УДК 517.946

Н. В. Афанасьева, А. Ф. Тедеев
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

We consider the Cauchy problem for doubly nonlinear degenerate parabolic equations with nonlocal source under assumption that the initial function is integrable. We establish the global in time existence and nonexistence of solutions of the problem.

Розглядається задача Коші для двічі нелінійного виродженого параболічного рівняння з нелокальним джерелом. Припускається, що початкова функція є інтегровною. Встановлюється глобальне за часом існування та неіснування розв'язків задачі.

1. Введение. В данной работе будем рассматривать задачу Коши

$$u_t = \operatorname{div}\left(u^{\alpha}\,|Du|^{m-1}\,Du\right) + \\ + \left(\int\limits_{R^N} K(y) u^q(y,t)dy\right)^{\frac{p-1}{q}} u^r, \quad x \in R^N, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in R^N, \tag{1.2}$$

где $m + \alpha - 1 > 0$, $\alpha \geq 0$, $p > 0$, $r \geq 1$, $p + r > 2$, $1 \leq q < \infty$, $m > 0$, $u_0(x) \in L_1(R^N)$ и

$$K(y) = (1 + |y|)^{\mu}, \quad -N < \mu < N(q-1).$$

Если в (1.1) положить $m = 1$, $\alpha = 0$ и $p = 1$, то получим начальную задачу для уравнения

$$u_t = \triangle u + u^r, \qquad x \in R^N, \quad t > 0. \tag{1.3}$$

Фуджитой [1] впервые был изучен вопрос о глобальной разрешимости по времени задачи (1.3), (1.2). Он показал, что если $1 < r < r_c = 1 + \dfrac{2}{N}$, то начальная задача (1.3), (1.2) не имеет нетривиальных, неотрицательных решений, существующих при любом $t \in [0, +\infty)$, т. е. существует такое конечное $T > 0$, что

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N} \to \infty \quad \text{при} \quad t \to T.$$

С другой стороны, было доказано, что если $r > r_c$, то при некоторой малости начальной функции существуют глобальные по времени положительные решения.

Число r_c принято называть показателем Фуджиты. Задача (1.1), (1.2) рассматривалась многими авторами при $p = 1$ (см., например, обзорные работы [2, 3]). Оказалось, что в этом случае для $m + \alpha - 1 > 0$ показатель Фуджиты $r_c = m + \alpha + (m+1)/N$ [4–6]. Позже было показано, что этот же результат остается верным и при $m + \alpha - 1 < 0$ [7, 8]. Случай $p > 1$, $m = 1$, $\alpha = 0$ изучался в работах [6, 9].

Целью данной работы является получение условий существования и несуществования глобального по времени решения задачи (1.1), (1.2). Поскольку уравнение (1.1) вырождается, решение будем понимать в обобщенном смысле. Функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), если $u(x,t) \geq 0$ почти всюду в $Q_T = R^N \times (0,T)$, удовлетворяет условиям

$$u \in L_\infty(Q_T) \cap C((0,\infty); L_2(R^N)) \cap \underline{C([0,\infty); L_1(R^N))},$$
$$u^\alpha |Du|^m \in L_1(Q_T),$$
$$u^r \in L_1(Q_T)$$

и для любой ограниченной области $\Omega \subset Q_T$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \left(-u\eta_t + u^\alpha |Du|^{m-1} DuD\eta\right) dxd\tau =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\int\limits_{R^N} K(y) u^q(y,t) dy \right)^{\frac{p-1}{q}} u^r \eta dxd\tau \quad \forall \eta \in C_0^1(\Omega).$$

Кроме того, $u(\cdot,t) \to u_0$ при $t \to 0$ в $L_1(R^N)$.

Основные результаты сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1.1. *Пусть в* (1.1) $p > 1$, $r \geq 1$, $q \geq 1$, $-N < \mu \leq 0$ *и начальная функция удовлетворяет условию*

$$\|u_0\|_{1,R^N} + \|u_0\|_{\lambda,R^N} \leq \delta \tag{1.4}$$

с достаточно малым $\delta > 0$ *и* $\lambda > N(r - m - \alpha)/(m+1)$, $\lambda \geq 1$.

Тогда если

$$r > r^* = m + \alpha + \frac{m+1}{N} - (-\mu + N(q-1))\frac{p-1}{Nq},$$

то задача (1.1), (1.2) *имеет решение* $u(x,t)$, *определенное при любом* $t > 0$. *Более того, найдется постоянная* γ, *которая зависит лишь от* N, m, α, p, r, q, μ, *такая, что* $u(x,t)$ *при любом* $t > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \leq \gamma t^{-\frac{N}{K}} \|u_0\|_{1,R^N}^{\frac{m+1}{K}}, \tag{1.5}$$

где $K = N(m + \alpha - 1) + m + 1$.

Теорема 1.2. *Пусть теперь* $p < 1$, $p + r - 2 > 0$, $p > \max\{0, 1 - (r-1)(m+$ $+ 1)/K\}$, $0 \leq \mu < N(q-1)$, $r > r^*$, $q > N(r - m - \alpha)/(m+1)$. *Предположим также, что начальная функция удовлетворяет условию* (1.4) *при некотором достаточно малом* δ *и* $\lambda = q$, *а ее носитель содержится в шаре некоторого радиуса* ρ_0 *с центром в начале координат.*

Тогда существует глобальное по времени решение $u(x,t)$ *задачи* (1.1), (1.2), *для которого при некоторой постоянной* γ, *зависящей лишь от* N, m, α, p, r, μ, q, *выполняется неравенство* (1.5).

Теорема 1.3. *Пусть в* (1.1) $-N < \mu < N(q-1) - (m+1)(p-1)/q$. *Если* p *и* r *таковы, что* $p > 1$, $p < 1 + \min\{q, Nq^2/(m+1)\}$, $p \le 1 + (m+1)/N$, $m+\alpha < r < r^*$, *то любое неотрицательное решение задачи* (1.1), (1.2) *становится неограниченным при некотором* $T > 0$.

***Замечание* 1.1.** Теоремы 1.1 и 1.3 при $m = 1$ и $\alpha = 0$ совпадают с результатами работ [6, 9]; метод, использованный в этих работах, основывается на теоремах сравнения. Здесь же используются и развиваются энергетические подходы работ [4, 5, 10].

Особо отметим, что при $0 < p < 1$ не было результатов даже для модельных уравнений, поскольку для таких уравнений отсутствуют теоремы сравнения (комментарии по этому вопросу см. в [6]).

Основная трудность при доказательстве глобальной разрешимости в случае $0 < p < 1$ (теорема 1.2) при нашем подходе заключается в том, что необходимо оценивать нелокальное слагаемое снизу, поскольку оно находится в отрицательной степени. В данной работе это достигается путем получения точной оценки носителя решения. По этой причине в условии теоремы мы потребовали компактность носителя начальной функции.

Структура работы следующая: в п. 2 доказывается теорема 1.1, в пунктах 3 и 4 приводятся соответственно вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы 1.2, и доказательство теоремы 1.2, в п. 5 доказывается теорема 1.3.

2. Доказательство теоремы 1.1. Точно так же, как и в работах [4, 5, 10], можно показать, что если

$$t\left(\int\limits_{R^N}(1+|y|)^{\mu}u^q(y,t)dy\right)^{\frac{p-1}{q}}\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1}<\frac{1}{2}, \tag{2.1}$$

то имеется оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le t^{-\frac{N}{K_\lambda}}\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R^N}u^{\lambda}(\cdot,\tau)dx\right)^{\frac{m+1}{K_\lambda}}\qquad \forall t\in(0;T), \tag{2.2}$$

где

$$K_\lambda = N(m+\alpha-1)+\lambda(m+1)>0,\quad \lambda\ge 1.$$

Таким образом, теорема 1.1 будет доказана, если мы покажем, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство (2.1) и имеет место оценка

$$\sup_{0<\tau<t}\|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}\le\gamma\|u_0\|_{1,R^N}. \tag{2.3}$$

Здесь и далее через γ будем обозначать постоянные, зависящие лишь от N, m, α, p, r, q, μ, λ. Кроме того, пусть $B_\rho(x_0) = \{|x-x_0| < \rho\}$ — шар радиуса ρ с центром в $x_0 \in R^N$.

