УДК 517.9

А. А. Бойчук, А. А. Покутный (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ И ГИЛЬБЕРТА

The perturbation theory is constructed in the Frechet and Hilbert spaces. The iterative process is proposed for finding branching solutions.

Побудовано теорію збурень у просторах Фреше і Гільберта. Наведено ітераційний процес знаходження розгалужених розв'язків.

Введение. Задачи математической физики часто сводятся к решению нелинейных уравнений вида

$$\mathcal{F}(x,h)=0, \tag{1}$$

где $\mathcal{F}(x,h)$ — нелинейный оператор, определенный и непрерывный (достаточно гладкий, аналитический) в окрестности $w=w(x_0,h_0)\subset E_1+E$ известного решения $x=x_0$ при $h=h_0$ со значениями в E_2; E_1,E_2,E — пространства Фреше $\big(\mathcal{F}\colon w(x_0,h_0)\subset E_1\times E\to E_2\big)$. Необходимо построить решение $x=x(h)$ уравнения (1) в окрестности w точки (x_0,h_0). Если производная Фреше $\mathcal{F}_x(x_0,h_0)$ существует и является обратимым оператором, то в окрестности w, как следует из классической теоремы о неявной функции [1], существует единственное непрерывное (гладкое, аналитическое) решение $x=x_0+y(h-h_0)$. Теория ветвления [2, 3] рассматривает вопрос о существовании и количестве малых решений $y(h-h_0)$, а также построении их асимптотики по малому параметру $h-h_0$ в случае, когда оператор $Q=-\mathcal{F}_x(x_0,h_0)$ имеет нетривиальное подпространство нулей $N(Q)$, т. е. не выполняются условия классической теоремы о неявной функции. В окрестности $w(x_0,h_0)$ может существовать несколько решений или семейство решений, зависящих от одного или нескольких параметров; (x_0,h_0) называется тогда точкой ветвления решений уравнения (1). В дальнейшем для удобства будем считать, что $x_0=0,h_0=0$. Тогда (1) можно записать в виде

$$Qx=R(x,h),\qquad R(0,0)=0,$$

где предполагается, что $R_x(0,0)=0$ (производная Фреше по первой переменной). Если $h=\lambda$ — числовой параметр и при всех возможных значениях λ $R(0,\lambda)=0$, то рассматриваемое уравнение называют задачей о точках бифуркации [1, 3]. Точками бифуркации являются те значения параметра λ, в окрестности которых существуют нетривиальные решения уравнения. Основы теории ветвления функциональных уравнений были заложены в начале XX века в работах известных математиков А. М. Ляпунова и Э. Шмидта. Исследования А. М. Ляпунова были связаны с известной задачей о фигурах равновесия, а Э. Шмидта — с общей теорией линейных и нелинейных интегральных уравнений. Отметим также, что в случае, когда ядро $N(Q)$ конечномерное, эта задача исследовалась, например, в [2] с помощью леммы Шмидта для фредгольмовых и нетеровых операторов [4]. Метод, который применяется при решении задач теории ветвления, получил название метода Ляпунова – Шмидта. Другие теоремы о неявных функциях были получены в работах [5, 6], а также [1, 7 – 9]. Теорема о неявной функции имеет отношение к известной лемме Морса [1]. Данная работа посвящена развитию теорем о неявной функции на случай операторных уравнений в функциональных пространствах.

Постановка задачи. Будем рассматривать нелинейное уравнение вида

$$Qx = hR(x, h) \tag{2}$$

в пространстве Фреше E_1 с непрерывной нелинейностью $R(x, h)$ в окрестности точки $(0, 0)$, которая удовлетворяет условию $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$, h — числовой параметр. Задача состоит в отыскании такого непрерывного решения $x = x(h)$, которое при $h = 0$ обращается в одно из решений порождающей задачи $Qx = 0$, определенного и непрерывного в окрестности этого решения.

Модификация метода Ляпунова – Шмидта. Рассмотрим случай, когда оператор Q имеет обобщенно-обратный [4], т. е. существует оператор Q^- такой, что $QQ^-Q = Q$, $Q^-QQ^- = Q^-$. Тогда решение порождающей задачи может быть представлено в виде $x = P_{N(Q)}c$ для произвольного элемента $c \in E_1$, где $P_{N(Q)}$ — проектор на ядро $N(Q)$ оператора Q. Найдем необходимое условие существования решения нелинейного уравнения.

