УДК 519.1

И. К. Редчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ И РОСТ АЛГЕБР, ЗАДАННЫХ ПОЛИЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

The finite-dimensionality and growth of algebras generated by a system of generators related by polylinear interrelations are studied. Results are formulated in terms of ρ-function.

Досліджується скінченновимірність і зріст алгебр, які задані системою твірних, що пов'язані полілінійними співвідношеннями. Результати формулюються в термінах функції ρ.

Пусть $V = V_m$ — m-мерное векторное пространство над некоторым полем k с базисом $(e_1, \ldots, e_m)$, $m > 1$, $v_1, \ldots, v_s \in V$, $v_i \neq 0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in k[x]$, $\psi_i = \varphi_i(v_i)$ для $i = \overline{1, s}$.

Свободную ассоциативную алгебру T_m с m образующими можно рассматривать как тензорную алгебру $T(V_m)$. Обозначим через $I = I(\psi_1, \ldots, \psi_s)$ (двусторонний) идеал в T_m, порожденный элементами $\psi_1, \ldots, \psi_s$.

В данной статье изучается задача о конечномерности и росте алгебр T_m / I в зависимости от m, s и полиномов ψ_i при некотором ограничении на вид полиномов φ_i, которое, по-видимому, не является существенным.

Пусть $k = \mathbb{Q}(\Sigma)$ — бесконечное чисто трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}$, полученное присоединением к $\mathbb{Q}$ алгебраически независимого счетного множества Σ, $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$, $n_i \leq n_j$ при $i < j$ и $\varphi_i = x^{n_i+1}$, $i = \overline{1, s}$.

Кроме того, пусть M — матрица, строками которой являются векторы $v_1, \ldots, v_s$. Легко видеть, что элементарные преобразования со столбцами матрицы M, а также перестановки строк и умножение произвольной строки на ненулевой элемент $q \in k$ не меняют (с точностью до изоморфизма) алгебру $T_m / I(\psi_1, \ldots, \psi_s)$.

Если $s \leq m$, то задача о конечномерности и росте алгебр $T_m / I = T_m / I(\psi_1, \ldots, \psi_s)$ тривиальна:

a) при $s = m = 2$ и $n_1 = n_2 = 1$ T_m / I имеет полиномиальный рост;

b) в остальных случаях алгебра T_m / I имеет экспоненциальный рост.

Пусть $s > m$. Матрица M может быть приведена к виду

$$M' = \left[\frac{E}{S}\right],$$

где E — единичная матрица размера $m \times m$, S — некоторая матрица размера $r \times m$ $(r = s - m)$ над k. Таким образом, можно положить $v_i = e_i$ для $i = \overline{1, m}$.

Рассмотрим бесконечную матрицу $S_\infty = \| \lambda_{ij} \|$, где $\lambda_{ij} \in \Sigma$, $i, j \in \mathbb{N}$, причем $\lambda_{ij} \neq \lambda_{pq}$ при $i \neq p$ или $j \neq q$. Положим $v_t = \lambda_{t1} e_1 + \cdots + \lambda_{tm} e_m$, $t = \overline{m+1, s}$. Обозначим для заданного m и введенных выше $\psi_1, \ldots, \psi_s$ алгебру $T_m / I(\psi_1, \ldots, \psi_s)$ как $T_m(n_1, \ldots, n_s)$.

Данная задача для случая $r = 1$ решена в работе [1] (в несколько более общей постановке). В этом случае определяющие соотношения в алгебре $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ могут быть приведены к виду

$$e_i^{n_i+1} = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$(e_1 + e_2 + \ldots + e_m)^{n_{m+1}+1} = 0.$$

В работе [2] введена функция ρ:

$$\rho(n) = 1 + \frac{n-1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\rho(n_1, \ldots, n_s) = \sum_{i=1}^{s} \rho(n_i), \tag{1}$$

в терминах которой могут быть охарактеризованы графы Дынкина и расширенные графы Дынкина[1].

Известно [2], что уравнение $\rho(n_1, \ldots, n_s) = 4$, которое часто встречается в приложениях, имеет следующие решения:

$$(2, 2, 2), \quad (1, 3, 3), \quad (1, 2, 5), \quad (1, 1, 1, 1).$$

Функцию ρ можно определить и на множестве $\mathbb{Q}^+ = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0 \}$, задавая ее той же формулой (1).