Рассмотрим последовательность $u_n(x,t)$, $n \ge 1$, решений следующих задач Коши – Дирихле:

$$u_{nt} - \operatorname{div}\left(u_n^\alpha |Du_n|^{m-1} Du_n\right) =$$

$$= \min\left\{n, \left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^\mu u_n^q dy\right)^{\frac{p-1}{q}} u_n^r\right\} \quad \text{в} \quad B_n \times (0, +\infty), \tag{2.4}$$

$$u_n(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial B_n \times (0, +\infty), \tag{2.5}$$

$$u(x,0) = u_{0n} \quad x \in B_n, \tag{2.6}$$

где $B_n = B_{\rho_n}(0)$ с некоторой последовательностью $\rho_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $u_{0n} \in C_0^\infty(B_n)$ такие, что $u_{0n} \to u_0$ в $L_1(R^N) \cap L_\lambda(R^N)$ и, кроме того,

$$\|u_{0n}\|_{1,R^N} \le \|u_0\|_{1,R^N}, \quad \|u_{0n}\|_{\lambda,R^N} \le \|u_0\|_{\lambda,R^N}.$$

Продолжив $u_n(x,t)$ нулем вне $B_n \times (0, +\infty)$, мы тем самым определим ее во всем $R^N \times (0, +\infty)$. Из результатов работы [11] следует, что задача (2.4)–(2.6) глобально разрешима при любом фиксированном n. Ниже мы установим оценки (2.1), (2.3) для u_n с постоянной γ, не зависящей от n. Тогда может быть использован стандартный предельный переход (см., например, [4, 10]), и теорема 1.1 будет доказана.

В дальнейшем для простоты опустим индекс n, обозначив u_n через u.

Пусть $T_1 = \sup\{t > 0 : \text{выполнено условие (2.1)}\}$. Умножим обе части (2.4) на u^{q-1} и проинтегрируем по множеству $Q_t = R^N \times (0;t)$, где $t \in (0;T_1)$. В результате с учетом того, что $\mu < 0$, получим

$$\int\limits_{R^N} u^q(x,t)dx \le \int\limits_{R^N} u_0^q dx + q\int\limits_0^t \left(\int\limits_{R^N} u^q(y,\tau)dy\right)^{\frac{p-1}{q}+1} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} d\tau.$$

Введем величину $\Phi_q(t) = \sup_{0<\tau<t} \int_{R^N} u^q(x,\tau)dx$. Тогда из предыдущего неравенства имеем

$$\int\limits_{R^N} u^q(x,t)dx \le \int\limits_{R^N} u_0^q dx + q\Phi_q^{\frac{p-1}{q}+1}(t) \int\limits_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} d\tau. \tag{2.7}$$

Используя в последнем интеграле (2.7) оценку (2.2), находим

$$\int\limits_{R^N} u^q(x,t)dx \le \int\limits_{R^N} u_0^q dx + \gamma\Phi_q^{\frac{p-1}{q}+1}(t)\Psi_\lambda(t), \quad t \in (0;T_1), \tag{2.8}$$

где $\Psi_\lambda(t) = t^{1-\frac{N(r-1)}{K_\lambda}} \Phi_\lambda(t)^{\frac{(r-1)(m+1)}{K_\lambda}}$. Понятно, что $\Psi_\lambda(t)$ имеет смысл лишь при $\lambda > N(r-m-\alpha)/(m+1)$. Обозначим еще

$$T_q = \sup\{t > 0 : \gamma\Phi_q^{\frac{p-1}{q}}(t)\Psi_\lambda(t) < \varepsilon\}.$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ из (2.8) следует

$$\Phi_q(t) \le \gamma\|u_0\|_{q,R^N}^q, \quad t \in (0; \min\{T_1, T_q\}). \tag{2.9}$$

Умножая теперь уравнение (2.4) на $u^{\lambda-1}$ и интегрируя по Q_t, получаем

$$\int\limits_{R^N} u^\lambda(x,t)dx \leq \int\limits_{R^N} u_0^\lambda dx +$$

$$+\lambda \int\limits_0^t \left(\int\limits_{R^N} u^q(x,\tau)dx \right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(x,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \int\limits_{R^N} u^\lambda(\cdot,\tau)dxd\tau.$$

С учетом (2.9) из последнего неравенства следует

$$\int\limits_{R^N} u^\lambda(x,t)dx \leq \|u_0\|_{\lambda,R^N}^\lambda + \gamma\|u_0\|_{q,R^N}^{p-1}\Phi_\lambda(t)\Psi_\lambda(t). \tag{2.10}$$

Определим $T_\lambda = \sup\{t > 0 : \gamma\|u_0\|_{q,R^N}^{p-1}\Psi_\lambda(t) < \varepsilon\}$. Тогда при достаточно малом ε из (2.10) имеем

$$\Phi_\lambda(t) \leq \gamma \|u_0\|_{\lambda,R^N}^\lambda, \quad t \in (0; \min\{T_1, T_q, T_\lambda\}). \tag{2.11}$$

Найдем T_0 из условия

$$\gamma (T_0)^{1-\frac{N(r-1)}{K_\lambda}} \|u_0\|_{q,R^N}^{p-1} \|u_0\|_{\lambda,R^N}^{\frac{(r-1)(m+1)}{K_\lambda}\lambda} = \varepsilon.$$

Ясно, что $\min\{T_q, T_\lambda\} > T_0 > 1$, если $\|u_0\|_{\lambda,R^N}$ достаточно мала. Если же $t \in$ $\in (0; \min\{T_0, T_1\})$, то в силу малости $\|u_0\|_{\lambda,R^N}$ выполняется неравенство

$$t \left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q(y,t)dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \leq$$

$$\leq \gamma t^{1-\frac{N(r-1)}{K_\lambda}} \|u_0\|_{\lambda,R^N}^{\frac{(r-1)(m+1)}{K_\lambda}\lambda} \|u_0\|_{q,R^N}^{p-1} \leq \frac{1}{4}.$$

Отсюда $T_1 > T_0$.

Проинтегрируем (2.4) по Q_t, где теперь $t \in (0, T_0)$:

$$\int\limits_{R^N} u(x,t)dx \leq \int\limits_{R^N} u_0(x)dx +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)dxd\tau.$$

Отсюда при $t \in (0; T_0)$ получаем

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} \leq \|u_0\|_{1,R^N} +$$

$$+ \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} d\tau. \tag{2.12}$$

Поскольку $t < T_0$, последний интеграл в правой части (2.12) можно оценить следующим образом:

$$\int_0^t \left(\int_{R^N} K(y) u^q(y,\tau) dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} d\tau \le$$

$$\le \gamma T_0^{1-\frac{N(r-1)}{K_\lambda}} \|u_0\|_{\lambda,R^N}^{\frac{\lambda(r-1)(m+1)}{K_\lambda}} \|u_0\|_{q,R^N}^{p-1} \le \varepsilon.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \le \gamma \|u_0\|_{1,R^N}, \quad t \in (0, T_0), \tag{2.13}$$

когда ε — достаточно малая величина.

Итак, при любом $t \in (0; T_0)$, где $T_0 > 1$, имеем (2.13).

