УДК 532.595

М. Я. Барняк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ПОРОЖНИНАХ СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

The problem of natural oscillations of an ideal incompressible liquid in a vessel of complex geometric form is considered. The region filled with the liquid is divided into subregions of simpler geometric forms. The initial problem is reduced to the spectral problem for a part of the region filled with the liquid. For this purpose, solutions of auxiliary boundary-value problems in subregions are used. Approximated solutions of the obtained problem are constructed with the help of the variational method. Problems of rational choice of a system of coordinate functions are also considered. Results of the numerical realization of the proposed method are presented.

Розглядається задача про власні коливання ідеальної нестисливої рідини в порожнинах складної геометричної форми. Область, заповнена рідиною, розбивається на підобласті більш простої геометричної форми. Початкова задача зводиться до спектральної задачі для частини області, заповненої рідиною. Для цього використовуються розв'язки допоміжних крайових задач у підобластях. Наближені розв'язки отриманої задачі будуються варіаційним методом. Розглядаються також питання раціонального вибору системи координатних функцій. Наведено результати числової реалізації запропонованого методу.

0. Вступ. Власні коливання ідеальної нестисливої рідини, яка частково заповнює порожнину нерухомого твердого тіла, описуються крайовою спектральною задачею

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda\varphi \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \int\limits_{\Sigma}\varphi\, dS = 0, \tag{0.1}$$

де Ω — область, заповнена рідиною й обмежена твердою стінкою порожнини S та незбуреною вільною поверхнею рідини Σ, $\varphi(x,y,z)\cos(\omega t)$ — потенціал швидкостей частинок рідини, (x,y,z) — безрозмірні декартові координати, що віднесені до характерного лінійного розміру L вільної поверхні рідини, причому вісь Oz напрямлена вертикально вгору, $\lambda = \omega^2 L g^{-1}$ — спектральний параметр, ω — частота власних коливань рідини, g — прискорення сил земного тяжіння.

Задача (0.1) описує так звані малі власні коливання рідини в тому сенсі, що величини швидкості рідини $\vec{v} = \nabla\varphi$ та вертикального відхилення вільної поверхні рідини $h = \partial\varphi/\partial n$ вважаємо настільки малими, що квадратами, добутками і більш високими їх степенями можна знехтувати порівняно з першими їх степенями. Крім цього всі крайові умови зносяться із збуреної вільної поверхні на незбурену вільну поверхню Σ.

Основні питання, пов'язані з дослідженням існування розв'язків задачі (0.1), властивостями спектра та власних функцій задачі (0.1), грунтовно досліджені в роботах [1 – 5]. Наведемо деякі твердження з робіт [4, 5], які будуть використані в даній роботі.

Розглянемо гільбертів простір функцій $W_2^1(\Omega)$, інтегровних з квадратом разом із першими їх похідними в області Ω. Скалярний добуток у $W_2^1(\Omega)$ задано таким чином:

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\, d\Omega + \int\limits_{\Sigma} u\, dS \int\limits_{\Sigma} v\, dS.$$

Нехай $\bar{L}_2(\Sigma)$ — підпростір функцій $L_2(\Sigma)$, інтегровних з квадратом, які задовольняють умову

$$\int\limits_{\Sigma} u\, dS = 0, \tag{0.2}$$

а $\overline{W}_2^1(\Omega)$ — підпростір гільбертового простору $W_2^1(\Omega)$ функцій u, граничні значення яких $u|_\Sigma \in \overline{L}_2(\Sigma)$, тобто

$$\overline{W}_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) \cap \overline{L}_2(\Sigma). \tag{0.3}$$

Скалярний добуток в $\overline{W}_2^1(\Omega)$ має вигляд

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega. \tag{0.4}$$

Позначимо через $H_1(\Omega)$ підпростір гармонічних функцій $u \in \overline{W}_2^1(\Omega)$, які задовольняють умову

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{0.5}$$

а через $\overline{H}_1(\Omega) \subset H_1(\Omega)$ підпростір гармонічних функцій, які крім умови (0.5) задовольняють також умову (0.2).

Нехай $u \in \overline{H}_1(\Omega)$ і $u = \varphi$ на Σ. Значення нормальної похідної $\partial u/\partial n$ на Σ позначимо через $T\varphi$, тобто $T\varphi = \partial u/\partial n$. Інтегро-диференціальний оператор T діє на класі функцій φ, які можна таким чином продовжити на всю область Ω, щоб одержана функція належала простору $\overline{W}_2^1(\Omega)$. Іншими словами, оператор T ставить у відповідність функції φ, яка задана на Σ і задовольняє умову (0.2), значення зовнішньої, по відношенню до Ω, нормальної похідної на Σ від функції u, яка є розв'язком наступної мішаної крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \int_\Sigma \varphi \, dS = 0.$$

Задача (0.1) зводиться до спектральної задачі для оператора T

$$T\varphi = \lambda\varphi. \tag{0.6}$$

У роботі [4] доведено наступну теорему.

Теорема 0.1. *Спектр самоспряженого оператора T, який діє в гільбертовому просторі $\overline{L}_2(\Sigma)$, дискретний, тобто*:

а) *існує нескінченна послідовність власних значень* $(0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots)$ *скінченної кратності, які мають єдину точку згущення на нескінченності*;

б) *граничні значення власних функцій $\varphi_n|_\Sigma$ на Σ утворюють повну ортонормовану систему функцій в $\overline{L}_2(\Sigma)$.*

Крім того, функції $\varphi_n(x, y, z)$ утворюють також повну й ортогональну систему функцій в $\overline{H}_1(\Omega)$.