Как указал А. В. Ройтер, в терминах функции ρ могут быть переформулированы следующие утверждения [1].

Предложение 1. *Алгебра* $T_m(n_1, \ldots, n_m, n_{m+1})$ *конечномерна* (*имеет полиномиальный рост*), *если и только если* $\rho(n_1, \ldots, n_m, n_{m+1}) < 4$ ($\rho(n_1, \ldots \ldots, n_m, n_{m+1}) = 4$).

Предложение 2. *Если алгебра* $T_m(n_1, \ldots, n_m, n_{m+1})$ *конечномерна, то* $\dim T_m(n_1, \ldots, n_m, n_{m+1}) = \dfrac{4}{4 - \rho(n_1, \ldots, n_m, n_{m+1})}$.

На множестве образующих $e_1, \ldots, e_m$ алгебры $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ можно задать линейный порядок, который индуцирует порядок на множестве слов алфавита $\{ e_i \}$ (слова сначала сравниваются по длине, а при равенстве длин — лексикографически). *Базис Гребнера* идеала I — это множество $G(I) \subset I$ такое, что для любого $u \in I$ старшее слово u содержит в качестве подслова одно из старших слов элемента $G(I)$. Базис Гребнера называется *минимальным*, если никакое его собственное подмножество не является базисом Гребнера. Построение минимального базиса Гребнера алгоритмизировано [4], хотя число шагов такого алгоритма трудно оценимо (и не всегда конечно) и зависит от выбора порядка на множестве образующих $\{ e_i \}$.

Легко видеть, что, зная минимальный (конечный) базис Гребнера идеала I, соответствующего фактор-алгебре T_m / I, можно построить базис этой алгебры и, следовательно, определить ее размерность (рост).

Предложение 3. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *существует такое* $s > m$, *что для любого элемента* $v \in V_m$ *алгебры* $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ *с условием* $n_1 = n_2 \ldots = n_s = n$ *выполняется равенство* $v^{n+1} = 0$.

Доказательство. Положим $s = \dfrac{(m+n)!}{(m-1)!(n+1)!}$. Алгебра $T_m(n_1, n_2, \ldots \ldots, n_s) = T_m(n, n, \ldots, n)$ задается образующими $e_1, \ldots, e_m$ и соотношениями

[1] Функции ρ_i (см. [3]), которые могут быть определены как $\rho_i(1) = 1$, $\rho_i(n+1) = \dfrac{i+4}{i+4-\rho_i(n)}$, также имеют отношение к рассматриваемым вопросам, но в формулируемых ниже результатах явно не содержатся.

$$F_1 = 0, \ldots, F_s = 0, \tag{2}$$

где F_i, $i = \overline{1, s}$, — однородные некоммутативные полиномы от $e_1, \ldots, e_m$ степени $n + 1$.

Число коммутативных мономов от $e_1, \ldots, e_m$ степени $n + 1$ равно s. Каждому такому моному соответствует некоторое множество некоммутативных мономов от $e_1, \ldots, e_m$: это все мономы, в которые e_i входит столько раз, какова степень e_i в соответствующем коммутативном мономе. Обозначим через $y_1, \ldots, y_s$ суммы всех некоммутативных мономов, соответствующих каждому коммутативному моному от $e_1, \ldots, e_m$ степени $n + 1$. Тогда систему (2) можно представить в виде

$$\alpha_{11} y_1 + \ldots + \alpha_{1s} y_s = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{s1} y_1 + \ldots + \alpha_{ss} y_s = 0,$$

где $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{mm} = 1$; $\alpha_{ij} = 0$ при $i \le m$ и $i \ne j$; $\alpha_{ij} = \prod_{k=1}^{m} \lambda_{i-mk}^{d_{kj}}$ при $i > m$, где d_{kj} — степень, в которой e_j входит в коммутативный моном, соответствующий y_k.

Поскольку матрица $\|\alpha_{ij}\|$ невырождена над k, то $y_i = 0$ для всех $i = \overline{1, s}$. Отсюда для любого $v \in V_m$ $v^{n+1} = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_s y_s = 0$ $(\beta_i \in k)$, что и требовалось доказать.