Интегрируя теперь (2.4) по множеству $R^N \times (1; t)$, где $t \in (1; T_1)$, получаем

$$\int_{R^N} u(x,t) dx \le \gamma \|u_0\|_{1,R^N} + \int_1^t \left(\int_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \int_{R^N} u^r dx d\tau.$$

Очевидно, что $(1+|y|)^\mu \le |y|^\mu$, поэтому

$$\int_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q dy = \int_{|y|<\rho(t)} |y|^\mu u^q(y,t) dy + \int_{|y|>\rho(t)} |y|^\mu u^q(y,t) dy, \tag{2.14}$$

$\rho = \rho(t)$ определим позже. Оценим отдельно каждый интеграл в правой части (2.14):

$$\int_{|y|<\rho(t)} |y|^\mu u^q(y,t) dy \le \gamma \rho^{N+\mu} \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^q \le$$

$$\le \gamma \rho^{N+\mu} t^{-(Nq)/K} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right)^{q(m+1)/K}$$

и

$$\int_{|y|>\rho(t)} |y|^\mu u^q(y,t) dy \le \rho^\mu \int_{R^N} u^q dy \le$$

$$\le \rho^\mu \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{q-1} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right) \le$$

$$\le \gamma \rho^\mu t^{-N(q-1)/K} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right)^{1+\frac{(q-1)(m+1)}{K}}.$$

Выберем теперь ρ из условия

$$\rho^{N+\mu} t^{-(Nq)/K} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right)^{\frac{q(m+1)}{K}} =$$

$$= \rho^\mu t^{-N(q-1)/K} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right)^{1+\frac{(q-1)(m+1)}{K}},$$

т. е. $\rho(t) = t^{1/K} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right)^{(m+\alpha-1)/K}$.

При таком выборе ρ получим

$$\int\limits_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q dy \le \gamma t^{-\frac{-\mu+N(q-1)}{K}} \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}\right)^{\frac{(N+\mu)(m+\alpha-1)+q(m+1)}{K}}. \tag{2.15}$$

Из (2.13) и (2.15) имеем

$$\int\limits_{R^N} u(x,t)dx \le \gamma \|u_0\|_{1,R^N} +$$

$$+\gamma \int\limits_1^t \left(\tau^{-\frac{-\mu+N(q-1)}{K}} \sup_{0<s<\tau} \|u(\cdot,s)\|_{1,R^N}^{\frac{(N+\mu)(m+\alpha-1)+q(m+1)}{K}}\right)^{\frac{p-1}{q}} \|u\|_{\infty,R^N}^{r-1} \int\limits_{R^N} u dx d\tau \le$$

$$\le \gamma\|u_0\|_{1,R^N} + \gamma \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{\frac{(N+\mu)(m+\alpha-1)(p-1)+q(p+r-2)(m+1)}{Kq}+1} \times$$

$$\times \int\limits_1^t \tau^{-\frac{(-\mu+N(q-1))(p-1)+Nq(r-1)}{Kq}} d\tau \tag{2.16}$$

при $t \in (1;T_1)$.

Обозначим $D_0 = \displaystyle\int_1^\infty \tau^{-\frac{(-\mu+N(q-1))(p-1)+Nq(r-1)}{Kq}} d\tau$. Поскольку $r > r^*$, то $D_0 <$ $< +\infty$. Теперь из (2.16) следует

$$\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \le \gamma\|u_0\|_{1,R^N} + \gamma \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{l+1} D_0 \tag{2.17}$$

при $t \in (1;T_1)$, где $l = \dfrac{(N+\mu)(m+\alpha-1)(p-1)+q(p+r-2)(m+1)}{Kq} > 0$.

Пусть еще

$$t_1 = \sup\{t > 1 : \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \le 4\gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N}\},$$

тогда при достаточно малом $\|u_0\|_{1,R^N}$ из (2.17) следует, что при любых $t \in$ $\in (1; \min\{T_1, t_1\})$ имеет место неравенство

$$\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \le 2\gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N}. \tag{2.18}$$

Отсюда получаем $t_1 > T_1$. Значит, (2.18) верно при $t \in (1;T_1)$. Итак, мы пришли к оценке

$$\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \le \gamma\|u_0\|_{1,R^N} \quad \forall t \in (0;T_1).$$

Покажем теперь, что $T_1 = +\infty$. Из (2.14), (2.15) при $t \in (1;T_1)$ имеем

$$t\left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^\mu u^q dy\right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \le$$

$$\le (t-1)\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \left(\int\limits_{R^N} |y|^\mu u^q dy\right)^{\frac{p-1}{q}} +$$

$$+\|u(\cdot,t)\|^{r-1}_{\infty,R^N}\left(\int\limits_{R^N}|y|^{\mu}u^q dy\right)^{\frac{p-1}{q}} \le$$

$$\le (t-1)t^{-\frac{(-\mu+N(q-1))(p-1)+Nq(r-1)}{Kq}}\|u_0\|^l_{1,R^N}+\|u_0\|^l_{1,R^N}\le$$

$$\le \gamma\|u_0\|^l_{1,R^N}\left(\int\limits_1^t \tau^{-\frac{(-\mu+N(q-1))(p-1)+Nq(r-1)}{Kq}}d\tau+1\right)=$$

$$=\gamma\|u_0\|^l_{1,R^N}(D_0+1)<\frac{1}{4},$$

если $\|u_0\|_{1,R^N}$ достаточно мала. Отсюда следует, что $T_1=+\infty$. Итак, из (2.2) и (2.18) заключаем, что при $t\in(0;+\infty)$

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le\gamma t^{-\frac{N}{K}}\|u_0\|^{\frac{m+1}{K}}_{1,R^N}.$$

Теорема 1.1 доказана.

3. Вспомогательные результаты. Введем обозначение

$$I(t)=\int\limits_{R^N}(1+|y|)^{\mu}u^q(y,t)dy.$$

Для доказательства теоремы 1.2 нам потребуются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть* $u(x,t)$ *— неотрицательное решение уравнения* (1.1), $\lambda\ge 1$ *— произвольное число. Предположим, что найдутся постоянные* $0<\varkappa<1$ *и* $T>0$ *такие, что при любом* $t\in(0;T)$ *выполнено условие*

$$t(I(t))^{\frac{p-1}{q}}\|u(\cdot,t)\|^{r-1}_{\infty,R^N}\le\varkappa. \tag{3.1}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_{|x|>2\rho}u^{\alpha}|Du|^m dxd\tau\le\gamma\left(1+\rho^{-m}t^{m/K}\sup_{0<\tau<t}\|u(\cdot,\tau)\|^{m(m+\alpha-1)/K}_{1,R^N}\right)\times$$

$$\times t^{\frac{\lambda}{K_\lambda}}\sup_{0<\tau<t}\|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}\sup_{0<\tau<t}\|u(\cdot,\tau)\|^{\lambda(m+\alpha-1)/K_\lambda}_{\lambda,R^N}, \tag{3.2}$$

где K_λ *то же, что и в* (2.2).

Доказательство. Пусть $\zeta=\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция шара радиуса ρ, $\rho>0$, с центром в нуле со следующими свойствами: $0\le\zeta(x)\le1$; $\zeta(x)\equiv0$ при $|x|<\rho$; $\zeta(x)\equiv1$ при $|x|>2\rho$; $|D\zeta|\le\gamma/\rho$. Из неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_{|x|>\rho}u^{\alpha}|Du|^m\zeta^m dxd\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{|x|>\rho}u^{\alpha}|Du|^m\zeta^m u^{-\frac{1}{m+1}}u^{\frac{1}{m+1}}\tau^{\beta-\beta}dxd\tau\le$$

$$\le\left(\int\limits_0^t\int\limits_{|x|>\rho}u^{\frac{\alpha(m+1)-1}{m}}|Du|^{m+1}\zeta^{m+1}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}}dxd\tau\right)^{\frac{m}{m+1}}\times$$

$$\times\left(\int_0^t\int_{|x|>\rho} u\tau^{-\beta(m+1)}dxd\tau\right)^{\frac{1}{m+1}} \equiv I_1^{\frac{m}{m+1}}I_2^{\frac{1}{m+1}}. \tag{3.3}$$

