УДК 517.51

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРАТНЫЙ БАЗИС ХААРА И ЕГО СВОЙСТВА

In Lebesque spaces $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, for $d \ge 2$, we define a multiple basis system of functions $\mathrm{H}^d = (h_n)_{n=1}^{\infty}$. This system has basic properties of the well-known one-dimensional Haar basis H. In particular, it is shown that system H^d is a Schauder basis in the spaces $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$.

У просторах Лебега $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, при $d \ge 2$ означено кратну базисну систему функцій $\mathrm{H}^d = (h_n)_{n=1}^{\infty}$, що наділена основними властивостями відомого одновимірного базису Хаара H. Зокрема, доведено, що система H^d є базисом Шаудера у просторах $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$.

Введение. В 1909 г. А. Хааром [1] была построена ортонормированная на отрезке $[0,1]$ полная в пространстве $L\big([0,1]\big)$ система функций $\big(h_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, ряды Фурье по которой для непрерывных функций сходятся к ним равномерно на $[0,1]$. Такая система имеет достаточно простую структуру и состоит из кусочно-постоянных функций на интервалах двоичного разбиения отрезка $[0,1]$. Напомним определение этой системы в тех обозначениях, которые удобны для последующего изложения.

Обозначим через D_j, $j = 1,2,\ldots$, множество двоичных интервалов j-го уровня отрезка $\mathbb{I} := [0,1]$:

$$D_j = \big\{I_j^s \colon s = 0,1,\ldots,2^{j-1}-1\big\},$$

где $I_j^s = \big(s2^{-j+1}, (s+1)2^{-j+1}\big)$. Положим также $I_0^0 := \mathbb{I}$ и $D_0 = \{I_0^0\}$.

Определим функции Хаара, положив

$$\mathrm{H}_{I_0^0}(t) = 1, \quad t \in \mathbb{I},$$

и для $j = 1,2,\ldots$, $s = 0,1,\ldots,2^{j-1}-1$

$$\mathrm{H}_{I_j^s}(t) = \begin{cases} |I_j^s|^{-1/2}, & t \in \left(s2^{-j+1}, \left(s+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j+1}\right), \\ -|I_j^s|^{-1/2}, & t \in \left(\left(s+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j+1}, (s+1)2^{-j+1}\right), \\ 0, & t \in \mathbb{I} \setminus \overline{I_j^s}, \end{cases}$$

где $|I_j^s| = 2^{-j+1}$ — длина интервала I_j^s, а $\overline{I_j^s}$ — его замыкание.

Во всех внутренних (по отношению к отрезку $\mathbb{I}$) точках разрыва функции $\mathrm{H}_{I_j^s}(t)$ полагаются равными полусумме их пределов слева и справа, а в концевых точках отрезка $[0,1]$ — их предельным значениям изнутри отрезка.

Система $\mathbb{H} = \{\mathrm{H}_{I_0^0}\} \bigcup \{\mathrm{H}_{I_j^s}\}_{\substack{j=1,2,\ldots \\ s=0,1,\ldots,2^{j-1}-1}}$ называется базисной системой Хаара.

Упорядочим систему $\mathbb{H}$ следующим образом. Положим

$$h_0(t) = 1, \quad t \in I_0^0,$$

и для $0 \le s < 2^{j-1}$, $j = 1,2,\ldots$,

$$h_{2^{j-1}+s}(t) = h_j^s(t) = \mathrm{H}_{I_j^s}(t).$$

Полученную последовательность h_n, $n = 0, 1, \ldots$, обозначим через H.

В 1928 г. И. Шаудер [2] показал, что система $\mathrm{H} = (h_n)_{n=0}^{\infty}$ является базисом в пространствах Лебега $L_q([0,1])$, $1 \leq q < \infty$. Хотя очевидно, что система H не может быть базисом в пространстве $C\bigl([0,1]\bigr)$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, Г. Фабер в 1910 г. показал, что каждая непрерывная на $[0,1]$ функция однозначно представляется в виде равномерно сходящегося к ней ряда по системе функций $\left\{1, \int_0^x h_n(t)dt\right\}_{n=0}^{\infty}$, т. е. такая система функций уже является базисом в пространстве $C\bigl([0,1]\bigr)$.

Системному изучению рядов по системе Хаара H посвящена работа [3], в которой, в частности, исследованы вопросы сходимости рядов Фурье по системе H функций некоторых классов, а также даны оценки коэффициентов Фурье по системе H для элементов из пространств измеримых на $[0,1]$ функций.

В 1972 г. была опубликована статья Б. И. Голубова [4], в которой изложены фундаментальные результаты, характеризующие аппроксимативные свойства системы H по отношению к функциям из пространств $L_q\bigl([0,1]\bigr)$, $1 \leq q < \infty$, и $C\bigl([0,1]\bigr)$. Основное содержание этих результатов составляют прямые и обратные теоремы.