Вектор $(m, n_1, \ldots, n_s)$, $m, n_i \in \mathbb{N}$, назовем *существенным,* если $T_m(n_1, \ldots, n_{s-1}) \not\cong T_m(n_1, \ldots, n_s)$. Из предложения 3 непосредственно следует, что для любого вектора $(m, n_1, \ldots, n_s)$ существует такое $t \ge s$, что вектор $(m, n'_1, \ldots, n'_t)$ $(n'_i = n_i$ при $1 \le i \le s$ и $n'_i = n_s$ при $s + 1 \le i \le t)$ будет несущественным.

Обозначим через $\mathbb{N}^t$ декартову t-ю степень множества $\mathbb{N}$. Пусть далее $U = \left\{ u \in \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^t \mid \text{ если } u = (n_1, \ldots, n_s), \text{ то } n_i \le n_j \text{ при } i < j \right\}$. Введем на U частичный порядок: пусть $u, u' \in U$, $u = (n_1, \ldots, n_s)$, $u' = (n'_1, \ldots, n'_{s'})$; тогда положим $u \ge u'$, если либо $s < s'$ и $n_i = n'_i$ при $i = \overline{1, s}$, либо $s = s'$ и $n_i \ge n'_i$ при $i = \overline{1, s}$. Тогда легко видеть, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если $u, u' \in U$, $u \ge u'$, то рост алгебры $T_m(u')$ меньше или равен росту алгебры $T_m(u)$.*

Автором был решен вопрос о конечномерности и росте алгебр $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ при $2 \le r \le 5$ путем вычисления минимального базиса Гребнера идеала $I(\psi_1, \ldots, \psi_s)$. Для формулировки полученных результатов нам понадобится числовая функция

$$\rho'(n_1, \ldots, n_{t+1}) = \max\left\{ \rho(n_1, \ldots, n_{t-1}, n_t - 1), \rho(n_1, \ldots, n_{t-1}, n_{t+1}/2) \right\}.$$

Пусть $2 \le r \le 5$.

Предложение 4. *При $m = 2$ алгебра $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ конечномерна, если $\rho(n_1, \ldots, n_{m+1}) < 4$. Если $m = 3$, то $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ конечномерна, если $r \ge 3$ и либо $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, либо $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_4 = n_5 = 2$.*

Предложение 5. *Пусть алгебра $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ не удовлетворяет условиям предложения* 4.

Алгебра $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ имеет полиномиальный рост в следующих случаях:

a) *при* $m = 2$, $r \geq 2$ *и при* $m = 3$, $r = 2$, *если либо* $\rho(n_1, \ldots, n_{m+1}) = 4$, *либо* $\rho'(n_1, \ldots, n_{m+2}) = 4$;

b) *при* $m = 3$, $r \geq 3$, *если* $\rho(n_1, \ldots, n_{m+2}) \leq 6$ (*в этом случае* $n_1 = n_2 = 1$);

c) *при* $m = 4$, $r = 3$ *и* $m = 5$, $r = 5$, *если* $n_1 = \ldots = n_s = 1$;

d) *при* $m = 4$, $r = 4$, *если* $n_1 = \ldots = n_{s-1} = 1$;

e) *при* $m = 4$, $r = 5$, *если* $n_1 = \ldots = n_{s-4} = 1$ *и* $\rho(n_{s-3}, n_{s-2}, n_{s-1}) < 4$.

Предложение 6. *Для* $m \geq 6$ *все* $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ *имеют экспоненциальный рост.*

При $m < 6$ *алгебра* $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ *имеет экспоненциальный рост, если для фиксированного* s $(n_1, \ldots, n_s) \geq (n_1', \ldots, n_s')$ (*в соответствии с определенным выше частичным порядком*), *где вектор* $(n_1', \ldots, n_s')$ *совпадает с одним из перечисленных ниже векторов*:

1) $m = 2$:

a) $r = 2$: (2, 3, 3, 3), (2, 2, 3, 5), (2, 2, 4, 4), (1, 4, 4, 4), (1, 3, 4, 7), (1, 3, 5, 5), (1, 2, 6, 11), (1, 2, 7, 7),

b) $r = 3$: (2, 3, 3, 3, 3), (2, 2, 3, 5, 5), (2, 2, 4, 4, 4), (1, 4, 4, 4, 4), (1, 3, 4, 7, 7), (1, 3, 5, 5, 5), (1, 2, 6, 11, 11), (1, 2, 7, 7, 7),

c) $r = 4$: (2, 3, 3, 3, 3, 3), (2, 2, 3, 5, 5, 5), (2, 2, 4, 4, 4, 4), (1, 4, 4, 4, 4, 4), (1, 3, 4, 7, 7, 7), (1, 3, 5, 5, 5, 5), (1, 2, 6, 11, 11, 11), (1, 2, 7, 7, 7, 7),

d) $r = 5$: (2, 3, 3, 3, 3, 3, 3), (2, 2, 3, 5, 5, 5, 5), (2, 2, 4, 4, 4, 4, 4), (1, 4, 4, 4, 4, 4, 4), (1, 3, 4, 7, 7, 7, 7), (1, 3, 5, 5, 5, 5, 5), (1, 2, 6, 11, 11, 11, 11), (1, 2, 7, 7, 7, 7, 7);

2) $m = 3$:

a) $r = 2$: (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 2, 3),

b) $r = 3$: (1, 2, 2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 3, 3), (1, 1, 1, 3, 4, 4), (1, 1, 1, 2, 6, 6),

c) $r = 4$: (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 3, 3, 3), (1, 1, 1, 3, 4, 4, 4), (1, 1, 1, 2, 6, 6, 6),

d) $r = 5$: (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3), (1, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 4), (1, 1, 1, 2, 6, 6, 6, 6);

3) $m = 4$:

a) $r = 2$: (1, 1, 1, 1, 1, 1),

b) $r = 3$: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2),

c) $r = 4$: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2),

d) $r = 5$: (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 5);

4) $m = 5$:

a) $r = 2$: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),

b) $r = 3$: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),

c) $r = 4$: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),

d) $r = 5$: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2).

Непосредственно были вычислены базисы Гребнера для следующих алгебр:

1) алгебры полиномиального роста:

$T_2(2, 2, 3, 4)$, $T_2(1, 3, 4, 6)$, $T_2(1, 2, 6, 10)$, $T_2(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $T_2(1, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $T_2(1, 2, 5, 5, 5, 5, 5)$,

$T_3(1, 1, 1, 1, 1)$, $T_3(1, 1, 1, 2, 2)$, $T_3(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $T_3(1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$,

$T_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $T_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$,

$T_5(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$;

2) алгебры экспоненциального роста:

$T_2(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $T_2(2, 2, 3, 5, 5, 5, 5)$, $T_2(2, 2, 4, 4, 4, 4, 4)$, $T_2(1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$, $T_2(1, 3, 5, 5, 5, 5, 5)$, $T_2(1, 2, 6, 11, 11, 11, 11)$, $T_2(1, 2, 7, 7, 7, 7, 7)$, $T_2(1, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$,

$T_3(1, 1, 2, 2, 2)$, $T_3(1, 1, 1, 2, 3)$, $T_3(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $T_3(1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$, $T_3(1, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 4)$, $T_3(1, 1, 1, 2, 6, 6, 6, 6)$,

$T_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$, $T_4(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$, $T_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3)$, $T_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 5)$,