Введем функцию $\phi(x,\tau)=\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}}u^{\frac{m+\alpha-1}{m}}(x,\tau)\zeta^{m+1}(x)$. Умножая уравнение (1.1) на $\phi(x,\tau)$ и интегрируя по $Q_t=R^N\times(0;t)$, получаем

$$\iint_{Q_t} u_\tau u^{\frac{m+\alpha-1}{m}}\zeta^{m+1}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}}dxd\tau\le$$

$$\le -\frac{m+\alpha-1}{m}\iint_{Q_t}|Du|^{m+1}u^{\frac{\alpha(m+1)-1}{m}}\zeta^{m+1}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}}dxd\tau+$$

$$+(m+1)\int_0^t\int_{\rho<|x|<2\rho}|Du|^m u^{\frac{(m+1)\alpha-1}{m}+1}\zeta^m|D\zeta|\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}}dxd\tau+$$

$$+\int_0^t (I(\tau))^{\frac{p-1}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|^{r-1}_{\infty,R^N}\tau\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}-1}\int_{|x|>\rho}u^{\frac{m+\alpha-1}{m}+1}\zeta^{m+1}dxd\tau\equiv$$

$$\equiv -\frac{m+\alpha-1}{m}I_3+(m+1)I_4+I_5. \tag{3.4}$$

Рассмотрим интеграл в левой части (3.4). Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_{R^N} u_\tau u^{\frac{m+\alpha-1}{m}}\zeta^{m+1}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}}dxd\tau=$$

$$=\frac{m}{2m+\alpha-1}\int_{|x|>\rho}u^{\frac{2m+\alpha-1}{m}}(x,t)\zeta^{m+1}t^{\frac{\beta(m+1)}{m}}dx-$$

$$-\frac{\beta(m+1)}{2m+\alpha-1}\int_0^t\int_{|x|>\rho}u^{\frac{2m+\alpha-1}{m}}\zeta^{m+1}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}-1}dxd\tau\ge$$

$$\ge -\frac{\beta(m+1)}{2m+\alpha-1}\int_0^t\int_{|x|>\rho}u^{\frac{2m+\alpha-1}{m}}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}-1}dxd\tau\equiv -\frac{\beta(m+1)}{2m+\alpha-1}I_6. \tag{3.5}$$

Для оценки I_4 воспользуемся неравенством Юнга с некоторым малым $h>0$:

$$I_4\le m\frac{h^{\frac{m+1}{m}}}{m+1}I_3+$$

$$+\frac{(h^{-1}\gamma)^{m+1}}{m+1}\int_0^t\frac{\tau\|u(\cdot,\tau)\|^{m+\alpha-1}_{\infty,R^N}}{\rho^{m+1}}\int_{|x|>\rho}u^{\frac{m+\alpha-1}{m}+1}\tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}-1}dxd\tau.$$

Заметим, что в условиях леммы справедлива оценка (2.2). С учетом (2.2) из последнего неравенства находим

$$I_4\le m\frac{h^{\frac{m+1}{m}}}{m+1}I_3+\varkappa_1\frac{h^{-(m+1)}}{m+1}\left(\rho^{-1}t^{1/K}\sup_{0<\tau<t}\|u(\cdot,\tau)\|^{(m+\alpha-1)/K}_{1,R^N}\right)^{m+1}I_6. \tag{3.6}$$

Выберем h из условия $mh^{(m+1)/m} - (m+\alpha-1)/m < 0$. Из условия (3.1) следует

$$I_5 \le \varkappa I_6. \tag{3.7}$$

Теперь из неравенств (3.4) – (3.7) имеем

$$\int\limits_0^t \int\limits_{|x|>\rho} |Du|^{m+1} u^{\frac{\alpha(m+1)-1}{m}} \zeta^{m+1} \tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}} dx d\tau \le$$

$$\le \gamma \left(1 + \rho^{-1} t^{1/K} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{(m+\alpha-1)/K}\right)^{m+1} \int\limits_0^t \int\limits_{|x|>\rho} u^{\frac{2m+\alpha-1}{m}} \tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}-1} dx d\tau, \tag{3.8}$$

и из (3.3) с учетом (3.8) получаем

$$\int\limits_0^t \int\limits_{|x|>2\rho} u^\alpha |Du|^m dx d\tau \le \int\limits_0^t \int\limits_{|x|>\rho} u^\alpha |Du|^m \zeta^m dx d\tau \le$$

$$\le \gamma \left(1 + \frac{t^{1/K}}{\rho} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{(m+\alpha-1)/K}\right)^m \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{|x|>\rho} u(\cdot,\tau) dx\right) \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{\frac{m+\alpha-1}{m}} \tau^{\frac{\beta(m+1)}{m}-1} d\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \cdot \left(\int\limits_0^t \tau^{-\beta(m+1)} d\tau\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{3.9}$$

Применяя (2.2) во втором интеграле в правой части и выбирая β таким образом, чтобы $N(m+\alpha-1)/(K_\lambda(m+1)) < \beta < 1/(m+1)$, из неравенства (3.9) сразу же получаем оценку (3.2).

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть функция* $u(x,t)$ *является решением задачи* (1.1), (1.2), *функция* u_0 *имеет финитный носитель, содержащийся в шаре радиуса* $\rho_0 > 0$, *найдется* $T > 0$ *такое, что для всех* $t \in (0,T)$ *имеет место неравенство* (3.1) *и, кроме того, выполнено условие*

$$\int\limits_0^t I^{\frac{p-1}{q}}(\tau) \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} d\tau \le \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Тогда при любом $t \in (0,T)$ *носитель функции* $u(x,t)$ *содержится в шаре радиуса* ρ_1, *удовлетворяющего условию*

$$\rho_1 \le 2\rho_0 + \gamma \left(t \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{m+\alpha-1}\right)^{\frac{1}{K}}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Следуя [5], введем последовательность срезающих функций $\zeta_n(x)$, $0 \le \zeta_n \le 1$, $n \ge 0$, со следующими свойствами: $\zeta_n(x) = 1$, $x \in B_{\rho_{n+1}} \setminus B_{\overline{\rho}_{n+1}}$, $\zeta_n(x) = 0$, $x \notin B_{\rho_n} \setminus B_{\overline{\rho}_n}$, и $|D\zeta_n| \le \gamma 2^n/(\sigma\rho)$, где $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$ — произвольное число, а $\rho_n = \rho(1+\sigma 2^{-n})$, $\overline{\rho}_n = \rho(1-\sigma 2^{-n})/2$ при $n \ge 0$ и некотором $\rho > 4\rho_0$.

Пусть $0 < \theta < 1$ — некоторое число. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\zeta_n^{m+1}(x)u^\theta(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по $R^N \times (0;t)$. После стандартных вычислений получим неравенство

$$\frac{1}{1+\theta}\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} \zeta_n^{m+1}u^{1+\theta}(x,t)dx - \frac{1}{1+\theta}\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u_0^{1+\theta}dx+$$

$$+\frac{\theta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u^{\alpha+\theta-1}|Du|^{m+1}\zeta_n^{m+1}dxd\tau \le$$

$$\le \frac{\gamma 2^{n(m+1)}\theta^{-m}}{(\sigma\rho)^{m+1}}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u^{m+\alpha+\theta}dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} (I(\tau))^{(p-1)/q}u^{r+\theta}\zeta_n^{m+1}dxd\tau. \qquad (3.12)$$

Поскольку $\rho > 4\rho_0$, то

$$\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u_0^{1+\theta}dx = 0.$$

Из (3.10) и (3.12) следует

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u^{1+\theta}(x,\tau)\zeta_n^{m+1}dx + \int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u^{\alpha+\theta-1}|Du|^{m+1}\zeta_n^{m+1}dxd\tau \le$$

$$\le 2\gamma\left(\frac{2^n\theta^{-1}}{\sigma\rho}\right)^{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho_n}\setminus B_{\overline{\rho}_n}} u^{m+\alpha+\theta}\zeta_{n-1}^{s(m+1)}dxd\tau \le$$

$$\le 2\gamma\left(\frac{2^n\theta^{-1}}{\sigma\rho}\right)^{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{\rho_{n-1}}\setminus B_{\overline{\rho}_{n-1}}} u^{m+\alpha+\theta}\zeta_{n-1}^{s(m+1)}dxd\tau, \qquad (3.13)$$

где $s > m+1$.

Положим $v_n = u^{\frac{m+\alpha+\theta}{m+1}}\zeta_n^s$, где $s > m+1$ и $n \ge 1$. С учетом такого обозначения из (3.13) следует

$$Y_n \equiv \sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R^N} v_n^\varepsilon dx + \int\limits_0^t\int\limits_{R^N} |Dv_n|^{m+1}dxd\tau \le$$

$$\le \gamma\frac{2^{n(m+1)}}{(\sigma\rho)^{m+1}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^N} v_{n-1}^{m+1}dxd\tau, \qquad (3.14)$$

где $\varepsilon = (m+1)(1+\theta)/(m+\alpha+\theta)$.