Теорема 1 (*необходимое условие*). *Пусть существует непрерывное решение $x = x(h)$ уравнения* (2), *которое при $h = 0$ обращается в одно из решений порождающей задачи $P_{N(Q)}c$ с элементом $c = c_0$. Тогда c_0 должен удовлетворять уравнению для порождающих элементов*

$$F(c_0) = 0, \qquad F(c) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c, 0). \tag{3}$$

Доказательство. Предположим, что нелинейное уравнение имеет решение $x = x(h)$, которое становится одним из решений порождающего уравнения $x(0) = P_{N(Q)}c_0$ при $h = 0$. Подставим это решение в уравнение и запишем условие разрешимости [4]

$$P_{N(Q^*)}R(x(h), h) = 0.$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$. Используя при этом непрерывность R в окрестности порождающего решения, получаем (3).

Найдем достаточное условие существования решения нелинейного уравнения. Для его получения необходимо требовать от нелинейности R дополнительной гладкости в окрестности порождающего решения. Пусть элемент $c = c_0$ удовлетворяет уравнению для порождающих элементов (3). Выполним замену переменных $x(h) = P_{N(Q)}c_0 + y(h)$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$Qy(h) = hR\big(P_{N(Q)}c^0 + y(h), h\big). \tag{4}$$

Отображение $y(h)$ удовлетворяет условию $y(0) = 0$. Выделим в (4) линейную часть в окрестности порождающего решения (предполагая, что это можно сделать)

$$R(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0, 0) + ly(h) + \mathcal{R}(y(h), h), \qquad ly(h) = R_x(P_{N(Q)}c_0, 0)y(h),$$

$$\mathcal{R}(y(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly(h), \tag{5}$$

$$\mathcal{R}(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0, \qquad \mathcal{R}_x(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

и запишем условие разрешимости для уравнения (4)

$$P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h) = 0.$$

При выполнении этого условия уравнение (4) будет иметь решения в виде

$$y(h) = \overline{y}(h) + P_{N(Q)}c(h),$$

где

$$\overline{y}(h) = G[y(h)] := hQ^- R\big(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h\big).$$

Подставляя это выражение в условие разрешимости и учитывая представление (5), а также условие (3), получаем операторное уравнение относительно $c(h)$:

$$B_0 c(h) = g(h),$$

$$B_0 = P_{N(Q^*)} l P_{N(Q)}, \qquad g(h) = -P_{N(Q^*)} l\overline{y}(h) - P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h).$$

Если оператор B_0 имеет обобщенно-обратный и выполнено условие $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$, то это уравнение будет разрешимым с одним из решений вида $c(h) = B_0^- g(h)$. Тогда получим следующую операторную систему относительно $y(h), c(h), \overline{y}(h)$:

$$y(h) = P_{N(Q)}c(h) + \overline{y}(h),$$

$$c(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\big\{\mathcal{R}(y(h), h) + l\overline{y}(h)\big\},$$

$$\overline{y}(h) = G[y(h)],$$

которую запишем в виде

$$u(h) = Lu(h) + g(h), \tag{6}$$

где $u(h) = (y(h), c(h), \overline{y}(h))^T$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & P_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1(h) \\ g_2(h) \end{pmatrix},$$

$$L_1 z = -B_0^- P_{N(Q^*)} l z, \qquad g_1(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h), \qquad g_2(h) = G[y(h)].$$

Теперь $u(h) = (I - L)^{-1} g(h) = \mathcal{S}(h)u(h)$, где

$$\mathcal{S}(h)u(h) = (I - L)^{-1} g(h) = \begin{pmatrix} I & P_{N(Q)} & P_{N(Q)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} g(h),$$

$$\mathcal{S}(h)\begin{bmatrix} y(h) \\ c(h) \\ \overline{y}(h) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{N(Q)}B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h) - P_{N(Q)}B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(h)] + G[y(h)] \\ -B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h) - B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(h)] \\ G[y(h)] \end{pmatrix}.$$

За счет малости h всегда можно добиться, чтобы оператор $\mathcal{S}(h)$ был сжимающим, и из принципа сжимающих отображений [1] получим следующую теорему.