Точні розв'язки задачі (0.1) вдається побудувати тільки для порожнин простої геометричної форми, а саме для циліндричних порожнин із поперечним перерізом у вигляді круга, прямокутника або кільця. Для порожнин більш складної геометричної форми застосовують різні наближені методи, зокрема варіаційний метод. Спектральна задача (0.1) еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала

$$F(\varphi) = \frac{(T\varphi, \varphi)_{\overline{L}_2(\Sigma)}}{(\varphi, \varphi)_{\overline{L}_2(\Sigma)}} = \frac{\int_\Omega (\nabla\varphi)^2 d\Omega}{\int_\Sigma \varphi^2 dS} \tag{0.7}$$

на класі функцій $\varphi \in \overline{H}_1(\Omega)$.

Найменше власне значення задачі (0.1) $\lambda_1 = \min F(\varphi)$, якщо $\varphi \in \overline{H}_1(\Omega)$. Функція φ_1, для якої цей мінімум досягається, є відповідною власною функцією задачі. Наступні власні значення λ_n визначаються як мінімум функціонала $F(\varphi)$ на функціях $\varphi \in \overline{H}_1(\Omega)$, які задовольняють умови ортогональності

$$\int_\Sigma \varphi\varphi_i dS = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{0.8}$$

Виявляється, що функціонал $F(\varphi)$ можна мінімізувати на більш широкому класі функцій, ніж $\overline{H}_1(\Omega)$, а саме на всьому просторі функцій $\overline{W}_2^1(\Omega)$. Ця властивість грунтується на розкладі гільбертового простору $\overline{W}_2^1(\Omega)$ із скалярним добутком (0.4) в пряму суму двох взаємно ортогональних підпросторів [6]:

$$\overline{W}_2^1(\Omega) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \oplus \overline{H}_1(\Omega), \tag{0.9}$$

де $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — підпростір функцій $u_0 \in \overline{W}_2^1(\Omega)$, граничні значення яких на Σ дорівнюють нулю. Отже, довільну функцію $u \in \overline{W}_2^1(\Omega)$ можна подати у вигляді $u = u_0 + \varphi$, де $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\varphi \in \overline{H}_1(\Omega)$, і функціонал $F(u)$ набирає вигляду

$$F(u_0 + \varphi) = \frac{\int_\Omega (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_\Omega (\nabla u_0)^2 d\Omega}{\int_\Sigma \varphi^2 dS} \geq F(\varphi),$$

причому рівність можлива лише у випадку $u_0 \equiv 0$.

Отже, обмеження на функції порівняння, що зумовлені умовою (0.5), можна зняти. Ця обставина дуже суттєва саме при реалізації варіаційного методу побудови розв'язків задачі для областей складної геометричної форми. На класі функцій φ, які задовольняють рівняння Лапласа,

$$F(\varphi) = \frac{\int_{\Sigma+S} \varphi \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} dS}{\int_\Sigma \varphi^2 dS}. \tag{0.10}$$

Для мінімізації функціонала $F(\varphi)$ використовується метод Рітца [7], згідно з яким наближений розв'язок задачі апроксимуємо скінченною сумою

$$\varphi_N = \sum_{k=1}^{N} a_k w_k,$$

де $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ — деяка система координатних функцій, що є повною в підпросторі гармонічних функцій $H(\Omega) \subset \overline{W}_2^1(\Omega)$. Успіх застосування варіаційного методу в основному залежить від вибору системи координатних функцій. Однак, якщо область Ω має достатньо складну геометричну форму, вибрати таку систему функцій складно.

1. Зведення задачі про власні коливання рідини в посудині до послідовності крайових задач у підобластях. Нехай область Ω розділено деякою однозв'язною достатньо гладкою поверхнею G, що не перетинає поверхню Σ, на дві зіркові підобласті Ω_0 і Ω_1. Тоді поверхня S також розділиться на дві частини S_0 і S_1; область Ω_0 буде обмежена поверхнями Σ, S_0 і G, а область Ω_1 — поверхнями G та S_1.

Позначимо функцію φ в області Ω_1 через u та задамо на поверхні розділу областей Ω_0 і Ω_1 умови спряження $\varphi = u$ і $\partial\varphi/\partial n = -\partial u/\partial n_1$, де $\vec{n}_1 = -\vec{n}$

— орт зовнішньої, по відношенню до Ω_1, нормалі до G. Тоді задачу (0.1) можна переписати у вигляді

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda\varphi \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_0, \quad \int_\Sigma \varphi\, dS = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n_1}, \quad \varphi = u \text{ на } G, \quad \Delta u = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } S_1. \tag{1.1}$$

Виділимо із задачі (1.1) окремо задачу

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } S_1, \quad u = \varphi \text{ на } G. \tag{1.2}$$

Розв'язуючи цю задачу, а потім обчислюючи похідну по нормалі $\vec{n}_1$ від функції u, ми тим самим визначаємо на G інтегро-диференціальний оператор T_1, який аналогічний оператору T, але визначається на основі задачі (1.2) і діє в класі функцій із $L_2(G)$, які можна таким чином продовжити в область Ω_1, щоб одержана функція належала простору $W_2^1(\Omega_1)$. Крім цього оператор T_1, на відміну від оператора T, діє на класі функцій, на які не накладається додаткова умова ортогональності до константи на $L_2(G)$. При цьому зауважимо, що $T_1 c = 0$, оскільки розв'язок задачі (1.2) для $\varphi = c$ також дорівнює цій же константі c, а тому функцію φ в задачі (1.2), при визначенні результату дії оператора T_1, можна задавати з точністю до довільної константи, тобто $F_1(\varphi + c) = F_1(\varphi)$. Цю обставину буде використано нижче при побудові розв'язків задачі.

Тепер задачу (1.1) перепишемо у вигляді

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda\varphi \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_0, \quad \int_\Sigma \varphi\, dS = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + T_1\varphi = 0 \text{ на } G. \tag{1.3}$$

Таким чином, спектральна крайова задача (0.1) в області Ω зводиться до спектральної крайової задачі в підобласті Ω_0. У крайовій умові цієї задачі міститься оператор T_1, що визначається шляхом побудови розв'язків задачі (1.2) в підобласті Ω_1.