Воспользуемся теперь мультипликативной теоремой вложения:

$$\int\limits_{R^N} v_{n-1}^{m+1} dx \leq$$

$$\leq \gamma \left(\int\limits_{R^N} v_{n-1}^{\varepsilon} dx \right)^{\frac{(m+1)^2}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}} \left(\int\limits_{R^N} |Dv_{n-1}|^{m+1} dx \right)^{\frac{N(m+1-\varepsilon)}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}}. \quad (3.15)$$

Заметим, что при $\varepsilon \geq 1$ (3.15) — это обычное неравенство Ниренберга – Гальярдо. Если же $0 < \varepsilon < 1$, то оценку (3.15) можно получить, если сначала применить теорему вложения с некоторым показателем ε^*, $1 < \varepsilon^* < m + 1$, а затем воспользоваться неравенством Гельдера следующим образом:

$$\int\limits_{R^N} v_{n-1}^{\varepsilon^*} dx \leq \left(\int\limits_{R^N} v_{n-1}^{\varepsilon} dx \right)^{\frac{m+1-\varepsilon^*}{m+1-\varepsilon}} \left(\int\limits_{R^N} v_{n-1}^{m+1} dx \right)^{\frac{\varepsilon^*-\varepsilon}{m+1-\varepsilon}}.$$

Интегрируя (3.15) по $\tau \in (0, t)$ и применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\iint\limits_{Q_t} v_{n-1}^{m+1} dx d\tau \leq \gamma \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} v_{n-1}^{\varepsilon} dx \right)^{\frac{(m+1)^2}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}} \times$$

$$\times \left(\iint\limits_{Q_t} |Dv_{n-1}|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{N(m+1-\varepsilon)}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}} t^{\frac{\varepsilon(m+1)}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}}. \quad (3.16)$$

Из (3.14) и (3.16) следует

$$Y_n \leq \gamma \frac{2^{n(m+1)}}{(\sigma\rho)^{m+1}} t^{\frac{\varepsilon(m+1)}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}} Y_{n-1}^{\frac{(m+1)^2+N(m+1-\varepsilon)}{N(m+1-\varepsilon)+\varepsilon(m+1)}}. \quad (3.17)$$

Подставляя значение ε, из последнего неравенства получаем

$$Y_n \leq \gamma \frac{2^{n(m+1)}}{(\sigma\rho)^{m+1}} t^{\frac{(1+\theta)(m+1)}{K_{1+\theta}}} Y_{n-1}^{1+\frac{(m+1)(m+\alpha-1)}{K_{1+\theta}}}.$$

Согласно итерационной лемме [12] (глава II, лемма 5.6), $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если выполнено условие

$$Y_1 \leq \gamma \left(\rho^{-(m+1)} t^{\frac{(1+\theta)(m+1)}{K_{1+\theta}}} \right)^{-\frac{K_{1+\theta}}{(m+1)(m+\alpha-1)}},$$

т. е. если

$$\rho \geq \gamma Y_1^{\frac{m+\alpha-1}{K_{1+\theta}}} t^{\frac{1+\theta}{K_{1+\theta}}}. \quad (3.18)$$

Положим

$$I_0 \equiv \rho^{-(m+1)} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2\rho}} u^{m+\alpha+\theta} dx d\tau.$$

Очевидно, что $Y_1 \leq \gamma I_0$. Для оценки I_0 используем условие (3.1):

$$I_0 \leq \gamma \rho^{-(m+1)} t^{\frac{m+1-N\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{(m+\alpha+\theta-1)(m+1)}{K}},$$

следовательно, ρ будет удовлетворять условию (3.18), если положим

$$\rho \geq \gamma \left(\rho^{-(m+1)} t^{\frac{m+1-N\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{(m+\alpha+\theta-1)(m+1)}{K}} \right)^{\frac{m+\alpha-1}{K_{1+\theta}}} t^{\frac{1+\theta}{K_{1+\theta}}},$$

откуда

$$\rho \geq \gamma \left(t \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{m+\alpha-1} \right)^{\frac{1}{K}}. \tag{3.19}$$

Для того чтобы удовлетворить условию $\rho > 4\rho_0$, выберем

$$\rho \geq \overline{\rho} = 4\rho_0 + \gamma \left(t \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{m+\alpha-1} \right)^{\frac{1}{K}}.$$

В этом случае $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, а это означает, что носитель функции $u(x,t)$ содержится в шаре радиуса $\overline{\rho}/2$.

Лемма 3.2 доказана.

Пусть $0 \leq \theta < 1$, $\rho > 0$ — некоторые фиксированные числа. Введем величину („момент")

$$M_{\theta,\rho}(t) = \int\limits_{|x|>\rho} |x|^\theta\, u(x,t)dx.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $0 < t_1 < T$ *и при любом* $t \in (t_1;T)$ *и некотором* $0 < \theta < (m+1)/K$ *выполнено условие леммы* 3.1 *при* $\varkappa < \theta/K$.

Тогда имеет место неравенство

$$M_{\theta,2\rho}(t) \leq 2M_{\theta,\rho}(t_1) \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\varkappa} + \gamma t^{\theta/K} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{\theta(m+\alpha-1)}{K}}, \tag{3.20}$$

если только ρ *удовлетворяет следующему условию:*

$$\rho \geq \rho(t) = \gamma \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(\cdot,\tau)dx \right)^{(m+\alpha-1)/K} t^{1/K} \quad \forall t \in (t_1,T). \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть $\zeta = \zeta(x)$ — функция с теми же свойствами, что и в лемме 3.1. Умножая уравнение (1.1) на $\zeta^{m+1}|x|^\theta$ и интегрируя по R^N, получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{R^N} u(x,t)|x|^\theta \zeta^{m+1}(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{\rho^{1-\theta}} \int\limits_{R^N} u^\alpha |Du|^m dx d\tau + \frac{\varkappa}{t} \int\limits_{R^N} u(x,t)|x|^\theta \zeta^{m+1}(x)dx.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $(t_1;t)$:

$$\widetilde{M}_{\theta,\rho}(t) \leq \widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\gamma}{\rho^{1-\theta}} \int\limits_{|x|>\rho} u^\alpha |Du|^m dx d\tau + \varkappa \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\widetilde{M}_{\theta,\rho}(\tau)}{\tau} d\tau, \tag{3.22}$$

где

$$\widetilde{M}_{\theta,\rho}(t) = \int_{|x|>\rho} |x|^\theta \zeta^{m+1}(x) u(x,t)dx.$$

Из леммы 3.1 при $\lambda = 1$ и условия (3.21) следует

$$\int\limits_{t_1}^{t} \int\limits_{|x|>2\rho} u^{\alpha} |Du|^m \, dx d\tau \leq \gamma \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau) dx \right)^{1+\frac{m+\alpha-1}{K}} t^{\frac{1}{K}}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{t_1}^{t} \frac{\gamma}{\rho^{1-\theta}} \int\limits_{|x|>\rho} u^{\alpha} |Du|^m \, dx d\tau \leq \frac{\gamma t^{\frac{1}{K}}}{\rho^{1-\theta}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau) dx \right)^{1+\frac{m+\alpha-1}{K}}.$$

Обозначим величину в правой части последнего неравенства через $B(t)$. Также введем величину

$$Z(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\widetilde{M}_{\theta,\rho}(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Непосредственно из определения $Z(t)$ следует $Z_t(t) = \widetilde{M}_{\theta,\rho}(t)/t$. С учетом этих обозначений из (3.22) имеем

$$tZ_t(t) \leq \widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1) + B(t) + \varkappa Z(t). \tag{3.23}$$

Заметим, что $tZ_t(t) - \varkappa Z(t) = t^{\varkappa+1}(t^{-\varkappa} Z(t))_t$. Значит, разделив (3.23) на $t^{\varkappa+1} > 0$, получим

$$(t^{-\varkappa} Z(t))_t \leq t^{-(\varkappa+1)} \widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1) + t^{-(\varkappa+1)} B(t). \tag{3.24}$$