В настоящей работе на базе системы $\mathbb{H}$ определяется одна из кратных систем Хаара H_0^d функций, определенных на кубе $[0,1]^d$ евклидового пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. По структуре эта система несколько отлична от классической тензорной системы Хаара $\mathcal{H}^d$ (определение см. в п. 1), но, как установлено, имеет важные свойства, присущие одномерной базисной системе Хаара $\mathbb{H}$. В частности, показано, что упорядоченная надлежащим образом система H_0^d является базисом Шаудера в пространствах $L_p\bigl([0,1]\bigr)$, $1 \leq p < \infty$.

В последующем установленные свойства системы H_0^d эффективно используются в решении определенных задач аппроксимации классов функций в пространствах $L_q\bigl([0,1]^d\bigr)$.

По ходу изложения материала используются стандартные обозначения $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ соответственно для множеств натуральных, вещественных, вещественных неотрицательных, целых, целых неотрицательных чисел.

Через $A^d = \prod_{i=1}^d A$, $d \in \mathbb{N}$, обозначается декартово произведение d множеств A, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ или отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, а через $\bigotimes_{i=1}^d \mathfrak{M}(i)$ — тензорное произведение некоторых множеств $\mathfrak{M}(i)$, $i = \overline{1,d}$, в частности функциональных; $\sharp A$ обозначает количество точек конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^d$, а $\mathrm{card} A$ — количество элементов некоторого конечного множества A; $|A|$ или vol A — объем (мера Лебега) множества $A \subset \mathbb{R}^d$; $\mathrm{supp} f(x)$ обозначает носитель функции f, т. е. множество внутренних точек множества A такого, что $f(x) \neq 0$, $x \in A$.

Для выражений a и b, определяемых некоторой совокупностью параметров, запись $a \asymp b$ означает, что существуют положительные величины c_1 и c_2, не зависящие от одного существенного параметра, такие, что $c_1 b \leq a \leq c_2 b$. Если только $a \leq c_2 b$ ($c_1 b \leq a$), то пишем $a \ll b$ ($a \gg b$).

Через $C(p)$, $C_1(d,p)$ и т. п. обозначаются величины, зависящие, возможно, только от указанных в скобках параметров и положительные при всех допустимых значениях этих параметров, а через C, C_1, C_2, — абсолютные положительные постоянные, необязательно одинаковые в разных местах текста.

Введем еще ряд используемых в работе определений и обозначений.

Через $L_q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, обозначим пространство функций $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, измеримых на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\varphi(x)|.$$

В случае $\Omega = \mathbb{I}^d$ будем иногда писать L_q вместо $L_q(\mathbb{I}^d)$ и $\|\cdot\|_q$ вместо $\|\cdot\|_{L_q(\mathbb{I}^d)}$ при $1 \leq q \leq \infty$.

При $1 \leq p \leq \infty$ определим модуль непрерывности функции $\varphi \in L_p$ посредством равенства

$$\omega(\varphi, t)_p := \sup_{\substack{0\leq\tau_i<t\leq 1\\ i=\overline{1,d}}} \|\Delta_\tau \varphi\|_{L_p(\mathbb{I}^d_\tau)},$$

где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{I}^d$, $\mathbb{I}^d_\tau := \prod_{i=1}^d [0, 1 - \tau_i]$ и $\Delta_\tau(\varphi, x) := \varphi(x+\tau) - \varphi(x)$ при x, $x + \tau \in \mathbb{I}^d$.

Наконец, одной и той же буквой в разных шрифтах мы обозначаем различные системы функций Хаара:

$\mathbb{H}$ — система функций Хаара одной переменной;

H — базис Хаара в $L_p(\mathbb{I})$, $1 \leq p < \infty$ (упорядоченная последовательность функций системы $\mathbb{H}$);

$\mathcal{H}^d$ — тензорная система Хаара функций d переменных, $d \in \mathbb{N}$;

H^d_0 — базисная система Хаара с „интервальной” индексацией функций d переменных;

$\mathbb{H}^d_0$ — базисная система Хаара с векторной индексацией функций d переменных;

H^d — базис Хаара в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$, $d \in \mathbb{N}$ (упорядоченная последовательность функций системы $\mathbb{H}^d_0$).

1. Определение функциональных систем H^d_0, $\mathbb{H}^d_0$, H^d и $\mathcal{H}^d$. Определим вначале кратную базисную систему Хаара H^d_0 функций, заданных на единичном кубе $\mathbb{I}^d$, $d \geq 2$. Обозначим через $Q_j := \bigotimes_{i=1}^d D_j$, $j = 1, 2, \ldots$, множество кубов I двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$ объемом $|I| = 2^{(-j+1)d}$, т. е.

$$Q_j = \left\{ I^{\bar{l}}_j = \prod_{i=1}^d I^{l_i}_j : \bar{l} = (l_1, \ldots, l_d),\ 0 \leq l_i < 2^{j-1}, i = \overline{1, d} \right\},$$

а через $Q := \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ множество всех кубов двоичного разбиения $\mathbb{I}^d$. Положим

$$\mathrm{H}^d_0 := \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\} \cup \{\mathrm{H}_I\}_{I\in Q},$$

где функция

$$\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}(x) = 1, \quad x \in \mathbb{I}^d,$$

и для $j \in \mathbb{N}$ и $I \in Q_j$ $\left(\text{т. е. } I = \prod_{i=1}^d I^{s_i}_j\right)$

$$\mathrm{H}_I(x_1,\ldots,x_d)=\prod_{i\in E}\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)\times\prod_{i\in\mathbb{T}\setminus E}|\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)|. \qquad (1)$$

Здесь E — произвольное непустое подмножество множества $\mathbb{T}:=\{1,2,\ldots,d\}$, в том числе допускается $E=\mathbb{T}$, и в этом случае множитель $\prod_{i\in\mathbb{T}\setminus E}$ заменяется единицей.