Теорема 2 (*достаточное условие*). *Пусть выполняются условия*:

1) Q *и* B_0 — *обобщенно-обратимые операторы*;

2) $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.

Тогда для произвольного элемента $c = c_0$, *удовлетворяющего уравнение для порождающих элементов* (3), *существует непрерывное решение* $x(h)$ *уравнения* (2) *в достаточно малой окрестности точки* $h = 0$. *Это решение можно найти с помощью сходящегося итерационного процесса*

$$y_{k+1}(h) = P_{N(Q)}c_k(h) + \overline{y}_k(h),$$

$$c_{k+1}(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\},$$

$$\overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)],$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), \qquad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = Q^- R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

$$y_0(h) = 0, c_0(h) = 0, \overline{y}_0(h) = 0.$$

Связь между необходимым и достаточным условиями. Сначала докажем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть* $F(c)$ *имеет производную Фреше для элемента* $c = c_0$ *пространства* E_1, *который удовлетворяет уравнению для порождающих элементов* (3). *Если* $F^{(1)}(c_0)$ *имеет ограниченный обратный*, *то уравнение* (2) *имеет единственное решение*, *где* $F^{(1)}(c_0)$ — *производная Фреше в точке* c_0.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$F(c_0 + h) = F(c_0 + h) - F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}(c_0 + h), h) - P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) =$$

$$= P_{N(Q^*)}lP_{N(Q)}h + P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}h, h) = B_0[h] + P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}h, h).$$

Отсюда следует, что $B_0 = F^{(1)}(c_0)$. Поскольку оператор $F^{(1)}(c_0)$ обратимый, то для оператора B_0 условия теоремы 2 выполняются. Таким образом, условие обратимости оператора B_0 связывает между собой необходимое и достаточное условия. Это условие является аналогом условия простоты корня уравнения (3) в конечномерном случае [4].

Замечания относительно усиления результатов. Используя понятие сильного обобщенно-обратного оператора, введенного в [10], можно доказать более общее утверждение, чем теорема 2. Для полноты изложения приведем соответствующие определения.

Пусть для пространств E_1, E_2 выполнены соотношения

$$E_1 = N(Q) \oplus X, \qquad E_2 = \overline{R(Q)} \oplus Y, \tag{7}$$

т. е. пространства $N(Q)$ и $\overline{R(Q)}$ дополняемые.

Определение 1. *Пусть* $Q\colon E_1 \to E_2$ *— линейный ограниченный оператор, действующий из пространства Фреше* E_1 *в пространство Фреше* E_2, *а подпространства* $X \subset E_1$ *и* $Y \subset \subset E_2$ *такие, что справедливо представление* (7). *Тогда соответствующую пару* (X, Y) *будем называть обобщенной* Q*-допустимой парой.*

Рассмотрим сужение Q_X оператора Q на подпространство $X : Q_X x = Qx$, $Q_X : X \to \overline{R(Q)}$ (он будет линейным, непрерывным и инъективным). Пополним пространство X по системе полунорм, которые определяют его топологию, и расширим оператор Q_X на пополненное пространство $\overline{X}$ по непрерывности [11]. Тогда расширенный оператор $\overline{Q}_X : \overline{X} \to \overline{R(Q)}$ будет осуществлять гомеоморфизм между пространствами $\overline{X}$ и $\overline{R(Q)}$. Будем обозначать через $\overline{E}_1 = = \overline{X} \oplus N(Q)$ расширенное исходное пространство.

Определение 2. *Пусть* Q *— линейный ограниченный оператор и* (X, Y) *— обобщенная* Q*-допустимая пара. Тогда отображение*

$$Q^-_{X,Y} : E_2 \to E_1,$$

$$Q^-_{X,Y} y = \overline{Q}_X^{-1} y_1, \qquad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in \overline{R(Q)}, \quad y_2 \in Y,$$

будем называть сильным (X, Y)*-обобщенно-обратным к* Q.

