$

$$X'_{n_s} = \pi_s\left\{\left[\mu_s-\nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]E_{n_s}+P_{n_s}\right\}X_{n_s} + \tag{4}$$

$$+\ X_{n_s}\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1}h_{n_s,Q_{n_1}}(t)X_{n_1}^{Q_{n_1}} + \nu^{-1}\Phi_{n_s}\left(t,X_{n_1},\nu X_{n_2},\ldots,\nu X_{n_k}\right),$$

$$s=\overline{2,k}.$$

Покажемо, що д. с. (1) є стійкою за Ляпуновим при $t\to+\infty$. Структура вектор-функцій $\Phi_{n_s},\ s=\overline{2,k},$ не дозволяє застосувати до д. с. (4) метод функцій Ляпунова, який використано в [2] при дослідженні аналогічного випадку для автономних д. с. Тому до д. с. (4) застосуємо принцип стійкості О. Перрона [3]. Відповідно до нього поряд з д. с. (4) розглянемо допоміжну д. с. вигляду

$$
\begin{aligned}
X'_{n_1} &= \Phi_{n_1}\left[t, \Xi_{n_1}(t), \nu\Xi_{n_2}(t), \ldots, \nu\Xi_{n_k}(t)\right], \\
X'_{n_s} &= \pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]X_{n_s} + \pi_s P_{n_s}\Xi_{n_s}(t) + \\
&+ \Xi_{n_s}(t)\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{n_s,Q_{n_1}}(t)\Xi_{n_1}^{Q_{n_1}}(t) + \\
&+ \nu^{-1}\Phi_{n_s}\left[t, \Xi_{n_1}(t), \nu\Xi_{n_2}(t), \ldots, \nu\Xi_{n_k}(t)\right], \quad s = \overline{2,k},
\end{aligned} \tag{5}
$$

де $\Xi(t) = \mathrm{col}\left[\Xi_{n_1}(t), \ldots, \Xi_{n_k}(t)\right]$ — неперервна при $t \in \Delta$ вектор-варіація. Якщо буде встановлено, що для досить малого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існує $\delta_\varepsilon \in \,]0, \varepsilon[$ таке, що для розв'язку $X = X(t; t_0, X_0)$, $\|X_0\| \le \delta_\varepsilon$, д. с. (5) при $t \in \Delta$ виконується нерівність $\|X(t; t_0, X_0)\| < \varepsilon$ за умови $\|\Xi(t)\| \le \varepsilon \;\; \forall\, t \in \Delta$, то за принципом О. Перрона д. с. (1) буде стійкою за Ляпуновим при $t \to +\infty$.

Зауважимо, що за початкової умови $Y(t_0) = \overline{0}$ д. с. (1) має лише тривіальний розв'язок. Тому для будь-яких $r \in \,]0, r_0[$ і $T \in \Delta$ існує $\delta(r, T) \in \mathbf{R}_+$ таке, що розв'язок $Y = Y(t; t_0, Y_0)$, $Y(t_0; t_0, Y_0) = Y_0$, з умовою $\|Y_0\| \le \delta(r, T)$ є визначеним на $[t_0, T]$ і задовольняє оцінку $\|Y(t_0; t, Y_0)\| < r$ при $t \in [t_0, T]$. Звідси випливає, що розв'язки д. с. (5) досить оцінювати для t з деякого проміжку $[T, +\infty[$.

Нехай $\varepsilon \in \left]0, \min\left\{1, M^{-1}\right\}\right[$, $\|\Xi(t)\| \le \varepsilon \;\; \forall\, t \in \Delta$, $\|X_0\| \le \delta_\varepsilon$; $t = T^*$ визначимо так, щоб для будь-якого $t \in [T^*, +\infty[$ виконувалась нерівність $\nu'(\nu\pi_s)^{-1} < \mu_s$, $s = \overline{1,k}$. Оцінимо спочатку субвектор X_{n_s}, $s = \overline{2,k}$, д. с. (5). Зінтегрувавши кожне диференціальне рівняння відносно компонент субвектора X_{n_s}, $s = \overline{2,k}$, як лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, оцінимо норму цього субвектора:

$$
\begin{aligned}
\left\|X_{n_s}(t; T^*, X_0)\right\| &\le \exp\left\{\int_{T^*}^{t}\pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\|X_0\| + \\
&+ \varepsilon^2\exp\left\{\int_{T^*}^{t}\pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\int_{T^*}^{t}\left(\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1}\left|h_{n_s,Q_{n_1}}\right|\right)\times \\
&\times \exp\left\{\int_{T^*}^{\tau}\pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1} - \mu_s\right]dt\right\}d\tau + \varepsilon\exp\left\{\int_{T^*}^{t}\pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\times \\
&\times \int_{T^*}^{t}\left(\pi_s\left\|P_{n_s}\right\| + \nu^{-1}\varphi_s\right)\exp\left\{\int_{T^*}^{\tau}\pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1} - \mu_s\right]dt\right\}d\tau \le \\
&\le \delta_\varepsilon + \varepsilon^2 M + \varepsilon J_0(T^*),
\end{aligned}
$$

де $J_0(T) := \max\limits_{2 \le s \le k}\sup\limits_{t \in [T, +\infty[} J_s(t, T)$,

$$
\begin{aligned}
J_s(t, T) &:= \exp\left\{\int_{T}^{t}\pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\times \\
&\times \int_{T}^{t}\left(\pi_s\left\|P_{n_s}\right\| + \nu^{-1}\varphi_s\right)\exp\left\{\int_{T}^{\tau}\pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1} - \mu_s\right]dt\right\}d\tau, \quad s = \overline{2,k}.
\end{aligned}
$$

Зрозуміло, що оскільки $J_s(t,T) \approx I_s(t,T) = o(1)$, $t \to +\infty$, $s = \overline{2,k}$, то і $J_0(T) = o(1)$, $T \to +\infty$. Тоді для виконання принципу стійкості О. Перрона необхідно, щоб

$$\delta_\varepsilon + \varepsilon^2 M + \varepsilon J_0(T^*) < \varepsilon,$$

або

$$\delta_\varepsilon < \varepsilon\left[1 - \varepsilon M - J_0(T^*)\right].$$

Далі за числом ε визначимо момент часу $t = T_\varepsilon^*$, $T_\varepsilon^* \in [T^*, +\infty[$, так, щоб для будь-якого $t \in [T_\varepsilon^*, +\infty[$ виконувалась нерівність $J_0\left(T_\varepsilon^*\right) < 1 - \varepsilon M$. Зрозуміло, що такий момент часу існує, оскільки за умовами теореми $J_0(T) = o(1)$, $T \to +\infty$. Тоді число δ_ε визначається з нерівності

$$\delta_\varepsilon < \varepsilon\left[1 - \varepsilon M - J_0\left(T_\varepsilon^*\right)\right].$$

За тим же принципом стійкості О. Перрона оцінимо субвектор X_{n_1} з першого векторного рівняння д. с. (5):

$$\left\| X_{n_1}(t; T, X_0) \right\| \le \| X_0 \| + \int_T^t \left\| \Phi_{n_1}\left[t, \Xi_{n_1}(t), \nu\Xi_{n_2}(t), \ldots, \nu\Xi_{n_k}(t)\right] \right\| d\tau \le$$

$$\le \delta_\varepsilon + \varepsilon \int_T^{+\infty} \nu\varphi_1 \, dt < \varepsilon.$$

Звідси для чисел ε, δ_ε випливає залежність у вигляді нерівності

$$\delta_\varepsilon < \varepsilon\left(1 - \int_T^{+\infty} \nu\varphi_1 \, dt\right).$$

Оскільки $\nu\varphi_1 \in \mathbf{L}_\Delta$, то існує $T^{**} \in \Delta$ таке, що

$$\int_{T^{**}}^{+\infty} \nu\varphi_1 \, dt < 1.$$

Нехай $T_0 = \max\left\{T_\varepsilon^*, T^{**}\right\}$. Тоді остаточно число δ_ε визначається з нерівності

$$\delta_\varepsilon < \min\left\{\varepsilon[1 - \varepsilon M - J_0(T_0)], \varepsilon\left(1 - \int_{T_0}^{+\infty} \nu\varphi_1 \, dt\right)\right\}.$$