2. Варіаційний метод побудови розв'язків задачі. Позначимо клас розв'язків рівняння Лапласа із $\overline{W}_2^1(\Omega_0)$, граничні значення яких на G належать області визначення оператора T_1 і, крім того, задовольняють умову (0.2) та крайові умови

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} + T_1\varphi = 0 \text{ на } G, \tag{2.1}$$

через $H_{1,T}(\Omega_0)$.

Визначимо на $H_{1,T}(\Omega_0)$ функціонал

$$F_T(\varphi) = \frac{\int_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\varphi\, dS}{\int_\Sigma \varphi^2\, dS}. \tag{2.2}$$

Цей функціонал можна перетворити до вигляду

$$F_T(\varphi) = \frac{\int_{\Sigma+S_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\varphi\, dS + \int_G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + T_1\varphi\right)\varphi\, dS}{\int_\Sigma \varphi^2 dS} =$$

$$= \frac{\int_{\Sigma+S_0+G} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\varphi\, dS + \int_G T_1\varphi\varphi\, dS}{\int_\Sigma \varphi^2 dS} = \frac{\int_{\Omega_0} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_G T_1\varphi\varphi\, dS}{\int_\Sigma \varphi^2 dS}. \qquad (2.3)$$

Область визначення функціонала $F_T(\varphi)$, який задано у вигляді (2.3), можна розширити до таких функцій φ із $\overline{W}_2^1(\Omega_0)$, граничні значення яких на G належать області визначення оператора T_1. Позначимо цей підпростір функцій через $\overline{W}_{2,T}^1(\Omega_0)$.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 2.1. *Найменше власне значення задачі* (1.3) *дорівнює мінімальному значенню функціонала* $F_T(\varphi)$ *на класі функцій* $\varphi \in \overline{W}_{2,T}^1(\Omega_0)$. *Функція* φ_1, *яка надає мінімум функціоналу* $F_T(\varphi)$, *є відповідною цьому власному значенню власною функцією задачі* (1.3). *Наступне* n*-те власне значення задачі* (1.3) *дорівнює мінімальному значенню функціонала* $F_T(\varphi)$ *на класі функцій* $\varphi \in \overline{W}^1(\Omega_0)$, *які задовольняють додаткові умови ортогональності*

$$\int_\Sigma \varphi_i \varphi\, dS = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Функція φ_n, *яка надає цей мінімум функціоналу* $F_T(\varphi)$, *є відповідною* n*-ю власною функцією задачі* (1.3).

Доведення. Нехай в області Ω задано деяку функцію $\varphi \in \overline{W}_2^1(\Omega)$, тобто функцію, яка належить області визначення функціонала $F(\varphi)$. На цій функції, як на такій, що визначена в області Ω_0 включно з G, можна визначити також і функціонал $F_T(\varphi)$ таким чином.

Функцію φ в області Ω_1, згідно з [6], можна подати у вигляді суми двох функцій $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, де $\varphi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$, $\varphi_1 \in H_1(\Omega_1)$. Тут $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$ — підпростір функцій $u_0 \in \overline{W}_2^1(\Omega_1)$, граничні значення яких на G дорівнюють нулю, $H_1(\Omega_1)$ — підпростір гармонічних функцій, які задовольняють умову $\partial\varphi/\partial n = 0$ на S_1.

Тоді

$$F_T(\varphi) = \frac{\int_{\Omega_0} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla\varphi_1)^2 d\Omega}{\int_\Sigma \varphi^2 dS},$$

а функціонал

$$F(\varphi) = \frac{\int_{\Omega_0} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla\varphi_1)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla\varphi_0)^2 d\Omega}{\int_\Sigma \varphi^2 dS}.$$

Отже, $F(\varphi) \geq F_T(\varphi)$ для довільної функції φ. Значення обох функціоналів на гармонічних в області Ω_1 функціях φ, що задовольняють умову $\partial\varphi/\partial n =$

$= 0$ на S_1, збігаються. А оскільки мінімум функціонала $F(\varphi)$ досягається також на функції φ, що задовольняє умову $\partial\varphi/\partial n = 0$ на S_1, то мінімуми обох функціоналів збігаються та досягаються на одній і тій самій функції, що і доводить твердження теореми.

Функціонал $F_T(\varphi)$ можна подати також у вигляді

$$F_T(\varphi) = K(\varphi, u) = \frac{\int_{\Omega_0} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla u)^2 d\Omega}{\int_{\Sigma} \varphi^2 dS}, \tag{2.4}$$

де u визначається як розв'язок крайової задачі (1.2), або, іншими словами, $u \in$ $\in H_1(\Omega_1)$ та $u = \varphi$ на G. Розглянемо функціонал $K(\varphi, u)$ на більш широкому класі функцій, а саме, на функціях $u \in W_2^1(\Omega_1)$, які задовольняють умову $u = \varphi$ на G. Довільну функцію $u \in W_2^1(\Omega_1)$ можна подати у вигляді суми $u =$ $= u_1 + u_0$, де $u_1 \in H_1(\Omega_1)$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$. Враховуючи ортогональність функцій u_1 та u_0 в $W_2^1(\Omega_1)$, маємо

$$\int\limits_{\Omega_1} (\nabla u)^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega_1} (\nabla u_1)^2 d\Omega + \int\limits_{\Omega_1} (\nabla u_0)^2 d\Omega.$$

Отже, для функціонала $K(\varphi, u)$ справджується оцінка

$$K(\varphi, u) = \frac{\int_{\Omega_0} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla u_0)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla u_1)^2 d\Omega}{\int_{\Sigma} \varphi^2 dS} \geq$$

$$\geq \frac{\int_{\Omega_0} (\nabla\varphi)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} (\nabla u_1)^2 d\Omega}{\int_{\Sigma} \varphi^2 dS} = K(\varphi, u_1) = F_T(\varphi). \tag{2.5}$$

На основі теореми 0.1 та наведеної вище оцінки функціонала $K(\varphi, u)$ справедливою є наступна теорема.