Проинтегрируем теперь (3.24) по $(t_1; t)$:

$$t^{-\varkappa} Z(t) \leq t_1^{-\varkappa} Z(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \tau^{-(\varkappa+1)} \widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1) d\tau + \int\limits_{t_1}^{t} \tau^{-(\varkappa+1)} B(\tau) d\tau.$$

По определению, $Z(t_1) = 0$, и, следовательно,

$$t^{-\varkappa} Z(t) \leq \widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1) \frac{t_1^{-\varkappa} - t^{-\varkappa}}{\varkappa} + \int\limits_{t_1}^{t} \tau^{-(\varkappa+1)} B(\tau) d\tau. \tag{3.25}$$

Поскольку по условию $\rho \geq \gamma \left(\sup\limits_{0<\tau<t} \int_{R^N} u(x,\tau) dx \right)^{(m+\alpha-1)/K} t^{1/K}$, то

$$B(\tau) \leq \gamma \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau) dx \right)^{1+\theta(m+\alpha-1)/K} \tau^{\theta/K},$$

и последний интеграл в (3.25) можно оценить следующим образом:

$$\int\limits_{t_1}^{t} \tau^{-(\varkappa+1)} \tau^{\frac{\theta}{K}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau) dx \right)^{1+\theta(m+\alpha-1)/K} d\tau \leq$$

$$\leq \gamma \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(\cdot,\tau)dx \right)^{1+\theta(m+\alpha-1)/K} \left(t^{-\varkappa+\frac{\theta}{K}} - t_1^{-\varkappa+\frac{\theta}{K}} \right) \leq$$

$$\leq \gamma \left(\sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \right)^{1+\frac{\theta(m+\alpha-1)}{K}} t^{-\varkappa+\frac{\theta}{K}}.$$

Далее, так как $\varkappa < \theta/K$, из последнего неравенства и (3.25) имеем

$$Z(t) \leq \frac{1}{\varkappa}\widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1)(t/t_1)^{\varkappa} + \gamma t^{\frac{\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\theta(m+\alpha-1)/K}. \tag{3.26}$$

Теперь из (3.22) и (3.26) следует

$$\widetilde{M}_{\theta,\rho}(t) \leq 2\widetilde{M}_{\theta,\rho}(t_1)(t/t_1)^{\varkappa} + \gamma t^{\frac{\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{\theta(m+\alpha-1)}{K}},$$

отсюда в свою очередь следует неравенство (3.20).

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2. Следуя той же схеме, что и в п. 2, будем рассматривать решения u_n аппроксимационной задачи (2.4)–(2.6) с u_{0n}, удовлетворяющими тем же условиям. Мы вновь получим оценки, не зависящие от n, что позволит нам применить предельный переход. Как и ранее, опустим для удобства индекс n.

Пусть $T_1 = \sup\{t > 0 :$ выполнено условие (3.1)$\}$. Умножая обе части (2.4) на u^{q-1} и интегрируя по $Q_t = R^N \times (0;t)$, $t \in (0;T_1)$, получаем

$$\frac{1}{q}\int\limits_{R^N} u^q(x,t)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{q}\int\limits_{R^N} u_0^q dx + \int\limits_0^t \left(\left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^{\mu} u^q(y,\tau)dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \int\limits_{R^N} u^{r+q-1}dx \right) d\tau. \tag{4.1}$$

Поскольку $p-1<0$ и $\mu \geq 0$, очевидно, что

$$\left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^{\mu} u^q(y,\tau)dy \right)^{\frac{p-1}{q}} \leq \left(\int\limits_{R^N} u^q(y,\tau)dy \right)^{\frac{p-1}{q}}.$$

Используя в последнем интеграле оценку (2.2) при $\lambda = q$, находим

$$\frac{1}{q}\int\limits_{R^N} u^q(x,t)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{q}\int\limits_{R^N} u_0^q dx + \gamma \sup_{0<\tau<t} \left(\int\limits_{R^N} u^q(y,\tau)dy \right)^{1+\frac{p-1}{q}+\frac{(r-1)(m+1)}{Kq}} t^{1-\frac{N(r-1)}{Kq}}; \tag{4.2}$$

такая оценка имеет место в силу условий на q.

Положим еще

$$T_q = \sup\left\{ t>0 : \gamma \sup_{0<\tau<t} \left(\int\limits_{R^N} u^q(y,\tau)dy \right)^{\frac{p-1}{q}+\frac{(r-1)(m+1)}{Kq}} t^{1-\frac{N(r-1)}{Kq}} \leq \varepsilon \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ — настолько малая постоянная, что из (4.2) будет следовать неравенство

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u^q(x,\tau)dx \leq \gamma \int\limits_{R^N} u_0^q dx \tag{4.3}$$

для $t \in (0, \min(T_1, T_q))$. Число T_0 найдем из условия

$$\gamma T_0^{1-\frac{N(r-1)}{K_q}} \|u_0\|_{q,R^N}^{p-1+\frac{q(r-1)(m+1)}{K_q}} = \varepsilon. \tag{4.4}$$

Если $\|u_0\|_{q,R^N}$ достаточно мала, то можно считать, что $T_0 > 1$. Понятно также из (4.3) и (4.4), что $T_q \geq T_0$. Если же $t \in (0; \min(T_0, T_1))$, то

$$t\left(\int\limits_{R^N}(1+|y|)^\mu u^q dy\right)^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \leq \gamma t^{1-\frac{N(r-1)}{K_q}} \|u_0\|_{q,R^N}^{p-1+\frac{q(r-1)(m+1)}{K_q}} < \frac{\varkappa}{2},$$

откуда следует, что $T_1 > T_0 > 1$.

Аналогично получаем

$$\int\limits_0^t I^{\frac{p-1}{q}}(\tau)\|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} d\tau \leq \varepsilon, \;\; t \in (0, T_0),$$

и если $\varepsilon < 1/2$, то последняя оценка эквивалентна (3.10).

Пусть теперь $t \in (0, T_0)$. Интегрируя (2.4) по Q_t, получаем

$$\int\limits_{R^N} u(x,t)dx \leq \int\limits_{R^N} u_0 dx + \int\limits_0^t \left(\int\limits_{R^N} u^q dx\right)^{(p-1)/q} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)dxd\tau.$$

Из последнего неравенства при $t \in (0, T_0)$ имеем

$$\int\limits_{R^N} u(x,t)dx \leq \int\limits_{R^N} u_0 dx + \gamma\varepsilon \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(\cdot,\tau)dx,$$

и если ε достаточно мало, то находим

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)dx \leq \gamma_1 \int\limits_{R^N} u_0 dx, \quad t \in (0, T_0), \tag{4.5}$$

где γ_1 — постоянная, зависящая лишь от параметров задачи.

Проинтегрируем теперь (2.4) по множеству $R^N \times (1,t)$, $t \in (1, T_1)$:

$$\int\limits_{R^N} u(x,t)dx \leq \gamma_1 \int\limits_{R^N} u_0 dx + \int\limits_1^t \left(\int\limits_{R^N}(1+|y|)^\mu u^q dy\right)^{(p-1)/q} \int\limits_{R^N} u^r dxd\tau; \tag{4.6}$$

здесь мы воспользовались оценкой (4.5) при $t = 1$.

Для оценки второго слагаемого рассмотрим очевидное неравенство

$$\int\limits_{R^N} u_0 dx \leq \int\limits_{R^N} u(x,t)dx. \tag{4.7}$$

Разобьем интеграл в правой части (4.7) на два слагаемых

$$\int\limits_{R^N} u(x,t)dx = \int\limits_{|x|<\rho} u(x,t)dx + \int\limits_{|x|>\rho} u(x,t)dx = A_1 + A_2,$$

где ρ определим позже.