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо д. с.* (1) *така, що*:

1) *існує* $\nu : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$, $\nu \in \mathbf{C}_\Delta^1$, *така, що* $\nu = o(1)$, $\nu'(\nu\pi_s)^{-1} = o(1)$, $t \to +\infty$, $s = \overline{2,k}$;

2) *існує* $\varphi : \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$, $s = \overline{1,k}$, *така, що для* $\varepsilon \in]0,1[$

$$\left\| \Phi_{n_1}\left(t, \varepsilon E_{n_1}, \varepsilon\nu E_{n_2}, \ldots, \varepsilon\nu E_{n_k}\right) \right\| \le \varepsilon\nu\varphi_1, \quad \nu\varphi_1 \in \mathbf{L}_\Delta,$$

$$\left\| \Phi_{n_s}\left(t, \varepsilon E_{n_1}, \varepsilon\nu E_{n_2}, \ldots, \varepsilon\nu E_{n_k}\right) \right\| \le \varepsilon\varphi_s, \quad s = \overline{2,k},$$

і

$$\pi_s,\, \nu^{-1}\varphi_s,\, h_{n_s,Q_{n_1}} \in \mathbf{L}_\Delta, \quad \mu_s \neq 0, \quad s = \overline{2,k}, \quad \left\| Q_{n_1} \right\| = \overline{1, m-1},$$

або

$$\int^{+\infty} \pi_s\, dt = +\infty, \;\; \mu_s \in \mathbf{R}_-, \;\; h_{n_s,Q_{n_1}} \in \mathbf{L}_\Delta \;\; \text{чи} \;\; \left| h_{n_s,Q_{n_1}} \right| \pi_s^{-1} \leq M_0, \;\; t \in \Delta, \;\; M_0 \in \mathbf{R}_+,$$

$$\pi_s \left\| P_{n_s} \right\|, \nu^{-1}\varphi_s \in \mathbf{L}_\Delta \;\; \text{чи} \;\; \varphi_s(\nu\pi_s)^{-1} = o(1), \;\; t \to +\infty, \;\; s = \overline{2,k}, \;\; \left\| Q_{n_1} \right\| = \overline{1, m-1},$$

то її тривіальний розв'язок є стійким за Ляпуновим при $t \to +\infty$.

Доведення. Досить показати, що за умовами наслідку в теоремі 1 існує $M_0 \in \mathbf{R}_+$ і $I_s(t,T) = o(1)$, $t \to +\infty$, $s = \overline{2,k}$. Нехай $\pi_s \in \mathbf{L}_\Delta$, $\mu_s \neq 0$, $s = \overline{2,k}$. Тоді існує $M^* \in \mathbf{R}_+$ така, що для будь-яких $t, \tau \in \Delta$ виконуються нерівності

$$\exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \pi_s \left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1} \right] d\tau \right\} \leq M^*,$$

$$\exp\left\{ \int_{t_0}^{\tau} \pi_s \left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1} \right] dt \right\} \leq M^*.$$

Отже, число M з теореми 1 задовольняє нерівність

$$0 < M \leq (M^{**})^2 \int_{t_0}^{+\infty} \left(\sum_{s=2}^{k} \sum_{\left\| Q_{n_1} \right\| = 1}^{m-1} \left| h_{n_s,Q_{n_1}} \right| \right) dt,$$

яка свідчить про те, що M існує.

Далі, існує $M^{**}(T) \in \mathbf{R}_+$ таке, що

$$\exp \int_{T}^{+\infty} \pi_s\, dt \leq M^{**}(T), \qquad \exp\left(-\int_{T}^{+\infty} \pi_s\, dt \right) \leq M^{**}(T),$$
$$I_s(t,T) \leq \left[M^{**}(T) \right]^2 \int_{T}^{t} \left(\pi_s \left\| P_{n_s} \right\| + \nu^{-1}\varphi_s \right) d\tau, \quad s = \overline{2,k}. \tag{6}$$

Оскільки $\pi_s \left\| P_{n_s} \right\| + \nu^{-1}\varphi_s \in \mathbf{L}_\Delta$, $s = \overline{2,k}$, то для досить малого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існує $T_\varepsilon \in \Delta$ таке, що будь-якого $t \in [T_\varepsilon, +\infty[$ справджується нерівність

$$\int_{T_\varepsilon}^{t} \left(\pi_s \left\| P_{n_s} \right\| + \nu^{-1}\varphi_s \right) d\tau < \varepsilon, \quad s = \overline{2,k}.$$

Тоді за нерівністю (6) випливає, що $I_s(t,T) = o(1)$, $t \to +\infty$, $s = \overline{2,k}$.