Теорема 2.2. *Мінімум функціонала $K(\varphi, u)$, який визначено на класі функцій φ і u, що задовольняють умови $u = \varphi$ на G та інтегровні з квадратом разом із першими частинними похідними відповідно по областях Ω_0 і Ω_1, досягається на функціях $\varphi \in H(\Omega_0)$ і $u \in H_1(\Omega_1)$.*

Зауважимо, що твердження цієї теореми можна одержати і безпосередньо як наслідок із теореми 0.1, мінімізуючи функціонал $F(\varphi)$ на функціях φ, заданих таким чином:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi & \text{в } \Omega_0, \\ u & \text{на } G, \\ u & \text{в } \Omega_1, \end{cases} \tag{2.6}$$

де $u = \varphi$ на G, функції φ і u інтегровні з квадратом разом із першими частинними похідними по областях Ω_0 і Ω_1 відповідно. Довільна функція, яка задається формулою (2.6), належить простору $\overline{W}{}_2^1(\Omega)$, а отже, й області визначення функціонала $F(\varphi)$. На цьому класі функцій має місце тотожність $F(\varphi) \equiv$ $\equiv K(\varphi, u)$.

3. Мінімізація функціонала за допомогою методу Рітца. Для мінімізації функціонала $F_T(\varphi)$ використаємо метод Рітца [7], апроксимуючи шуканий розв'язок задачі скінченною сумою

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i w_i,$$

де $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ — деяка повна базисна система в підпросторі гармонічних функцій $H(\Omega_0)$, що задовольняють умову (0.2).

Із необхідної умови мінімуму функціонала $F_T(\varphi)$ одержимо спектральну задачу для симетричних матриць A і B:

$$(A - \lambda B)X = 0. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти матриць A і B визначаються таким чином:

$$\alpha_{k,j} = \int_{\Omega_0} \nabla w_k \nabla w_j d\Omega + \int_G T_1 w_k w_j dS = \int_{\Sigma+S_0} \frac{\partial w_k}{\partial n} w_j dS + \int_G \left(\frac{\partial w_k}{\partial n} + T_1 w_k \right) w_j dS,$$

$$\beta_{k,j} = \int_{\Sigma} w_k w_j dS.$$

При обчисленні складових $\int_G T_1 w_k w_j dS$ у коефіцієнтах $\alpha_{k,j}$ потрібно визначати значення оператора $T_1 w_k$. Для цього слід будувати розв'язки задачі

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_1, \qquad u = w_k \quad \text{на} \quad G. \tag{3.2}$$

Якщо для області Ω_1 розв'язок спектральної задачі

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = \sigma v \quad \text{на} \quad G \tag{3.3}$$

є відомим, то вдається виразити розв'язки задачі (3.2) через розв'язки задачі (3.3). Згідно з теоремою 0.1, власні функції задачі (3.3) утворюють в $L_2(G)$ повну й ортогональну систему функцій. Зауважимо, що в задачі (3.3), на відміну від задачі (0.1), немає умови ортогональності до константи. Тому задача (3.3) має нульове власне значення і йому відповідає власна функція, що дорівнює константі. Отже, і повноту власних функцій задачі (3.3) маємо в $L_2(G)$, а не в $\overline{L}_2(G)$, як для задачі (0.1). Тому розв'язок задачі (3.2) можна подати у вигляді

$$u_k = \sum_{l=1}^{\infty} c_{k,l} v_l, \quad \text{де} \quad c_{k,l} = \int_G w_k v_l dS \| v_l \|^{-2}, \quad \| v_l \|^2 = \int_G v_l^2 dS. \tag{3.4}$$

Отже, $T_1 w_k = \sum_{l=1}^{\infty} c_{k,l} \sigma_l v_l$. Враховуючи ортогональність функцій v_l, маємо

$$\int_G T_1 w_k w_j dS = \sum_{l=1}^{\infty} c_{k,l} \sigma_l c_{j,l} \| v_l \|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l \int_G w_k v_l dS \int_G w_j v_l dS \| v_l \|^{-2}. \tag{3.5}$$

Для областей більш складної геометричної форми, коли не вдається побудувати точні розв'язки задачі (3.3), потрібно будувати наближені розв'язки задачі (3.2). Тут варто зауважити, що оператор T_1 є необмеженим, а тому навіть для достатньо гладких функцій w_k можемо одержувати необмежені значення нормальної похідної від функції u_k на G.

Перейдемо до побудови наближених розв'язків задачі (3.2). Нескладно знайти гармонічну в області Ω_1 функцію w_k^*, значення якої на G збігаються із значеннями функції w_k на G. Зокрема, це може бути та сама функція w_k, або її дзеркальне відображення для випадку, коли область G є плоскою. Нехай в області Ω_1 визначено деяку систему функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, повну в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$, де $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$ — підпростір функцій $u \in \overline{W}{}_2^1(\Omega_1)$, які дорівнюють нулю на G. В якості області G зручно вибрати плоску область і сумістити її з однією з координатних площин декартової системи координат. Тоді достатньо в якості системи функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ вибрати систему непарних по відповідній змінній розв'язків рівняння Лапласа.