На подпространстве X этот оператор имеет свойства, аналогичные свойствам классического обобщенно-обратного оператора. Благодаря этой конструкции можно получить следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*:

1) Q *и* B_0 *— сильные* (X_1, Y_1)-, (X_2, Y_2)*-обобщенно-обратимые операторы соответственно*;

2) $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.

Тогда для произвольного элемента $c = c_0$, *который удовлетворяет уравнению для порождающих элементов* (3), *существует непрерывное обобщенное решение* $x(h)$ *уравнения* (2). *Это решение можно найти с помощью сходящегося итерационного процесса*

$$y_{k+1}(h) = P_{N(Q)} c_k(h) + \overline{y}_k(h),$$

$$c_{k+1}(h) = -B^-_{0X_2,Y_2} P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\},$$

$$\overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)],$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)} c_0, 0) - l y_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = B^-_{X_1,Y_1} R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(h) = 0$, $c_0(h) = 0$, $\overline{y}_0(h) = 0$; $B^-_{0X_1,Y_1}$, $B^-_{X_2,Y_2}$ *— сильные обобщенно-обратные операторы* [10].

***Замечание* 1.** Техника доказательства теоремы 3 не отличается от доказательства теоремы 2. В случае, когда для оператора Q существует обобщенно-обратный, он будет совпадать с сильным обобщенно-обратным, и теорема 2 является следствием теоремы 3.

Рассмотрим теперь то же уравнение, но определенное в пространствах Гильберта $E_1 = H_1$, $E = H$, $E_2 = H_2$. В этом случае, как следует из работы [10], оператор Q будет всегда (X, Y)-обобщенно-обратимым с сильным псевдообратным по Муру – Пенроузу оператором, который обозначается $\overline{Q}^+$ [10]. Из изложенного получаем следующее следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть* $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0.$

Тогда для произвольного элемента $c = c_0$, *удовлетворяющего уравнению для порождающих элементов* (3), *существует непрерывное обобщенное решение* $x(h)$ *уравнения* (2). *Это решение можно найти с помощью сходящегося итерационного процесса*

$$y_{k+1}(h) = P_{N(Q)} c_k(h) + \overline{y}_k(h),$$

$$c_{k+1}(h) = -\overline{B}_0^+ P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\},$$

$$\overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)],$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)} c_0, 0) - l y_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), \qquad x(h) = \lim_{k \to \infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = \overline{Q}^+ R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c_0, 0) = 0,$$

для $y_0(h) = 0$, $c_0(h) = 0$, $\overline{y}_0(h) = 0$; $\overline{B}_0^+$, $\overline{Q}^+$ — *сильные псевдообратные по Муру – Пенроузу операторы* [10].

Пример. Покажем, как можно применять полученные теоремы для представления решений слабонелинейного алгебраического уравнения Ляпунова в пространстве Гильберта [12] в критическом случае (когда нарушается единственность решения порождающего уравнения [4, 13]).

Рассмотрим уравнение вида

$$\mathcal{F}(X, h) = AX + XB + hXQ_1X - Q_2 = 0, \tag{8}$$

где $A, B, Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}(H)$ — заданные линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве Гильберта H, оператор $X \in \mathcal{L}(H)$ — искомый, а h — числовой параметр. Рассмотрим порождающее уравнение

$$\mathcal{F}(X, 0) = AX + XB - Q_2 = 0. \tag{9}$$

В данном случае $R(X, h) = hXQ_1X$. Введя обозначение $QX := AX + XB$, запишем (9) в виде

$$QX = Q_2.$$

Тогда обобщенные решения уравнения (9) будут иметь вид

$$X = \overline{Q}^{+}Q_2 + P_{N(Q)}C, \tag{10}$$

где произвольный оператор C принадлежит $\mathcal{L}(H)$ при выполнении условия $P_{N(Q^*)}Q_2 = 0$. Используя теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 4 (*необходимое условие*)**.** *Пусть существует непрерывное решение уравнения* (8), *которое при* $h = 0$ *обращается в одно из решений порождающей задачи* (9) *вида* (10) *с оператором* $C = C_0$. *Тогда* C_0 *должен удовлетворять операторному уравнению*

$$F(C) = P_{N(Q^*)}(\overline{Q}^{+}Q_2 + P_{N(Q)}C)Q_1(\overline{Q}^{+}Q_2 + P_{N(Q)}C) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, теорема 4 иллюстрирует теорему 1 о необходимом условии существования решения операторного уравнения (8).