Нехай $\int^{+\infty} \pi_s\, dt = +\infty$, $\mu_s \in \mathbf{R}_-$, $s = \overline{2,k}$, і T_0 — такий момент часу, що для будь-якого $t \in [T_0, +\infty[$ виконується нерівність

$$0,5\mu_s < \nu'(\nu\pi_s)^{-1}, \quad s = \overline{2,k}.$$

Оцінимо величину $I_s^*(t_0, t)$:

$$I_s^*(t_0,t) \ := \ \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1}\left|h_{n_s,Q_{n_1}}\right|\right)\times$$

$$\times\ \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} \pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1} - \mu_s\right]dt\right\}d\tau \ \le$$

$$\le\ I_s^*(t_0,T_0) \ + \ M_s^*\exp\left\{\int_{T_0}^{t} \pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\int_{T_0}^{t}\pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1} - \mu_s\right]\times$$

$$\times\ \exp\left\{\int_{T_0}^{\tau} \pi_s\left[\nu'(\nu\pi_s)^{-1} - \mu_s\right]dt\right\}d\tau \ =$$

$$= \ I_s^*(t_0,T_0) \ + \ M_s^*\left[1 - \exp\left\{\int_{T_0}^{t} \pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]d\tau\right\}\right] \ \le \ I_s^*(t_0,T_0) \ + \ M_s^*,$$

якщо для $t \in [T_0, +\infty[$ виконується нерівність

$$\sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1}\frac{\left|h_{n_s,Q_{n_1}}\right|}{\pi_s\left[\mu_s - \nu'(\nu\pi_s)^{-1}\right]} \ \le \ M_s^*, \qquad M_s^* \in \mathbf{R}_+, \quad s \ = \ \overline{2,k}.$$

Існування сталих M_s^*, $s = \overline{2,k}$, гарантується умовою $\left|h_{n_s,Q_{n_1}}\right|\pi_s^{-1} \le M_0$, $s = \overline{2,k}$, $\left\|Q_{n_1}\right\| = \overline{1, m-1}$, $t \in \Delta$, $M_0 \in \mathbf{R}_+$, наслідку. Цим доведено існування сталої M з теореми 1.

До величин $I_s(t,T)$, $s = \overline{2,k}$, застосуємо правило Лопіталя. Тоді

$$I_s(t,T) \ \approx \ \left\|P_{n_s}\right\| \ + \ \frac{\nu^{-1}\varphi_s}{\pi_s} \ \approx \ \frac{\nu^{-1}\varphi_s}{\pi_s} \ = \ o(1), \qquad t \to +\infty, \ s \ = \ \overline{2,k}.$$

За іншим методом за заданим числом $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існує $T_\varepsilon \in [T_0, +\infty[$ таке, для що будь-якого $t \in [T_\varepsilon, +\infty[$ виконується нерівність $I_s(t, T_\varepsilon) < \varepsilon$, $s = \overline{2,k}$. Для цього оцінимо величину $I_s(t, T_\varepsilon) < \varepsilon$, $s = \overline{2,k}$, аналогічно до [4, с. 11]:

$$I_s(t,T_\varepsilon) \ \le \ \int_{T_\varepsilon}^{t}\left(\pi_s\left\|P_{n_s}\right\| + \nu^{-1}\varphi_s\right)d\tau \ < \ \varepsilon, \qquad s \ = \ \overline{2,k}.$$

Наслідок доведено.