Заметим, что совокупностью всех подмножеств E с заданным числом $\operatorname{card}E\neq d$ и множеством $E=\mathbb{T}$ с помощью формулы (1) определяется 2^d-1 функций с носителями на фиксированном кубе $I\in Q_j$, а значит на каждом кубе $I_j^{\bar l}=\prod_{i=1}^d I_j^{l_i}$, $l=(l_1,\ldots,l_d)$, $0\le l_j<2^{j-1}$, $i=\overline{1,d}$. Соответствующие множества таких функций обозначим через $\mathrm{H}(j,\bar l)$.

Теперь представим систему H_0^d, $d\ge 2$, другим способом, исходя из одномерного базиса Хаара H и используя при этом векторную нумерацию входящих в эту систему функций. С этой целью разобьем множество $\mathbb{Z}_+^d$ на непересекающиеся подмножества $Z_{0,d}:=Y_{0,d}$ и $Z_{j,d}:=$ $:=Y_{j,d}\setminus Y_{j-1,d}$, $j=1,2,\ldots$, где

$$Y_{0,d}=\{\overline{0}\}=\{(0,0,\ldots,0)\}\in\mathbb{Z}_+^d,$$

$$Y_{j,d}=\left\{\bar k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}_+^d\colon 0\le k_i<2^j, i=\overline{1,d}\right\},\quad j=1,2,\ldots.$$

Понятно, что $\mathbb{Z}_+^d=\bigcup_{j=0}^\infty Z_{j,d}$. Отметим также, что $\sharp Y_{j,d}=2^{jd}$ и $\sharp Z_{j,d}=(2^d-1)2^{(j-1)d}\asymp 2^{jd}$.

Итак, определим систему функций с d переменными

$$\mathbb{H}_0^d=\{h_{\bar k}\}_{\bar k\in\mathbb{Z}_+^d}:=\bigcup_{j=0}^\infty\{h_{\bar k}\}_{\bar k\in Z_{j,d}},$$

положив

$$h_{\overline{0}}=\bigotimes_{i=1}^d h_0$$

и для $\bar k\in Z_{j,d}$, $j=1,2,\ldots$,

$$h_{\bar k}=\bigotimes_{i\in E}h_{k_i}\otimes\bigotimes_{i\in\mathbb{T}\setminus E}|h_{2^{j-1}+k_i}|,$$

где $E=\{i\in\mathbb{T}\colon 2^{j-1}\le k_i<2^j\}$, причем если $E=\mathbb{T}$, то полагаем $h_{\bar k}=\bigotimes_{i\in\mathbb{T}}h_{k_i}$.

Понятно, что $\mathbb{H}_0^d=\mathrm{H}_0^d$, т. е. множества $\{h_{\bar k}\}_{\bar k\in\mathbb{Z}_+^d}$ и H_0^d совпадают. Более того, между индексацией двоичными кубами из Q_j функций множества H_0^d и индексацией векторами из $Z_{j,d}$ функций множества $\mathbb{H}_0^d$ устанавливается взаимно однозначное соответствие так, что $\{h_I\}_{I\in Q_j}=\{h_{\bar k}\}_{\bar k\in Z_{j,d}}$, $j=1,2,\ldots$. Множество индексов $\bar k\in Z_{j,d}$ функций $h_{\bar k}\in\mathrm{H}(j,\bar l)$ обозначим через $Z_{j,d}(\bar l)$.

Упорядочим векторы $\bar k=(k_1,\ldots,k_d)$ множества $\mathbb{Z}_+^d$, расположив их в виде последовательности $\bar k^{(1)},\bar k^{(2)},\ldots,\bar k^{(m)},\ldots$ так, что $\bar k^{(1)}=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}_+^d$ и для $i=2,3,\ldots$

$$\max\left\{\bar k_j^{(i)}\colon j=\overline{1,d}\right\}\le\max\left\{\bar k_j^{(i+1)}\colon j=\overline{1,d}\right\}.$$

Соответствующую такому упорядочиванию последовательность $\left(h_{\bar k^{(i)}}\right)_{i=1}^\infty$ функций системы $\mathbb{H}_0^d$ обозначим через H^d.