Як випливає з роботи [6], довільну гармонічну в Ω_1 функцію $w_k \in W_2^1(\Omega_1)$ можна однозначно подати у вигляді суми двох функцій $w_k = w_{k,1} + w_{k,0}$, де $w_{k,1}$ і $w_{k,0}$ — гармонічні в Ω_1 функції з простору $W_2^1(\Omega_1)$, які задовольняють умови $\partial w_{k,1}/\partial n = 0$ на S_i, $w_{k,0} = 0$ на G_1, причому $\int_{\Omega_1} \nabla w_{k,1} \cdot \nabla w_{k,0} d\Omega = 0$, звідки маємо

$$\int_G T_1 w_k w_j dS = \int_{\Omega_1} \nabla w_{k,1} \cdot \nabla w_{j,1} d\Omega = \int_{\Omega_1} \nabla w_k \cdot \nabla w_j d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega_1} \nabla w_{k,0} \cdot \nabla w_{j,0} d\Omega = \int_{G+S_1} \frac{\partial w_k}{\partial n} w_j dS - \int_{S_1} \frac{\partial w_{k,0}}{\partial n} w_{j,0} dS. \tag{3.6}$$

Для обчислення останнього інтеграла спроектуємо функції w_k і w_j в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$. Для цього використаємо систему функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Апроксимуючи функції $w_{k,0}$ скінченними сумами

$$w_{k,0} = \sum_{l=1}^{N_1} c_{l,k} f_l,$$

де матриця коефіцієнтів $c_{l,k}$ визначається як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь з N правими стовпцями такого вигляду

$$\sum_{l=1}^{N_1} \gamma_{i,l} c_{l,k} = \beta_{i,k}, \quad i = 1, 2, \ldots, N_1, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.7}$$

в якій

$$\gamma_{i,l} = \int_{S_1} f_i \frac{\partial f_l}{\partial n} dS, \qquad \beta_{i,k} = \int_{S_1} f_i \frac{\partial w_k}{\partial n} dS,$$

одержуємо значення квадратичного функціонала $\int_G T_1 w_k w_k dS$ із надлишком. Таким чином, попередньо при мінімізації функціонала $K(\varphi, u)$ потрібно спроектувати функції w_k^* в Ω_1 на підпростір $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$, а потім відняти цю проекцію від функцій w_k^*, тобто $w_{k,1} = w_k^* - w_{k,0}$. В результаті одержимо функції, які наближено задовольняють умову $\partial w_{k,1}/\partial n = 0$ на S_1. Зауважимо, що функції $w_{k,1}$ цю умову задовольняють в середньо-квадратичному сенсі, а тому в точках контура S_1 вона може виконуватися з невеликою точністю. Більш точно, цю умову буде задовольняти сумарний розв'язок задачі, оскільки в процесі мінімізації функціонала $F_T(\varphi)$ визначаються функції, які більш точно задовольняють умови задачі. Зауважимо, що використання формули (3.5), при збереженні скінченної кількості членів ряду, приводить до визначення значення квадратичного функціонала $\int_G T_1 w_k w_k dS$ з недостачею. Різниця між значеннями цього функціонала, обчисленого за формулами (3.5) і (3.6), дає можливість оцінити точність обох формул, а використання формули Коші – Буняковського дозволяє оцінити точність обчислення білінійного функціонала $\int_G T_1 w_k w_j dS$.

4. Числові результати. За допомогою викладеної вище методики будувалися розв'язки задачі (0.1) для порожнин конкретної геометричної форми. Спочатку розглянемо випадки порожнин, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Тоді задача (0.1) допускає відокремлення кругової координати η в циліндричній (z, r, η) чи в сферичній (R, θ, η) системах координат. Частинні розв'язки задачі (0.1) та (1.3) мають вигляд

$$\varphi(z, r, \eta) = \varphi^m(z, r)\cos m\eta, \ \varphi(z, r, \eta) = \varphi^m(z, r)\sin m\eta, \ m = 0, 1, \ldots . \quad (4.1)$$

4.1. Круговий циліндр із сферичним днищем. Розглянемо область Ω, яка складається з кругового циліндра висоти h_1 одиничного радіуса та сферичного днища висоти h_2, радіус якого підібрано таким чином, щоб сферична порожнина неперервно переходила в циліндричну. Нехай лінія перетину циліндричної та сферичної поверхонь лежить у площині $z = 0$. Тоді області Ω_0 и Ω_1 задаються нерівностями

$$\Omega_0: 0 < r < 1, \quad 0 < z < h_1; \qquad \Omega_1: z < 0, \quad r^2 + (z - z_0)^2 < R_0^2,$$

де $R_0 = (h_2 + 1/h_2)/2$, $z_0 = (1/h_2 - h_2)/2$. В якості системи координатних функцій $\{w_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ виберемо такі функції:

$$w_{2k-1}^m = J_m(\xi_k^m r)\frac{\cosh(\xi_k^m z)}{\cosh(\xi_k^m h_1)}\cos m\eta,$$

$$w_{2k}^m = J_m(\xi_k^m r)\frac{\sinh(\xi_k^m (h_1 - z))}{\sinh(\xi_k^m h_1)}\cos m\eta, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

де $J_m(r)$ — функція Бесселя m-го порядку, ξ_k^m — корені похідної від функції Бесселя $J_m'(\xi_k^m) = 0$. Ці функції задовольняють умову $\partial w_k^m / \partial r = 0$ при $r = 1$ і ортогональні між собою в метриці простору $\overline{W}_2^1(\Omega_0)$. При $z = 0$ функції w_{2k-1}^m і w_{2k}^m набувають значень

$$w_{2k-1}^m(0, r, \eta) = \frac{J_m(\xi_k^m r)}{\cosh(\xi_k^m h_1)}\cos m\eta, \qquad w_{2k}^m(0, r, \eta) = J_m(\xi_k^m r)\cos m\eta,$$

які відрізняються між собою сталим множником. Отже, і розв'язки крайових задач (3.2) для функцій w_{2k-1}^m і w_{2k}^m відрізнятимуться між собою на цей же сталий множник $\cosh(\xi_k^m h_1)$. Значення гармонічної функції

$$g_k^m = J_m(\xi_k^m r)\frac{\cosh(\xi_k^m (z + h_2))}{\cosh(\xi_k^m h_2)}\cos m\eta$$

та функції $w_{2k}^m(z, r, \eta)$ при $z = 0$ збігаються. В якості $f_k^m(z, r, \eta)$ вибираємо такі функції $f_k^m(z, r, \eta) = P_{m+2k-1}^m(\cos\theta) R^{m+2k-1}\cos m\eta$, де $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\tan\vartheta = z/r$, $P_{m+2k-1}^m(\mu)$ — приєднані многочлени Лежандра.