Зауваження. За умовами теореми 1 $\lim_{t\to+\infty} Y(t;T,Y_0) \ = \ \overline{0}$, $s \ = \ \overline{2,k}$. Далі, при $Y_0 = X_0$ маємо

$$Y_{n_1}(t;T,Y_0) \ = \ X(t;T,X_0) \ =$$

$$= \ Y_0 \ + \ \int_{T}^{t}\Phi_{n_1}\left[\tau, X_{n_1}(\tau;T,Y_0), \nu X_{n_2}(\tau;T,Y_0),\ldots, \nu X_{n_k}(\tau;T,Y_0)\right]d\tau. \qquad (7)$$

Оскільки $\nu\varphi_1 \in \mathbf{L}_\Delta$, то інтеграл в (7) існує і збігається при $t \to +\infty$. Отже,

$$\lim_{t\to+\infty} Y_{n_1}(t;T,Y_0) = C_{n_1} =$$

$$= Y_0 + \int_T^{+\infty} \Phi_{n_1}\left[\tau, X_{n_1}(\tau;T,Y_0), \nu X_{n_2}(\tau;T,Y_0),\ldots, \nu X_{n_k}(\tau;T,Y_0)\right]d\tau.$$

3. Зведення д. с. загального вигляду до д. с. (1). Розглянемо на проміжку $\Delta_\omega := [t_0, \omega[,\ \omega \le +\infty$, д. с. вигляду

$$\frac{dZ}{dt} = \pi(t)P(t)Z + \sum_{\|Q\|=2}^{m} F_Q(t)Z^Q + R_m(t,Z), \tag{8}$$

де $\pi : \Delta_\omega \mapsto \mathbf{R}_+$, $F_Q : \Delta_\omega \mapsto \mathbf{R}^n$, $\|Q\| = \overline{2,m}$, і $P : \Delta_\omega \to \mathbf{R}^{n\times n}$ — n_0 разів неперервно диференційовні відповідно скалярна, векторна та матрична функції; $R_m(t,Z)$ — n-вимірна визначена і неперервна в області $\Delta_\omega \times \mathbf{S}(Z, r_0)$ вектор-функція, яка припускає оцінку $\|R(t,Z)\| \le L(t)\|Z\|^{m+\alpha}$, $L : \Delta_\omega \to [\,0, +\infty[$ неперервна, $\alpha \in \mathbf{R}_+$, а матриця P має границю $P(\omega) = \lim_{t\uparrow\omega} P(t)$ з кратним нульовим власним числом.

Для автономних д. с. аналогічний критичний випадок дослідив О. М. Ляпунов [1].

За допомогою узагальнених „зрізуючих” [5], лінійних і нелінійних „заморожених” [6] перетворень за певних умов можна побудувати неособливу неавтономну нелінійну заміну

$$Z = G(t,Y) := \sum_{\|Q\|=1}^{m} g_Q(t)Y^Q, \tag{9}$$

яка зводить д. с. (8) до д. с. спеціального блок-діагонального вигляду

$$\begin{aligned} Y'_{n_1} &= \pi_1 P_{n_1} Y_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m^2} h_{n_1,Q_{n_1}} Y_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_1}, \\ Y'_{n_s} &= \pi_s\left(\mu_s E_{n_s} + P_{n_s}\right)Y_{n_s} + Y_{n_s} \sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{n_s,Q_{n_1}} Y_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_s}, \quad s = \overline{2,k}, \end{aligned} \tag{10}$$

де Y_{n_s}, $s = \overline{1,k}$, — субвектори вектора Y; P_{n_s}, $\|P_{n_s}\| = o(1)$, $t\uparrow\omega$, $s = \overline{1,k}$, — матриці; π_s, $s = \overline{1,k}$, — додатні функції ; сталі μ_s, $s = \overline{2,k}$, дійсні і відмінні від нуля; функції $h_{n_1,Q_{n_1}}$, $\|Q_{n_1}\| = \overline{2,m^2}$, $h_{n_s,Q_{n_1}}$, $s = \overline{2,k}$, $\|Q_{n_1}\| = \overline{1,m-1}$, визначаються у процесі зведення д. с. (8) до д. с. (10); E_{n_s}, $s = \overline{1,k}$, — одиничні матриці; вектор-функції Φ_{n_s}, $s = \overline{1,k}$, малі у деякому розумінні.