Заметим, что в таком случае, если для некоторого номера i выполняется неравенство $\sharp Z_{j-1,d} < i \leq \sharp Z_{j,d}$ с $j \in \mathbb{N}$, то $\bar{k}^{(i)} = \bar{k}$ для некоторого $\bar{k} \in Z_{j,d}$, и если $\bar{k} \in Y_{n,d}$, то при некотором $1 \leq i \leq \sharp Y_{n,d}$ будет $\bar{k} = \bar{k}^{(i)}$ и $\bar{k}^{(i)} \in Y_{n,d}$.

Теперь, занумеровав функции системы H^d согласно соответствию $\bar{k}^{(i)} \to i$, будем писать $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$.

В заключение этого пункта отметим, что упомянутая во введении кратная система функций Хаара $\mathcal{H}^d$ определяется как тензорное произведение базисных систем Хаара функций одной переменной с соответствующей индексацией функций параллелепипедами множества $\mathbb{D}^d$ двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$:

$$\mathcal{H}^d = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathbb{H} = \{\mathrm{H}_I\}_{I \in \mathbb{D}^d}.$$

Таким образом, для заданных $j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_k = 0, \ldots, 2^{j_k - 1} - 1$, $k = \overline{1, d}$, а также $I = \prod_{k=1}^{d} I_{j_k}^{s_k}$, $I_{j_k}^{s_k} \in D_{j_k}$, $k = \overline{1, d}$, полагаем

$$\mathrm{H}_I(x_1, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \mathrm{H}_{I_{j_k}^{s_k}}(x_k).$$

Изучению свойств системы $\mathcal{H}^d$, $d \geq 2$, в большей мере касательно задач нелинейной аппроксимации функций, посвящены недавние работы В. Н. Темлякова и других авторов, а исходящей является работа В. Н. Темлякова [5].

Отметим, что a priori в случае $d = 1$ системы $\mathcal{H}^1$ и $\mathrm{H}_0^1 := \mathbb{H}$ совпадают.

2. Представление частных сумм Фурье – Хаара. В силу определения ортонормированной в $L_2(\mathbb{I}^d)$ системы $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$ любая функция $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$ разлагается в ряд Фурье – Хаара

$$f(x) \sim \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^d} (f, h_{\bar{k}}) h_{\bar{k}}(x),$$

где $(f, h_{\bar{k}}) = \int_{\mathbb{I}^d} f(x) h_{\bar{k}}(x) dx$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, — коэффициенты Фурье – Хаара функции f.

Через P_n обозначим оператор $P_n \colon L_1 \to V_n$ ортогонального проектирования пространства $L_1(\mathbb{I}^d)$ на подпространство

$$V_n := \operatorname{span}\left\{h_{\bar{k}},\, \bar{k} \in Y_{n,d}\right\} = \left\{u \colon u = \sum_{\bar{k} \in Y_{n,d}} c_{\bar{k}} h_{\bar{k}},\, c_{\bar{k}} \in \mathbb{R}\right\},$$

т. е.

$$P_n f(x) = \sum_{\bar{k} \in Y_{n,d}} (f, h_{\bar{k}})\, h_{\bar{k}}(x), \quad f \in L_1(\mathbb{I}^d).$$

Функции $P_n f(x)$, $x \in \mathbb{I}^d$, назовем полиэдральными (кубическими) суммами Фурье – Хаара функции f.

Утверждение 1. *Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо представление*

$$P_n f(x) = \frac{1}{|\mathcal{I}|} \int_{\mathcal{I}} f(y) dy, \quad x \in \mathcal{I}, \tag{2}$$

где $\mathcal{I} \in Q_{n+1}$, т. е. $\mathcal{I}$ — двоичный куб, $\mathcal{I} \subset \mathbb{I}^d$, $\operatorname{vol} \mathcal{I} = 2^{-nd}$.

Доказательство. В случае $d = 1$ доказательство утверждения 1 можно найти в [6, с. 78–80] (гл. 3, $\S 1$). При $d > 1$ доказательство проводится аналогичными рассуждениями. Достаточно лишь заметить, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$ и $I \in Q_{n+1}$ для функции

$$m_n(f;x) := \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(x)dx, \quad x \in I,$$

$$m_n(f;x) = 0, \quad x \in \mathbb{I}^d \backslash I,$$

для любых $\mathcal{I} \in Q$ и $x \in \mathcal{I}$ так же, как и в случае $d = 1$, выполняется равенство

$$P_n f(x) = P_n\big(m_n(f;\cdot)\big)(x) = m_n(f;x).$$

Замечание. Представлением (2) не отслеживаются значения функции $P_n f(x)$ на „сетке” двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$, но для интересующих нас свойств функции $P_n f(x)$ эти значения не являются существенными.

3. Об одном свойстве системы $\mathbf{H}_0^d$. Сформулируем и докажем важное вспомогательное утверждение об оценке L_p-нормы элементов пространства $\mathrm{W}_j := \mathrm{span}\{h_{\bar{k}};\ \bar{k} \in Z_{j,d}\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *Для любой системы действительных чисел $\{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}}$, $j = 1, 2, \ldots$, имеют место соотношения*

$$\left\| \sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \right\|_p \asymp 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \left(\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

и

$$\left\| \sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \right\|_\infty \asymp 2^{\frac{jd}{2}} \max_{\bar{k}\in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|. \tag{4}$$

Доказательство. Установим вначале (3) со знаком $\ll$. Зафиксировав j, разобьем множество индексов $Z_{j,d}$ на непересекающиеся подмножества $Z_{j,d}(\bar{l})$ согласно процедуре, установленной в п. 1.