Для ілюстрації характеру швидкості збіжності послідовності наближених значень власних чисел, в залежності від числа N врахованих координатних функцій $w_k^m(z, r, \eta)$ та від числа N_1 врахованих координатних функцій $f_k^m(z, r, \eta)$, в табл. 1 наведено числові дані, одержані при різних значеннях N і

N_1 для найбільш несприятливого випадку $h_1 = 0,1$, $h_2 = 5,0$.

Таблиця 1

N	N_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
10	10	2,64044024	5,66110525	8,71389097	11,80063708	14,91397831
10	11	2,63745638	5,66097858	8,71388477	11,80063603	14,91397807
10	12	2,63516666	5,66084757	8,71387884	11,80063498	14,91397783
11	10	2,64043470	5,66106607	8,71379971	11,80050104	14,91382187
11	11	2,63745085	5,66093941	8,71379351	11,80049999	14,91382163
11	12	2,63516114	5,66080842	8,71378759	11,80049895	14,91382139
12	10	2,64043058	5,66103831	8,71373696	11,80040883	14,91371549
12	11	2,63744674	5,66091166	8,71373077	11,80040778	14,91371525
12	12	2,63515704	5,66078068	8,71372485	11,80040674	14,91371501

У табл. 2 наведено результати розрахунків наближень для перших п'яти власних значень задачі (1.3) при різних значеннях h_1 (висоти заповнення рідиною циліндричної частини області) та при різних значенннях h_2 (висоти сферичної частини області, яка повністю заповнена рідиною). При цьому враховано число координатних функцій $N = N_1 = 15$.

Таблиця 2

h_1	h_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0,1	0,5	1,16507392	5,07866631	8,42664127	11,65089689	14,83489044
0,3	0,5	1,48498780	5,30086385	8,53250435	11,70546681	14,86351015
0,5	0,5	1,66169406	5,32776731	8,53618955	11,70599989	14,86358843
1,0	0,5	1,81149651	5,33142479	8,53631634	11,70600490	14,86358863
0,1	1,0	2,07546073	5,43010606	8,58739326	11,73363917	14,87884717
0,3	1,0	1,95136241	5,34263452	8,53791520	11,70625037	14,86362732
0,5	1,0	1,89320122	5,33273839	8,53636819	11,70600716	14,86358873
1,0	1,0	1,84933980	5,33144893	8,53631638	11,70600490	14,86358863
0,1	2,0	2,07546073	5,43010606	8,58739326	11,73363917	14,87884717
0,3	2,0	1,95136241	5,34263452	8,53791520	11,70625037	14,86362732
0,5	2,0	1,89320122	5,33273839	8,53636819	11,70600716	14,86358873
1,0	2,0	1,84933980	5,33144893	8,53631638	11,70600490	14,86358863
0,1	5,0	2,63034594	5,66009021	8,71353787	11,80017122	14,91345283
0,3	5,0	2,18531947	5,36869242	8,54176327	11,70682489	14,86371318
0,5	5,0	1,99848790	5,33576805	8,53649358	11,70601246	14,86358896
1,0	5,0	1,86527445	5,33146343	8,53631640	11,70600490	14,86358863

4.2. ***Підпростір із круговим отвором.*** Розглянемо випадок нескінченної області Ω у вигляді півпростору, накритого твердою кришкою з круговим отвором. Задача (0.1) для такої області характерна тим, що довільна однозв'язна область, заповнена рідиною, вільна поверхня якої має форму того самого круга, повністю вписується в даний півпростір, так що вільні поверхні їх збігаються, а тому власні значення задачі (0.1) для півпростору є верхньою межею для власних значень задачі (0.1) для довільної однозв'язної області з круговою вільною поверхнею [4].

У цьому випадку задача також допускає відокремлення кругової координати. Розділимо півпростір $z < 0$ одиничною сферою $R = 1$ на дві підобласті $\Omega_0 : R < 1$ і $\Omega_1 : R > 1$. В області Ω_1 можна легко визначити розв'язки спектральної задачі (3.3), яка для даної області Ω_1 має вигляд

$$\begin{gathered} \Delta v = 0 \quad \text{при} \quad R > 1,\ z < 0; \qquad v < C/R \quad \text{при} \quad R \to \infty, \\ -\frac{\partial v}{\partial R} = \sigma v \quad \text{при} \quad R = 1,\ z < 0; \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad R > 1,\ z = 0. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Розв'язки цієї задачі знаходимо шляхом відокремлення змінних, і вони мають вигляд

$$\begin{gathered} v_k^m(z, r, \eta) = P_{m+2k-2}^m(\cos\theta) R^{-m-2k+1} \cos m\eta, \quad \sigma_k^m = m + 2k - 1, \\ k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4.3}$$

де $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\tan\vartheta = z/r$, $P_{m+2k}^m(\mu)$ — приєднані многочлени Лежандра.