В роботах [7 – 9] стійкість точки спокою д. с. (8), (10) досліджувалась за допомогою поєднання методу вивчення асимптотичної поведінки правильних [10 – 12] розв’язків неавтономного нелінійного диференціального рівняння n_1-го порядку відносно однієї з компонент субвектора Y_{n_1}, до якого можна звести д. с. вигляду

$$Y'_{n_1} = \pi_1 P_{n_1} Y_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m^2} h_{n_1,Q_{n_1}} Y_{n_1}^{Q_{n_1}}, \tag{11}$$

методу функцій Ляпунова та леми 3 [13] про обмеженість розв’язків в кільцеподібній області, що охоплює положення рівноваги.

Особливий критичний випадок стійкості виникає тоді, коли у д. с. (11) $P_{n_1} \equiv \equiv \|0\|$, $h_{n_1,Q_{n_1}} \equiv 0$, $\|Q_{n_1}\| = \overline{2, m^2}$, тобто коли в дослідженні стійкості *неможливо* використати правильні розв'язки диференціального рівняння n_1-го порядку. У цьому випадку д. с. (10) набирає спеціального вигляду д. с. (1), для якої результати стійкості одержано у випадку, коли $\omega = +\infty$.

Заміни (9), (3) дозволяють сформулювати результати стійкості для д. с. (8).

Теорема 2. *Нехай д. с.* (8) *така, що заміни* (9), (3) *зводять її до д. с.* (4), *яка задовольняє умови теореми* 1. *Тоді її тривіальний розв'язок при* $t \to +\infty$:

стійкий за Ляпуновим, якщо $\left\|G\left(t, Z_{n_1}, \nu Z_{n_2}, \ldots, \nu Z_{n_k}\right)\right\| \le A \quad \forall\, t \in \Delta,\ A \in \mathbf{R}_+$, $Z \in \mathbf{S}(Z, r_0)$;

асимптотично стійкий за Ляпуновим, якщо $\left\|G\left(t, Z_{n_1}, \nu Z_{n_2}, \ldots, \nu Z_{n_k}\right)\right\| = o(1)$, $t \to +\infty$, $Z \in \mathbf{S}(Z, r_0)$.

Доведення є очевидним.

Наслідок 2. *Нехай д. с.* (8) *така, що заміни* (9), (3) *зводять її до д. с.* (4), *яка задовольняє умови наслідку* 1. *Тоді її тривіальний розв'язок при* $t \to +\infty$:

стійкий за Ляпуновим, якщо $\left\|G\left(t, Z_{n_1}, \nu Z_{n_2}, \ldots, \nu Z_{n_k}\right)\right\| \le A \quad \forall\, t \in \Delta,\ A \in \mathbf{R}_+$, $Z \in \mathbf{S}(Z, r_0)$;

асимптотично стійкий за Ляпуновим, якщо $\left\|G\left(t, Z_{n_1}, \nu Z_{n_2}, \ldots, \nu Z_{n_k}\right)\right\| = o(1)$, $t \to +\infty$, $Z \in \mathbf{S}(Z, r_0)$.

Доведення є очевидним.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения и другие роботы по теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
3. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei differential Gleichungen // Math. Z. – 1930. – **32**. – S. 703–738.
4. *Раппопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 526 с.
5. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110**. – P. 59 – 67.
6. *Костин А. В., Витриченко И. Е.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 4. – С. 819 – 822.
7. *Витриченко И. Е.* К устойчивости в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых корней неавтономной существенно нелинейной системы // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 9. – С. 7 – 11.
8. *Витриченко И. Е.* К устойчивости неавтономной существенно нелинейной системы в одном критическом случае // Допов. НАН України. – 1997. – № 8. – С. 25 – 28.
9. *Вітриченко І. Є.* Критичний випадок глобальної стійкості навтономної істотно нелінінійної системи // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 4. – С. 449 – 457.
10. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1987. – 282 с.
11. *Евтухов В. М.* Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1998. – 295 с.
12. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
13. *Вітриченко І. Є.* Про одну ознаку асимптотичної стійкості в одному критичному випадку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 10 – 16.

Одержано 27.05.2004,
після доопрацювання — 25.01.2005