$T_5(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$,

$T_6(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Конечномерность алгебры $T_3(1, 1, 1, 1, n_5, n_6)$, $n_5, n_6 > 1$, устанавливалась следующим образом. Вычислялся базис Гребнера алгебры $T_3(1, 1, 1, 1)$, заданной соотношениями $e_3^2 = 0$, $(\lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \lambda_{23}e_3)^2 = 0$, $(\lambda_{31}e_1 + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3)^2 = 0$, $(\lambda_{41}e_1 + \lambda_{42}e_2 + \lambda_{43}e_3)^2 = 0$, $\lambda_{ij} \in \Sigma$. Полученный базис Гребнера G содержит старшие слова e_2^2, e_3e_1, e_3e_2, e_3^2, $e_2e_1^2$. Если к соотношениям $g_i(e_1, e_2, e_3) = 0$, $g_i \in G$, добавить соотношения $e_1^{n_5} = 0$ и $e_1^{n_6} = 0$, то, вычисляя базис Гребнера этой дополненной системы соотношений, через некоторое число редукций и композиций получаем два элемента (нового базиса Гребнера) со старшими словами $\underbrace{e_2e_1\ldots}_{n_6 \text{ раз}}$ и $e_1^{n_5}$. Полученное множество старших слов есть подмножество старших слов базиса Гребнера алгебры $T_3(1, 1, 1, 1, n_5, n_6)$, и, как нетрудно видеть, эта алгебра конечномерна. Аналогично устанавливалась конечномерность (рост) для следующих алгебр: $T_3(1, 1, 1, 2, 2, n_6)$, $T_3(1, 1, 2, 2, 2, n_6)$, $T_3(1, 1, 1, 3, 3, n_6)$, $T_3(1, 1, 1, 2, 5, n_6)$, $T_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, n_9)$.

Утверждение о конечномерности (росте) для всех остальных алгебр, перечисленных в предложениях 4 – 6, следует из леммы 1.

Нетрудно проверить, что предложениями 4 – 6 исчерпываются все алгебры $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ для $2 \le r \le 5$.

Предложение 7. *Пусть* $\dim T_m(n_1, \ldots, n_s) < \infty$.

Тогда $\dim T_m(n_1, \ldots, n_s) = \dfrac{4}{4 - \rho(n_1, \ldots, n_{m+1})}$, *если и только если* $m = 2$ *и вектор* $(n_1, \ldots, n_s)$ *имеет вид либо* $(1, 1, n_3, n_4, \ldots, n_s)$ (n_3 *нечетно или* $n_3 \ne n_4$), *либо* $(1, 2, 2, n_4, \ldots, n_s)$ ($n_4 > 4$), *либо* $(1, 2, 3, n_4, \ldots, n_s)$ ($n_4 > 6$), *либо* $(1, 2, 4, n_4, \ldots, n_s)$ ($n_4 > 12$).

Из алгебры $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ с помощью матрицы $S = \| s_{ij} \|$ размера $r \times m$, $s_{ij} \in \mathbb{Q}$, можно получить алгебру $\tilde{T}_m(n_1, \ldots, n_s, S)$, задавая ее той же системой образующих $e_1, \ldots, e_m$ и соотношений $\psi_i = 0$, $i = \overline{1, s}$, беря при этом коэффициенты λ_{ij} при $i > m$ из матрицы S: $\lambda_{ij} = s_{ij}$ для всех $i = \overline{m+1, s}$, $j = \overline{1, m}$. Матрицу S назовем *подходящей* для алгебры $T_m(n_1, \ldots, n_s)$, если рост алгебры $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ равен росту алгебры $\tilde{T}_m(n_1, \ldots, n_s, S)$.

***Пример* 1.** Если $r = 1$, то для любой алгебры $T_m(n_1, \ldots, n_s)$ в качестве подходящей можно взять произвольную матрицу, состоящую из ненулевых элементов.

***Пример* 2.** Непосредственные вычисления показывают, что для алгебр с $2 \leq r \leq 5$ в качестве подходящей может быть выбрана матрица $S = \| s_{ij} \|$, в которой для всех i, j $s_{1j} = s_{i1} = 1$, а при $i \neq 1$ и $j \neq 1$ s_{ij} равно $(i + j - 3)$-му простому числу.

Базисы Гребнера были вычислены с помощью компьютерной программы Magma (http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/). В предварительных вычислениях мы пользовались также программами grobner для пакета GAP (http://www.win.tue.nl/~amc/pub/grobner/) и Groebner (http://www.imath.kiev.ua/~mellit/groebner/index.html), разработчику которой А Меллиту автор выражает благодарность.

Автор благодарит А. В. Ройтера за постановку задачи и полезные советы, касающиеся данной работы.

1. *Власенко М., Меллит А., Самойленко Ю.* Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, № 2.
2. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 6. – С. 18–54.
3. *Редчук И. К., Ройтер А. В.* Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции // Там же. – 2004. – **56**, № 6. – С. 796–809.
4. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. – 1990. – **57**. – С. 5–77.

Получено 01.10.2004