В якості системи координатних функцій $\{w_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ виберемо такі функції:

$$w_k^m(z, r, \eta) = P_{m+k-1}^m(\cos\theta) R^{m+k-1} \cos m\eta, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.4}$$

При непарних значеннях індексу k, тобто при $k = 2j - 1$, значення функції $w_{2j-1}^m(z, r, \eta)$ при $R = 1$ збігаються із значеннями функції $v_j^m(z, r, \eta)$ при $R = 1$; отже, в цьому випадку розв'язок задачі (3.3) одержуємо відразу в аналітичному вигляді

$$u_{2j-1}^m(z, r, \eta) = v_j^m(z, r, \eta). \tag{4.5}$$

При парних значеннях індексу k, тобто при $k = 2j$, значення функції $w_{2j}^m(z, r, \eta)$ при $R = 1$ розкладемо в узагальнений ряд Фур'є за граничними значеннями функцій $v_j^m(z, r, \eta)$ при $R = 1$; тобто потрібно розвинути функцію $P_{m+2k-1}^m(\mu)$ в узагальнений ряд Фур'є за функціями $P_{m+2j}^m(\mu)$:

$$P_{m+2k-1}^m(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{kj} P_{m+2j}^m(\mu), \tag{4.6}$$

де коефіцієнти Фур'є d_{kj} визначаються таким чином:

$$d_{kj} = \frac{\int_{-1}^{0} P_{m+2k-1}^m(\mu) P_{m+2j}^m(\mu) d\mu}{\int_{-1}^{0} (P_{m+2j}^m(\mu))^2 d\mu}.$$

Інтеграл у знаменнику, тобто квадрат норми функції $P_{m+2j}^m(\mu)$, є табличним:

$$\left\| P_{m+2j}^m(\mu) \right\|^2 = \int_{-1}^{0} (P_{m+2j}^m(\mu))^2 d\mu = \frac{(2j + 2m)!}{(2j)!(4j + 2m + 1)}.$$

Інтеграл у чисельнику обчислимо таким чином. Функції $P^m_{m+2k-1}(\mu)$ і $P^m_{m+2j}(\mu)$ є розв'язками рівняння Лежандра

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP^m_\nu(\mu)}{d\mu}\right) + \left(\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)P^m_\nu = 0$$

при $\nu = m+2k-1$ і $\nu = m+2k$. Помножимо це рівняння при $\nu = m+2k-1$ на $P^m_{m+2j}(\mu)$, а при $\nu = m+2k$ на $P^m_{m+2k-1}(\mu)$ і віднімемо друге від першого. Одержану рівність проінтегруємо в межах від -1 до 0. В результаті одержимо

$$2(k+j+m)(2k-2j-1)\int_{-1}^{0} P^m_{m+2k-1}(\mu)P^m_{m+2j}(\mu)d\mu + \frac{dP^m_{m+2k-1}}{d\mu}(0)P^m_{m+2j}(0) = 0.$$

Оскільки

$$P^m_{m+2j}(0) = \frac{2^m\Gamma(j+m+1/2)}{\sqrt{\pi}(-1)^{j+m}\Gamma(j+1)}, \qquad \frac{dP^m_{m+2k-1}}{d\mu}(0) = \frac{2^{m+1}\Gamma(k+m+1/2)}{\sqrt{\pi}(-1)^{k+m+1}\Gamma(k)},$$

то маємо

$$\int_{-1}^{0} P^m_{m+2k-1}(\mu)P^m_{m+2j}(\mu)d\mu = \frac{2^{2m}(-1)^{k+j}\Gamma(j+m+1/2)\Gamma(k+m+1/2)}{(k+j+m)(2k-2j-1)\sqrt{\pi}\,\Gamma(j+1)\Gamma(k)}.$$

Для вивчення збіжності одержаних рядів потрібно спочатку пронормувати функції $P^m_{m+2j}(\mu)$, розділивши їх на $\left\|P^m_{m+2j}(\mu)\right\|$. Щоб одержати коефіцієнти Фур'є b_{kj} розвинення функції $P^m_{m+2k-1}(\mu)$ в узагальнені ряди Фур'є за нормованими функціями, слід помножити коефіцієнти d_{kj} на $\left\|P^m_{m+2j}(\mu)\right\|$:

$$b_{kj} = \frac{2^{2m}(-1)^{k+j}\Gamma(j+m+1/2)\Gamma(k+m+1/2)\sqrt{\Gamma(2j+1)(4j+2m+1)}}{\pi(k+j+m)(2k-2j-1)\Gamma(j+1)\Gamma(k)\sqrt{\Gamma(2j+2m+1)}}. \quad (4.7)$$

Враховуючи, що згідно з формулами подвоєння

$$\Gamma(2j+1) = 2^{2j}(2\pi)^{-1/2}\Gamma(j+1/2)\Gamma(j+1),$$

$$\Gamma(2j+2m+1) = 2^{2j+2m}(2\pi)^{-1/2}\Gamma(j+m+1/2)\Gamma(j+m+1),$$

маємо

$$b_{kj} = \frac{2^{m+1}(-1)^{k+j}\Gamma(k+m+1/2)}{\pi(k+j+m)(2k-2j-1)\Gamma(k)}\sqrt{\frac{(j+m/2+1/4)\Gamma(j+m+1/2)\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+m+1)}}. \quad (4.8)$$

Визначимо границю, до якої прямує підкореневий вираз при $j\to\infty$:

$$Q = \lim_{j\to\infty}\frac{(j+c)\Gamma(j+1/2)\Gamma(j+m+1/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+m+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+c)\Gamma(x+1/2)\Gamma(x+m+1/2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+m+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+c)\Gamma(x+1/2)\Gamma(x+m+1/2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+m+1)}\right)^{1/2}\lim_{y\to\infty}\left(\frac{(y+c)\Gamma(y+1/2)\Gamma(y+m+1/2)}{\Gamma(y+1)\Gamma(y+m+1)}\right)^{1/2}.$$

Покладемо $y = x-1/2$, тоді

$$Q = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+c)(x+c-1/2)\Gamma(x+1/2)\Gamma(x+m+1/2)\Gamma(x)\Gamma(x+m)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+m+1)\Gamma(x+1/2)\Gamma(x+m+1/2)}\right)^{1/2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+c)(x+c-1/2)}{x(x+m)}\right)^{1/2} = 1.$$

Це означає, що коефіцієнти Фур'є прямують до нуля, як $1/j^2$ при $j \to \infty$. Коефіцієнти ряду Фур'є для нормальної похідної прямують до нуля, як $1/j$. Отже, члени рядів (3.5) прямують до нуля, як $1/j^3$ при $j \to \infty$. В табл. 3 наведено наближені значення перших п'яти власних значень задачі (3.2) для різних значень m. Значення N_1 вибрано скрізь рівним 50. Порівняння величин власних значень для $m = 0$ і $m = 2$ показує їх майже цілковитий збіг. Цей цікавий факт можна пояснити деякою подібністю форм коливання рідини при $m = 0$ і $m = 2$.