Таким образом,

$$Z_{j,d}(\bar{l}^{(1)}) \cap Z_{j,d}(\bar{l}^{(2)}) = \varnothing \quad \text{при} \quad \bar{l}^{(1)} \ne \bar{l}^{(2)}$$

и

$$Z_{j,d} = \bigcup_{\bar{l}\in Y_{j-1,d}} Z_{j,d}(\bar{l}),$$

а также

$$\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}} = \bigcup_{\bar{l}\in Y_{j-1,d}} \mathrm{H}(j;\bar{l}).$$

С другой стороны, учитывая, что $\mathrm{card}\, \mathrm{H}(j;\bar{l}) = 2^d - 1$ для любого $\bar{l} \in Y_{j-1,d}$, разобьем множество $\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}}$ на $2^d - 1$ непересекающихся подмножеств $\mathcal{H}_j^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^d - 1$, так, что каждая функция $h_{\bar{k}} \in \mathrm{H}(j;\bar{l})$, $\bar{l} \in Y_{j-1,d}$, отнесена ровно к одному из множеств $\mathcal{H}_j^{(i)}$ и, таким образом, $\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}} = \bigcup_{i=1}^{2^d-1} \mathcal{H}_j^{(i)}$.

Понятно, что card $\mathcal{H}_j^{(i)} = \sharp Y_{j-1,d} = 2^{(j-1)d}$ при любом $i = 1, \ldots, 2^d - 1$ и $\operatorname{supp} h_{\bar{k}(1)} \cap \cap \operatorname{supp} h_{\bar{k}(2)} = \varnothing$, если $h_{\bar{k}(1)}, h_{\bar{k}(2)} \in \mathcal{H}_j^{(i)}$ (при некотором $i = 1, \ldots, 2^d - 1$) и $\bar{k}(1) \neq \bar{k}(2)$.

Обозначим через $Z_{j,d}^{(i)}$ множество индексов (векторов) $\bar{k}$ таких, что функция $h_{\bar{k}}$ принадлежит множеству $\mathcal{H}_j^{(i)}$ (тогда $\sharp Z_{j,d}^{(i)} = 2^{(j-1)d}$).

Заметим сначала, что непосредственными вычислениями легко показать, что при $j = = 1, 2, \ldots$ и $\bar{l} \in Y_{j-1,d}$

$$\|h_{\bar{k}}\|_p = |I_j^{\bar{l}}|^{1/p-1/2} = 2^{-jd(1/p-1/2)}, \qquad \bar{k} \in Z_{j,d}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{5}$$

Тогда, используя неравенство $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, $a, b > 0$, $1 \leq p < \infty$, имеем

$$\Bigg\| \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Bigg\|_p^p = \Bigg\| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Bigg\|_p^p =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{I}^d} \Bigg| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Bigg|^p dx \leq C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} \int\limits_{\mathbb{I}^d} \Bigg| \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Bigg|^p dx =$$

$$= C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} \Bigg\| \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Bigg\|_p^p = C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} |a_{\bar{k}}|^p \|h_{\bar{k}}\|_p^p =$$

$$= C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} 2^{-jd(1/p-1/2)p} \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} |a_{\bar{k}}|^p = C(p,d) 2^{-jd(1/p-1/2)p} \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|^p,$$

откуда следует оценка сверху в (3).

Оценка снизу в соотношении (3) в случае $p = 2$ является тривиальным следствием ортонормированности системы $\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$ в $L_2(\mathbb{I}^d)$. Более того, справедливо равенство

$$\Bigg\| \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Bigg\|_2^2 = \sum_{\bar{k} \in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|^2. \tag{6}$$

Докажем оценку снизу в (3) для произвольного $1 \leq p < \infty$.

Поскольку $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^\infty$ — упорядоченная согласно п. 1 последовательность функций из $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in Z_+^d}$ — является базисом в пространствах $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$ (см. теорему 1), на основании утверждения из [7] существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для любой совокупности действительных чисел $\{c_k\}_{k=1}^{n+m}$, n, $m = 1, 2, \ldots$, имеет место неравенство

$$\Bigg\| \sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k \Bigg\|_p \geq \alpha \Bigg\| \sum_{k=1}^{n} c_k h_k \Bigg\|_p \tag{7}$$

(при $p = 2$, очевидно, $\alpha = 1$). В свою очередь (7), по аналогии с тем, как установлено в [4, с. 261, 262] (§2) для случая $d = 1$, влечет неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k\right\|_p \geq \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \left\|\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k h_k\right\|_p. \tag{8}$$

Действительно, в силу неравенства (7) при $1 \leq p < \infty$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k\right\|_p \geq \left\|\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k h_k\right\|_p - \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k h_k\right\|_p \geq \left\|\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k h_k\right\|_p - \frac{1}{\alpha}\left\|\sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k\right\|_p,$$

откуда и следует (8).