***Замечание* 2.** В случае периодической краевой задачи в конечномерном случае уравнение вида (3) называется уравнением для порождающих амплитуд [13]. В случае конечномерности коядра оператора Q соответствующее уравнение называют уравнением ветвления [2]. В связи с этим уравнение (3) было названо уравнением для порождающих элементов, а (11) — операторным уравнением для порождающих операторов.

Для получения достаточного условия выполним замену переменных $X(h) = Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2$. Тогда получим уравнение вида

$$QY(h) = -h(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2), \qquad Y(0) = 0. \tag{12}$$

Условие разрешимости для (12) принимает вид

$$P_{N(Q^*)}(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2) = 0. \tag{13}$$

При выполнении условия (13) решения будут иметь вид

$$Y(h) = \overline{Y}(h) + P_{N(Q)}C(h), \tag{14}$$

где

$$\overline{Y}(h) = G[Y(h)] = -h\overline{Q}^{+}(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2).$$

Нетрудно проверить, что в данном случае

$$lY(h) = Y(h)Q_1(P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2) + (P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1Y(h).$$

Таким образом, приходим к операторной системе вида

$$\begin{aligned} &Y(h) = \overline{Y}(h) + P_{N(Q)}C(h), \\ &\overline{Y}(h) = -h\overline{Q}^{+}(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2), \\ &B_0C(h) = -P_{N(Q^*)}Y(h)Q_1Y(h) - P_{N(Q^*)}l\overline{Y}(h). \end{aligned} \tag{15}$$

Используя следствие 2, получаем следующий результат.

Теорема 5 (*достаточное условие*). *Пусть* $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0.$

Тогда для произвольного оператора $C = C_0$, *удовлетворяющего уравнению для порождающих операторов* (11), *существует непрерывное обобщенное решение* $x(h)$ *уравнения* (8). *Это решение можно найти с помощью сходящегося итерационного процесса*

$$Y_{k+1}(h) = \overline{Y}_k(h) + P_{N(Q)}C_k(h),$$

$$C_{k+1}(h) = -\overline{B}_0^+ P_{N(Q^*)}Y_k(h)Q_1Y_k(h) - P_{N(Q^*)}l\overline{Y}_k(h),$$

$$\overline{Y}_{k+1}(h) = -h\overline{Q}^+(Y_k(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2)Q_1(Y_k(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2),$$

$$X_k(h) = P_{N(Q)}C_0 + Y_k(h) + \overline{Q}^+Q_2, \qquad X(h) = \lim_{k\to\infty} X_k(h),$$

$$G[Y_k(h)] = -h\overline{Q}^+(Y_k(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2)Q_1(Y_k(h) + P_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2),$$

$$F(C_0) = P_{N(Q^*)}(\overline{Q}^+Q_2 + P_{N(Q)}C_0)Q_1(\overline{Q}^+Q_2 + P_{N(Q)}C_0) = 0,$$

для $Y_0(h) = 0$, $C_0(h) = 0$, $\overline{Y}_0(h) = 0$; $\overline{B}_0^+$, $\overline{Q}^+$ — *сильные псевдообратные по Муру–Пенроузу операторы* [10].

1. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
3. *Логинов Б. В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: ФАН, 1985. – 184 с.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
5. *Nash J.* The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann. Math. – 1956. – **63**. – P. 20–63.
6. *Moser J.* A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1961. – **47**. – P. 1824–1831.
7. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser // Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.). – 1982. – **7**, № 1. – P. 65–222.
8. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 393 с.
9. *де ла Яве Р.* Введение в КАМ-теорию. – М.: Ин-т компьтер. исслед., 2003. – 176 с.
10. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2013. – № 4. – С. 158–161.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
12. *Christian Wyss.* Perturbation theory for Hamiltonian operator matrices and Riccati equations. – Bern, 2008. – 164 p.
13. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

Получено 22.07.14