Таблиця 3

N	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
26	0	4,1213229	7,3421094	10,5170563	13,6771942	16,8358876
22	1	2,7547983	5,8923261	9,0332322	12,1744288	15,3684084
22	2	4,1213765	7,3422856	10,5174401	13,6772768	16,9653752
22	3	5,4001086	8,7184547	11,9408563	15,1315761	18,5998851
22	4	6,6303358	10,0455576	13,3198849	16,5373578	20,1609717
22	5	7,8290755	11,3372899	14,6622180	17,9076891	21,7928280

Для оцінки точності одержаних числових результатів в табл. 4 наведено послідовність наближених величин перших п'яти власних значень, отриману для $m = 1$ при різних значеннях числа N врахованих координатних функцій $w_k^m(z,r)$ та різних значеннях числа N_1 врахованих власних функцій задачі (3.3), які в даному випадку збігаються з функціями $\frac{1}{R}w_k^m\left(\frac{z}{R^2},\frac{r}{R^2}\right)$.

Таблиця 4

N	N_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
24	50	4,1212263	7,3417839	10,5163673	13,6755174	16,9646325
25	50	4,1211793	7,3416384	10,5160733	13,6755127	16,8733649
26	50	4,1211766	7,3416224	10,5160151	13,6753301	16,8298262
24	60	4,1213229	7,3421052	10,5170516	13,6766667	16,9682459
25	60	4,1212734	7,3419540	10,5167497	13,6764602	16,8696450
26	60	4,1212676	7,3419253	10,5166599	13,6764502	16,8262213
24	70	4,1213808	7,3422976	10,5174616	13,6773797	16,9703598
25	70	4,1213302	7,3421443	10,5171586	13,6770666	16,8679142
26	70	4,1213229	7,3421094	10,5170563	13,6771942	16,8358876

Як видно з таблиці, при збільшенні N і фіксованому N_1 значення λ_i зменшуються і, навпаки, при збільшенні N_1 і фіксованому N значення λ_i зростають, хоча це зростання має більш повільний характер. Порівнюючи значення $\lambda_1 = 2{,}7547983$, $\lambda_2 = 5{,}8923261$, $\lambda_3 = 9{,}0332322$ із табл. 3 зі значеннями $\lambda_1 = 2{,}7622$, $\lambda_2 = 5{,}9325$, $\lambda_3 = 9{,}1636$, взятими із роботи [8], де наближений розв'язок задачі (4.2) побудовано шляхом зведення задачі в півпросторі за допомогою перетворення інверсії до задачі в кульовій області, бачимо, що одержані тут дані є значно меншими, а отже, і більш точними, оскільки ми шукаємо мінімум функціонала.

5. Висновки. Запропоновану вище методику побудови наближених розв'язків задачі можна інакше трактувати як використання поряд з основною системою координатних функцій $\{w_k^m\}_{k=1}^{\infty}$, які визначені скрізь в області Ω, також деяких систем гармонічних функцій $\{f_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ (для області Ω_1), рівних нулю на G — межі розділу областей Ω_0 и Ω_1. Продовжуючи ці функції нулем в область $\Omega \setminus \Omega_1$, бачимо, що вони належать області визначення функціонала $F(\varphi)$. Завдяки тому, що $f_k^m = 0$ на G та продовжуються нулем на решту області Ω, включаючи і межу Σ, внесок функцій f_k^m вдається остаточно врахувати вже на етапі побудови системи координатних функцій, тобто до розв'язування спектральної задачі (1.3). Такий підхід можна розглядати також як узагальнення методу ортогональних проекцій, застосованого автором в роботі [9] для побудови розв'язків задачі (0.1).

Описаним вище способом вдається побудувати наближені розв'язки задачі також для несиметричних областей Ω. Зокрема, побудовано алгоритм знаходження власних значень задачі для нахиленого кругового циліндра, який узагальнює методику роботи [10]. Розбиття області Ω на підобласті дає можливість більш точно задовольнити крайові умови задачі на кожній ділянці межі області Ω. Алгоритм розв'язування задачі піддається при цьому більш чіткому аналізу. Використання розв'язків спектральної задачі (3.3) для побудови розв'язків допоміжної крайової задачі (3.2) дає можливість звести побудову розв'язків задачі (0.1) в нескінченних областях Ω до побудови розв'язків задачі (1.3) в обмежених областях, як це, наприклад, було зроблено вище у випадку півпростору.

1. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // Прикл. математика и механика. – 1957. – **21**, № 2. – С. 169–174.
2. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966. – 270 с.
3. *Вариационные* методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью / Под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1962. – 248 с.
4. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1969. – 250 с.
5. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
6. *Копачевский Н. Д.* О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1967. – **7**, № 1. – С. 128–146.
7. *Михлин С. Т.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
8. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.
9. *Барняк М. Я.* Применение метода ортогональных проекций к исследованию малых колебаний жидкости в сосуде // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1988. – Вып.10 (44). – С. 37–43.
10. *Луковський І. О., Барняк М. Я.* Наближений метод побудови розв'язків задачі про власні коливання ідеальної рідини в похилому круговому циліндрі // Допов. НАН України. – 1997. – № 5. – С. 28–32.

Одержано 26.04.2004,
після доопрацювання — 20.07.2005