Из неравенств (7) и (8) следует, в частности, что для некоторой постоянной $\gamma > 0$

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} c_k h_k\right\|_p \leq \gamma \left\|\sum_{k=l}^{M} c_k h_k\right\|_p \tag{9}$$

для любых натуральных n, m, l и M, связанных соотношением $l \leq n < m \leq M$.

Используя мультииндексную (векторную) нумерацию функций базиса H^d, т. е. систему $\mathbb{H}_0^d$, на основании (9) можем записать

$$\max_{1\leq i\leq 2^d-1} \left\|\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}\right\|_p \leq \left\|\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}\right\|_p. \tag{10}$$

Но при доказательстве оценки сверху в лемме 1 показано, что при любом i, $1 \leq i \leq 2^d - 1$,

$$\left\|\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}\right\|_p = 2^{-jd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \left(\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} |a_{\bar{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому, воспользовавшись этим равенством, а также неравенством (10), получим

$$\left\|\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}\right\|_p^p \geq \frac{1}{(2^d-1)\gamma^p} \sum_{i=1}^{2^d-1} \left\|\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}\right\|_p^p = C(d,p) 2^{-jd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)p} \sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|^p,$$

т. е. искомую оценку снизу в соотношении (3).

Для завершения доказательства леммы 1 достаточно заметить, что соотношение (4), которое в ней содержится, является простым следствием равенства (5).

Заметим, что в случае $1 < p < 2$ оценку снизу в соотношении (3) можно получить из других соображений, используя только неравенство Гельдера $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_p \cdot \|f\|_{p'}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, равенство (5) и оценку сверху в (3) для показателя суммируемости p'. А именно, для $f = \sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}$

$$\left\|\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}\right\|_p \geq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_{p'}} \gg \frac{\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|^2}{2^{-j\left(\frac{d}{p'}-\frac{d}{2}\right)} \left(\sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}} |a_{\bar{k}}|^{p'}\right)^{1/p'}} =: P.$$

Значит, если $1 < p < 2$, то $2 < p' < \infty$, и согласно известным неравенствам

$$\left(\sum_{s=1}^{N}|b_s|^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\le\left(\sum_{s=1}^{N}|b_s|^{\mu}\right)^{1/\mu}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}|b_s|^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\ge\left(\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}|b_s|^{\mu}\right)^{1/\mu}, \tag{12}$$

где $b=\{b_s\}_{s=1}^{N}$ — произвольная система действительных чисел и $1\le\mu<\gamma<\infty$, имеем

$$\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^2\ge\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^p\right)^{2/p}\cdot 2^{-jd(1/p-1/2)\cdot 2}$$

и

$$\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^{p'}\right)^{1/p'}\le\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^p\right)^{1/p}.$$

В таком случае справедлива оценка

$$P\ge 2^{-2jd(1/p-1/2)}\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^p\right)^{2/p}\Bigg/\left(2^{jd(1/2-1/p')}\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^p\right)^{1/p}\right)\ge$$

$$\ge C(d,p)2^{-jd(1/p-1/2)}\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|a_{\bar k}|^p\right)^{1/p}.$$

4. О некоторых свойствах оператора P_n и элементов подпространства V_n.

Лемма 2. *Для любой функции $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p\le\infty$ и $n\in\mathbb{Z}_+$, выполняются неравенства*

$$\|P_nf\|_p\le C_1(d,p)\|f\|_p, \tag{13}$$

$$\|f-P_nf\|_p\le C_2(d,p)\omega(f;2^{-n})_p, \tag{14}$$

а для $f\in\mathrm{V}_n$

$$\omega(f;\delta)_p\le C(d,p)\big(\min\{\delta 2^n;1\}\big)^{1/p}\|f\|_p. \tag{15}$$

Доказательство. Установление неравенства (14) проводится по схеме доказательства этого неравенства в случае $d=1$ (см. [6, с. 81 – 83], теорема 2 для $p=\infty$ и теорема 3 для $1\le p<\infty$) с использованием утверждения 1. Подробное изложение мы опускаем.

Неравенство (13) является простым следствием неравенства (14). Действительно, учитывая, что для любого $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$ и $0\le\delta\le1$, очевидно, $\omega(f;\delta)_p\le 2\|f\|_p$, имеем

$$\|P_nf\|_p=\|f-(f-P_nf)\|_p\le\|f\|_p+\|f-P_nf\|_p\le$$

$$\le\|f\|_p+C_2(d,p)\omega(f;2^{-n})_p\le\big(1+2C_2(d,p)\big)\|f\|_p=C_1(d,p)\|f\|_p.$$

Переходя к доказательству (15), напомним определение $\omega(f;t)_p$. Если $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p\le$ $\le\infty$, и $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\in\mathbb{R}_+$, то

$$\omega(f;t)_p := \sup_{\substack{0\le\lambda_i<t\le 1\\ i=\overline{1,d}}} \|\Delta_\lambda(f;\cdot)\|_{L(\mathbb{I}^d_\lambda)},$$

где $\mathbb{I}^d_\lambda = \prod_{i=1}^d [0;1-\lambda_i]$ и $\Delta_\lambda(f;x) = f(x+\lambda) - f(x)$ при $x,\ x+\lambda \in \mathbb{I}^d$.