Оценим отдельно A_1 и A_2. Для первого слагаемого, воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$A_1 \le \left(\int\limits_{|x|<\rho} |x|^{-\frac{\mu}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int\limits_{|x|<\rho} (1+|x|)^{\mu} u^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \gamma \rho^{\frac{-\mu+N(q-1)}{q}} (I(t))^{\frac{1}{q}}. \tag{4.8}$$

Для оценки A_2 воспользуемся леммой 3.3 при $t_1 = 1$:

$$A_2 \le \rho^{-\theta} \int\limits_{|x|>\rho} |x|^{\theta} u(x,t) dx \le$$

$$\le \rho^{-\theta} \left(2M_{\theta,\rho/2}(1) t^{\varkappa} + \gamma t^{\frac{\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{\theta(m+\alpha-1)}{K}} \right).$$

Выберем ρ из условия

$$\rho > 4\rho_0 + \gamma \|u_0\|_{1,R^N}^{\frac{m+\alpha-1}{K}}.$$

При таком выборе ρ из леммы 3.2 и оценки (4.5) следует, что $M_{\theta,\rho/2}(1) = 0$. С учетом этого из последнего неравенства получаем

$$A_2 \le \gamma \rho^{-\theta} t^{\frac{\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{\theta(m+\alpha-1)}{K}}. \tag{4.9}$$

Теперь из (4.7) – (4.9) следует оценка

$$(I(t))^{\frac{1}{q}} \ge \gamma \rho^{-\frac{-\mu+N(q-1)}{q}} \times$$

$$\times \left(\|u_0\|_{1,R^N} - \gamma \rho^{-\theta} t^{\frac{\theta}{K}} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{1+\frac{\theta(m+\alpha-1)}{K}} \right), \quad t \in (1, T_1). \tag{4.10}$$

Если еще ρ выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\rho \ge \gamma 2^{1/\theta} t^{1/K} \left(\frac{\sup\limits_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}}{\|u_0\|_{1,R^N}} \right)^{1/\theta} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{(m+\alpha-1)/K}, \quad t \in (1, T_1), \tag{4.11}$$

то из (4.10) получим оценку

$$(I(t))^{(p-1)/q} \le \gamma \rho^{-d(p-1)} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1}, \quad t \in (1, T_1), \tag{4.12}$$

где $d = (-\mu + N(q-1))/q$.

Положим теперь

$$\rho(t) = \gamma \left(\rho_0 + \|u_0\|_{1,R^N}^{\frac{m+\alpha-1}{K}} + t^{\frac{1}{K}} \left(\frac{\sup\limits_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}}{\|u_0\|_{1,R^N}} \right)^{1/\theta} \sup_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N}^{\frac{m+\alpha-1}{K}} \right). \tag{4.13}$$

Пусть $t_1 = \sup\left\{t > 1 : \sup\limits_{0<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \leq 4\gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N}\right\}$. Из (4.6), (4.12) с учетом (4.13) при $t \in (1, \min\{t_1, T_1\})$ получаем

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} \leq \gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N} +$$
$$+ \gamma \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1} \int\limits_1^t \left(\rho_0 + \|u_0\|_{1,R^N}^{\frac{m+\alpha-1}{K}} + (4\gamma_1)^{\frac{1}{\theta}+\frac{m+\alpha-1}{K}} \|u_0\|_{1,R^N}^{\frac{m+\alpha-1}{K}} \tau^{\frac{1}{K}}\right)^{d(1-p)} \times$$
$$\times \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)\,dx\,d\tau. \tag{4.14}$$

Обозначим $R_0 = \max\left\{\rho_0, \|u_0\|_{1,R^N}^{(m+\alpha-1)/K}\right\}$.

Из оценок (4.14), (2.2) при $\lambda = 1$, замечая еще, что $\tau^{-N(r-1)/K} < \tau^{(d(1-p)-N(r-1))/K}$, $\tau > 1$, имеем

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} \leq \gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N} +$$
$$+\gamma \sup_{1<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1+\frac{(r-1)(m+1)}{K}} R_0^{d(1-p)} \int\limits_1^t \tau^{\frac{d(1-p)-N(r-1)}{K}} d\tau.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{1<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \leq$$
$$\leq \gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N} + \gamma \sup_{1<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1+\frac{(r-1)(m+1)}{K}} R_0^{d(1-p)} D_1,$$

где $D_1 = \displaystyle\int_1^\infty \tau^{\frac{d(1-p)-N(r-1)}{K}} d\tau$. Поскольку $r > r^*$, то $D_1 < \infty$ и, значит, при достаточно малом δ приходим к оценке

$$\sup_{1<\tau<t} \|u(\cdot,\tau)\|_{1,R^N} \leq 2\gamma_1 \|u_0\|_{1,R^N}, \quad t \in (1, \min\{t_1, T_1\}). \tag{4.15}$$

Отсюда делаем вывод, что $t_1 > T_1$. Осталось показать, что $T_1 = \infty$. Воспользовавшись оценкой (4.12), где ρ определяется из (4.13), и оценками (2.2) при $\lambda = 1$ и (4.15), для всех $t \in (1, T_1)$ получаем

$$t\,(I(t))^{(p-1)/q} \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}^{r-1} \leq \gamma t^{1+\frac{d(1-p)-N(r-1)}{K}} R_0^{d(1-p)} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1+\frac{(r-1)(m+1)}{K}} \leq$$
$$\leq \gamma (t-1) t^{\frac{d(1-p)-N(r-1)}{K}} R_0^{d(1-p)} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1+\frac{(r-1)(m+1)}{K}} +$$
$$+\gamma t^{\frac{d(1-p)-N(r-1)}{K}} R_0^{d(1-p)} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1+\frac{(r-1)(m+1)}{K}} \leq$$
$$\leq \gamma R_0^{d(1-p)} \|u_0\|_{1,R^N}^{p-1+\frac{(r-1)(m+1)}{K}} (D_1 + 1) \leq \frac{\varkappa}{2}$$

при достаточно малом δ. Следовательно, $T_1 = \infty$. Утверждение теоремы следует из неравенства (2.2) при $\lambda = 1$ и оценки (4.15).

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 1.3. Пусть $0 < \theta < 1$ — некоторое как угодно малое число, которое определим позже. Введем стандартную срезающую функцию $\zeta(|x|)$ шара B_ρ : $\zeta(|x|) = 1$ при $|x| \leq \rho$, $0 < \zeta(|x|) < 1$ при $\rho < |x| < 2\rho$ и

$\zeta(|x|) = 0$ вне шара $B_{2\rho}$; кроме того, $|D_x\zeta(|x|)| \leq \gamma/\rho$. Умножим уравнение (1.1) на $u^{-\theta}(x,t)\zeta^s(|x|)$ и проинтегрируем полученное уравнение по R^N (здесь $s > 0$ — некоторое число, которое определим позже):

$$\frac{1}{1-\theta}\frac{d}{dt}\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx \geq \theta \int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta-1}(x,t)|Du|^{m+1}\zeta^s dx -$$

$$-s\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta}(x,t)|Du|^m\zeta^{s-1}|D\zeta|dx +$$

$$+\left(\int\limits_{R^N}(1+|y|)^\mu u^q(y,t)dy\right)^{(p-1)/q}\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx.$$

Ко второму интегралу в правой части последнего неравенства применим неравенство Юнга с некоторым $\varepsilon > 0$:

$$s\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta}(x,t)|Du|^m\zeta^{s-1}|D\zeta|dx \leq$$

$$\leq \varepsilon^{(m+1)/m}m/(m+1)\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta-1}|Du|^{m+1}\zeta^s dx +$$

$$+\,\varepsilon^{-(m+1)}s^{m+1}(m+1)^{-1}\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta+m}|D\zeta|^{m+1}\zeta^{s-m-1}dx.$$

Подбирая ε так, чтобы $\varepsilon^{(m+1)/m}m/(m+1) = \theta/2$, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx \geq \frac{(1-\theta)\theta}{2}\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta-1}(x,t)|Du|^{m+1}\zeta^s dx -$$

$$-\,\gamma\rho^{-(m+1)}\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta+m}\zeta^{s-m-1}dx +$$

$$+\left(\int\limits_{R^N}(1+|y|)^\mu u^q(y,t)dy\right)^{\frac{p-1}{q}}\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx.$$

В этом неравенстве мы воспользовались свойствами функции $\zeta(|x|)$. Продолжая оценку далее, находим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx \geq$$

$$\geq -\gamma\rho^{-(m+1)}\int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta+m}\zeta^{s-m-1}dx + +(I(t))^{(p-1)/q}\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx, \qquad (5.1)$$

где, как и ранее, $I(t) = \int_{R^N}(1+|y|)^\mu u^q(y,t)dy$.