Неравенство $\omega(f;\delta)_p \le C\|f\|_p$ с постоянной $C=2$, как было отмечено выше, выполняется равномерно по всем $0\le\delta\le 1$ для любой функции $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$ и, в частности, для $f\in \mathrm{V}_n$. Его можно уточнить для $f\in\mathrm{V}_n$ и $0<\delta<2^{-n}$ при $n=1,2,\ldots$.

В самом деле, пусть $j\in\mathbb{N}$, задано δ, $0<\delta<2^{-j}$ и $0\le\lambda_i<\delta$, $i=\overline{1,d}$. Рассмотрим разность $\Delta_\lambda(h_{\bar k};x) = h_{\bar k}(x+\lambda) - h_{\bar k}(x)$, $\bar k\in Z_{j,d}$, $x\in\mathbb{I}^d_\lambda$. С учетом того, что $\operatorname{supp} h_{\bar k}\in Q_j$ при $\bar k\in Z_{j,d}$, а точнее, $\operatorname{supp} h_{\bar k} = I_j^{s^*}$ при некотором $s^*=(s_1^*,\ldots,s_d^*)$, $0\le s_i^*<2^{j-1}$, $i=\overline{1,d}$, и $|I_j^{s^*}| = 2^{(-j+1)d}$, легко заметить, что в силу определения функции $h_{\bar k}$, $\bar k\in Z_{j,d}$, разность $\Delta_\lambda(h_{\bar k};x)$ отлична от нуля лишь на некотором множестве $\Sigma(\lambda)\subset\mathbb{I}^d_\lambda\cap I_j^{s^*}$ объемом $|\Sigma(\lambda)|\le C\delta^d$, $C>0$. Поэтому, учитывая также, что в силу неравенства $|a\pm b|^p\le 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $1\le p<\infty$, будет

$$|\Delta_\lambda(h_{\bar k}\,;x)|^p \le 2^p|h_{\bar k}(x)|^p, \quad x\in\Sigma(\lambda), \tag{16}$$

выводим соотношение

$$\|\Delta_\lambda(h_{\bar k}\,;\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{I}^d_\lambda)} = \int\limits_{\mathbb{I}^d_\lambda} |h_{\bar k}(x+\lambda) - h_{\bar k}(x)|^p dx =$$

$$= \int\limits_{\Sigma(\lambda)} |h_{\bar k}(x+\lambda) - h_{\bar k}(x)|^p dx < |\Sigma(\lambda)| \max_{x\in\Sigma(\lambda)} |\Delta_\lambda(h_{\bar k}\,;x)|^p \le$$

$$\le C\delta^d 2^p (2^{jd})^{\frac{p}{2}} = C(p)\delta^d\cdot 2^{jd}\cdot\left(2^{-jd\left(\frac1p-\frac12\right)}\right)^p \le C_3(d,p)\delta\cdot 2^j\|h_{\bar k}\|_p^p.$$

Отметим также очевидное равенство $\|\Delta_\lambda(h_{\bar 0}\,;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{I}^d_\lambda)} = 0$.

Далее, для $f\in\mathrm{V}_n$ $\left(\text{т. е. } f(x) = \sum_{\bar k\in Y_{n,d}} c_{\bar k}h_{\bar k}(x) = \sum_{j=0}^n\sum_{\bar k\in Z_{j,d}} c_{\bar k}h_{\bar k}(x),\ c_{\bar k}\in\mathbb{R}\right)$ и $0<\delta<2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, с помощью рассуждений, использованных при доказательстве леммы 1, а также с учетом (16) и (9) получаем

$$\|\Delta_\lambda(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{I}^d_\lambda)} \le \sum_{j=0}^n \left\| \sum_{\bar k\in Z_{j,d}} c_{\bar k}\Delta_\lambda(h_{\bar k}\,;\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{I}^d_\lambda)} \le$$

$$\le C_4(d,p)\sum_{j=1}^n (\delta 2^j)^{1/p}\cdot 2^{-jd(\frac1p-\frac12)}\left(\sum_{\bar k\in Z_{j,d}}|c_{\bar k}|^p\right)^{1/p} \le$$

$$\le C_5(d,p)\sum_{j=1}^n(\delta 2^j)^{1/p}\left\|\sum_{\bar k\in Z_{j,d}} c_{\bar k}h_{\bar k}\right\|_p \le C_6(d,p)\sum_{j=1}^n(\delta 2^j)^{1/p}\left\|\sum_{\bar k\in Y_{n,d}} c_{\bar k}h_{\bar k}\right\|_p \le$$

$$\leq C_7(d,p)\sum_{j=1}^{n}(\delta 2^j)^{1/p}\cdot\|f\|_p \leq C(d,p)(\delta 2^n)^{1/p}\|f\|_p. \tag{17}$$

Из определения $\omega(f;\delta)_p$ с учетом (17) приходим к неравенству (15).

Лемма 2 доказана.

Неравенства (13) и (14) допускают распространение на случай более общих, чем P_n, операторов. Для произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^d$ такого, что $Y_{n,d} \subset \Omega \subset Y_{n+1,d}$, определим операторы P_n^Ω, $n \in \mathbb{Z}_+$, действующие по формуле

$$P_n^\Omega f(x) = \sum_{\bar{k}\in\Omega}(f, h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(x), \quad x \in \mathbb{I}^d.$$

Обозначим $S := \bigcup_{\bar{k}\in\Omega\cap Z_{n+1,d}} \operatorname{supp} h_{\bar{k}}$, где, напомним, $Z_{n+1,d} = Y_{n+1,d}\setminus Y_{n,d}$. Тогда

$$P_n^\Omega f(x) = \begin{cases} P_{n+1}f(x), & x \in S, \\ P_n f(x), & x \in \mathbb{I}^d \setminus \overline{S}. \end{cases}$$

С учетом свойств модуля непрерывности $\omega(f,t)_p$, $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, из (14) получаем

$$\|f - P_n^\Omega f\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{I}^d} |f(x) - P_n^\Omega f(x)|^p dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{S} |f(x) - P_{n+1}f(x)|^p dx + \int\limits_{\mathbb{I}^d\setminus S} |f(x) - P_n f(x)|^p dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{I}^d} |f(x) - P_{n+1}f(x)|^p dx + \int\limits_{\mathbb{I}^d} |f(x) - P_n f(x)|^p dx \leq$$

$$\leq C_8(d,p)\left(\omega^p(f,2^{-n-1})_p + \omega^p(f,2^{-n})_p\right) \leq C_9(d,p)\omega^p(f,2^{-n})_p$$

при $Y_{n,d} \subset \Omega \subset Y_{n+1,d}$, $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\|f - P_n^\Omega f\|_p \leq C_{10}(d,p)\omega(f,2^{-n})_p. \tag{18}$$

Как следствие (18) получаем также более общее, чем (13), неравенство

$$\|P_n^\Omega f\|_p \leq C_{11}(d,p)\|f\|_p. \tag{19}$$

5. О базисности системы $\mathbb{H}_0^d$ в пространстве $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Результаты предыдущих пунктов позволяют сформулировать и доказать основное утверждение о системе $\mathbb{H}_0^d$.

Рассмотрим систему $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_+^d}$ и пусть $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^\infty$ — упорядоченная согласно п. 1 последовательность функций из $\mathbb{H}_0^d$. Определим операторы $R_j : L_1(\mathbb{I}^d) \longrightarrow \mathrm{W}_j$, где, напомним, $\mathrm{W}_j := \operatorname{span}\{h_{\bar{k}};\ \bar{k} \in Z_{j,d}\}$, $j = 0, 1, \ldots$, соотношением $R_j f(x) = \sum_{\bar{k}\in Z_{j,d}}(f; h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(x)$, $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$, *справедливо разложение Фурье–Хаара*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j f(x), \tag{20}$$

сходящееся в пространстве $L_p(\mathbb{I}^d)$. *Последовательность* $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$ *является базисом Шаудера в* $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$.

Доказательство. Для доказательства второй части теоремы достаточно проверить для H^d выполнение критерия базисности заданной последовательности элементов банахова пространства (см. [6, с. 19], теорема 6).

Во-первых, ортонормированная в $L_2(\mathbb{I}^d)$ система H^d, согласно неравенству (14) (а точнее, неравенству (18)), полна в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$. Во-вторых, система H^d минимальна в этих пространствах, так как для нее справедлив аналог для $d > 1$ утверждения 4 из [6, с. 16].

Наконец, учитывая, что для системы H^d выполняется неравенство (19), согласно критерию базисности заключаем, что H^d — базис в $L_p(\mathbb{I}^d)$. Как следствие имеет место представление (20) при $1 \le p < \infty$. Справедливость (20) при $p = \infty$ (и при $1 \le p < \infty$) следует непосредственно из неравенства (14).

В заключение отметим, что настоящая статья подготовлена за частью результатов, вошедших в предварительную публикацию [8].

1. *Haar A.* Zur Theorie der ortohogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. – 1910. – **69**. – S. 331–371.
2. *Chauder I. S.* Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems // Math. Z. – 1928. – **28**. – S. 317–320.
3. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Мат. сб. – 1964. – **63**, № 3. – С. 357–391.
4. *Голубов Б. И.* Наилучшие приближения функций в метрике L_q полиномами Хаара и Уолша // Мат. сб. – 1972. – **87**, № 2. – С. 254–274.
5. *Temlyakov V. N.* The best m-term approximation and greedy algorithms // Adv. Comput. Math. – 1998. – **8**, № 3. – P. 249–265.
6. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
7. *Гринблюм М. М.* Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа B // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**. – С. 428–432.
8. *Романюк В. С.* Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах. – Киев, 2012. – 44 с. – (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 2012.2).

Получено 27.03.15