Проведем оценку этого интеграла. Из неравенства Гельдера следует

$$\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx \leq \gamma \left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^{\mu} u^q(y,t) dy \right)^{\frac{1-\theta}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{R^N} (1+|y|)^{-\frac{\mu(1-\theta)}{q-1+\theta}} \zeta^{\frac{sq}{q-1+\theta}} dy \right)^{\frac{q-1+\theta}{q}} \leq \gamma (I(t))^{\frac{1-\theta}{q}} \rho^{\frac{N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta)}{q}},$$

откуда

$$(I(t))^{(p-1)/q} \geq \gamma \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{(1-\theta)q}} \left(\int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx \right)^{(p-1)/(1-\theta)}. \tag{5.2}$$

Обозначим

$$E(t) = \int\limits_{R^N} u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx.$$

Тогда из (5.1) и (5.2) имеем

$$\frac{dE}{dt} \geq -\gamma \rho^{-(m+1)} \int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta+m} \zeta^{s-m-1} dx +$$

$$+ \gamma (E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}} \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{(1-\theta)q}} \int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx. \tag{5.3}$$

В первом слагаемом правой части применим неравенство Гельдера:

$$\rho^{-(m+1)} \int\limits_{|x|<2\rho} u^{\alpha-\theta+m} \zeta^{s-m-1} dx \leq$$

$$\leq \gamma \rho^{-(m+1)+N\left(1-\frac{m+\alpha-\theta}{r-\theta}\right)} \left(\int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t) \zeta^{\frac{(s-m-1)(r-\theta)}{m+\alpha-\theta}} dx \right)^{(m+\alpha-\theta)/(r-\theta)}.$$

Выберем s из условия

$$s = \frac{(s-m-1)(r-\theta)}{m+\alpha-\theta},$$

т. е. $s = (m+1)(r-\theta)/(r-m-\alpha) > m+1$.

Теперь в последнем неравенстве применим неравенство Юнга с $\varepsilon > 0$, которое определим позже:

$$\rho^{-(m+1)} \int\limits_{R^N} u^{\alpha-\theta+m} \zeta^{s-m-1} dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon^{(r-\theta)/(m+\alpha-\theta)}(m+\alpha-\theta)}{r-\theta} \int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx +$$

$$+ \gamma \frac{\varepsilon^{-(r-\theta)/(r-m-\alpha)}(r-m-\alpha)}{r-\theta} \rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}}. \tag{5.4}$$

Из условия

$$\gamma\frac{\varepsilon^{(r-\theta)/(m+\alpha-\theta)}(m+\alpha-\theta)}{r-\theta}=\frac{1}{2}\gamma(E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}}\rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}}$$

находим ε:

$$\varepsilon=\gamma\rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-\theta)}}(E(t))^{\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-\theta)}}.$$

При этом из (5.3), (5.4) следует

$$\frac{dE}{dt}\geq-\gamma\rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}+\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-m-\alpha)}}(E(t))^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}+$$
$$+\gamma\rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}}(E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}}\int\limits_{R^N}u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx. \tag{5.5}$$

Допустим, что

$$\gamma\rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}}(E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}}\int\limits_{R^N}u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx\leq$$
$$\leq\gamma\rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}+\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-m-\alpha)}}(E(t))^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}},$$

т. е.

$$\int\limits_{R^N}u^{r-\theta}(\cdot,t)\zeta^s dx\leq\gamma\rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}+\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(r-\theta)}{q(1-\theta)(r-m-\alpha)}}(E(t))^{-\frac{(p-1)(r-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}. \tag{5.6}$$

Из неравенства Гельдера следует

$$\int\limits_{R^N}u^{1-\theta}(x,t)\zeta^s dx\leq\gamma\rho^{\frac{N(r-1)}{r-\theta}}\left(\int\limits_{R^N}u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx\right)^{\frac{1-\theta}{r-\theta}}. \tag{5.7}$$

Продолжая это неравенство, получаем

$$E(t)\leq\gamma\rho^{N+\frac{-(m+1)(1-\theta)+(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))/q}{r-m-\alpha}}(E(t))^{-\frac{p-1}{r-m-\alpha}},$$

откуда

$$(E(t))^{1+\frac{p-1}{r-m-\alpha}}\leq\gamma\rho^{\frac{N(r-m-\alpha)-(m+1)+(p-1)(N(q-1)-\mu)/q}{r-m-\alpha}+\theta\frac{(p-1)(N+\mu)+q(m+1)}{q(r-m-\alpha)}}. \tag{5.8}$$

Поскольку $r<r^*$, то, подбирая θ достаточно малым, можно сделать показатель степени при ρ отрицательным. Поскольку еще $1+(p-1)/(r-m-\alpha)>0$, из (5.8), устремляя ρ к бесконечности, получаем

$$0\leq\int\limits_{R^N}u^{1-\theta}(x,t)dx\leq 0.$$

Это означает, что

$$\int\limits_{R^N}u^{1-\theta}(x,t)dx=0.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, предположение (5.6) неверно, и, значит, из (5.5) находим

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma\rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}} (E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}} \int\limits_{R^N} u^{r-\theta}(x,t)\zeta^s dx. \tag{5.9}$$

Из (5.7) и (5.9) получаем

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma\rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))+N(r-1)q}{q(1-\theta)}} (E(t))^{\frac{p+r-1-\theta}{1-\theta}}. \tag{5.10}$$

Интегрируя (5.10), имеем

$$-\frac{1-\theta}{p+r-2}(E(t))^{-\frac{p+r-2}{1-\theta}} \geq \gamma t\rho^{-l} - \frac{1-\theta}{p+r-2}(E(0))^{-\frac{p+r-2}{1-\theta}},$$

где $l = ((p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))+N(r-1)q)/(q(1-\theta))$.

Отсюда

$$E(t) \geq E(0)(1-\gamma t\rho^{-l}\left(E(0)\right)^{\frac{p+r-2}{1-\theta}}\Big)^{-\frac{1-\theta}{p+r-2}}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение теоремы при $T = \gamma\rho^l(E(0))^{-\frac{p+r-2}{1-\theta}}$.

1. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA. Math. – 1966. – **13**. – P. 109 – 124.
2. *Levine H. A.* The role of critical exponents in blow up theorems // Review. – 1990. – **32**. – P. 262 – 288.
3. *Deng K., Levine H. A.* The role of critical exponents in blow-up theorems. The sequal // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – **243**. – P. 85 – 126.
4. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1998. – **128**. – P. 1163 – 1180.
5. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543 – 567.
6. *Galaktionov V. A., Levine H. A.* A general approach to critical Fujita exponents and systems // Nonlinear Anal. TMA. – 1998. – **34**. – P. 1005 – 1027.
7. *Liu X., Wang M.* The critical exponent of doubly singular parabolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – **257**. – P. 170 – 188.
8. *Cirmi G. R., Leonardi S., Tedeev A. F.* The asymptotic behavior of the solution of a quasilinear parabolic equation with blow-up term. – Catania, 1998. – 18 p. – (Preprint / Univ. Catania).
9. *Deng K., Kwong M. K., Levine H. A.* The influence of nonlocal nonlinearities on the long-time behavior of solutions of Burgers' equation // Quart. Appl. Math. – 1992. – **50**. – P. 173 – 200.
10. *Andreucci D., Di Benedetto E.* On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources // Ann. Scuola norm. super Pisa. – 1991. – **18**. – P. 363 – 441.
11. *Tsutsumi M.* On solution of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – **132**. – P. 187 – 212.
12. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 13.04.2004,
после доработки — 08.06.2005