УДК 519.21

**А. Ю. Пилипенко** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# МЕРОЗНАЧНЫЕ ДИФФУЗИИ И КОНТИНУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ*

We consider continual systems of stochastic equations which describe the motion in a random medium of a family of interacting particles whose masses can vary in time. We assume that the motion of every particle depends not only on its location at the current time, but on the distribution of joint mass of particles.

We prove the theorem on the existence and uniqueness, the continuous dependence on the distribution of initial mass, and the Markov property. In addition, under some technical conditions, one can obtain the measure-valued diffusions introduced by A. V. Skorokhod in the form of the distribution of mass of such particle systems.

Розглянуто континуальні системи стохастичних рівнянь, що описують рух у випадковому середовищі сім'ї взаємодіючих частинок, маса яких може змінюватись із часом. Припускається, що рух кожної частинки залежить не лише від її положення в даний момент часу, але й від розподілу загальної маси частинок.

Доведено теорему існування та єдиності, неперервну залежність від розподілу початкової маси, марковську властивість.

Крім того, при певних технічних умовах мірозначні дифузії, введені А. В. Скороходом, можна одержати як розподіли маси таких систем частинок.

Теория марковских мерозначных процессов активно развивается на протяжении последних десятилетий. Это связано в первую очередь с разнообразием сфер ее применения в различных областях науки: биологии, генетике, химии, физике и т. д. (см., например, [1]).

Наиболее интересные примеры мерозначных процессов, как, например, процессы Флеминга – Виота, Доусона – Ватанабе, Маккина – Власова, обычно получаются следующим образом. Сначала рассматривается допредельная система, состоящая из конечного числа частиц. Затем делаются предположения о характере эволюции частиц: взаимодействии или независимости движения, возможности размножаться или умирать и т. п. После этого начальное количество частиц устремляется к бесконечности, а масса каждой частицы — к нулю. Вводя, если необходимо, определенную нормировку временной или пространственной переменной, доказывается слабая относительная компактность последовательности мерозначных процессов, а для пределов выписывается проблема мартингалов. Следует отметить, что доказательство единственности предела обычно является гораздо более сложной задачей, чем доказательство существования (см., например, [1, 2]).

Заметим также, что процессы, полученные как решения проблемы мартингалов, определены, вообще говоря, на „каком-то" вероятностном пространстве. Кроме того, исследуя лишь эволюцию мер, не всегда удается связать изменение массы с движением частиц на фазовом пространстве, наличием течения и т. п. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий детерминированный пример [3].

Пусть фазовое пространство $X = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим две динамические системы: $\varphi_t^1 = id$ — тождественное отображение, $\varphi_t^2$ — поворот на угол $t$ вокруг начала координат. Пусть $\mu_t^j = \mu \circ \left(\varphi_t^j\right)^{-1}$, $j = 1, 2,$ — мерозначный процесс, получающийся переносом начальной массы $\mu$ потоком $\varphi_t^j$. Тогда если $\mu = N(0,1)$ — гауссовская мера с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, то $\mu_t^1 = \mu_t^2 = \mu$, т. е. распределение общей массы остается по-

* Частично поддержана Министерством образования и науки Украины (проект GP/F8/0086).

стоянным, хотя оно порождается абсолютно различными процессами массопереноса.

Подход к изучению процессов массопереноса совместно с исследованием движения взаимодействующих частиц в случайной среде детально рассмотрен в [3, 4].

В данной работе рассматриваются мерозначные диффузии, допредельной моделью для которых является движение взаимодействующих частиц, масса которых может изменяться со временем. А. В. Скороходом [5, 6] была предложена следующая модель.

Предположим, что в точках $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ в начальный момент времени $t = 0$ находятся частицы масс $c_1, \ldots, c_n$ соответственно. Пусть $x_t^j$, $c_t^j$ — положение и масса $j$-й частицы в момент времени $t \geq 0$. Тогда $\mu_t = \sum_j c_t^j \delta_{x_t^j}$ — распределение общей массы в момент $t$. Предположим, что изменение массы и веса описывается следующей системой взаимодействующих стохастических уравнений:

$$dx_t^j = a_0\left(x_t^j, \mu_t\right)dt + \sum_k a_k\left(x_t^j, \mu_t\right)dw_k(t), \tag{1}$$

$$dc_t^j = \left(b_0\left(x_t^j, \mu_t\right)dt + \sum_k b_k\left(x_t^j, \mu_t\right)dw_k(t)\right)c_t^j, \tag{2}$$

$$\mu_t = \sum_j c_t^j \delta_{x_t^j}, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x_0^j = u_j \in \mathbb{R}^d, \quad c_0^j = c_j \geq 0, \tag{4}$$

где $\{w_k(t)\}$ — независимые винеровские процессы.

При некоторых естественных условиях гладкости и ограниченности коэффициентов уравнений (1) – (4) в [5, 6] была доказана слабая относительная компактность мерозначных случайных процессов $\mu_t^n$ в случае, когда имеет место слабая сходимость начальных распределений $\left\{\mu_0^n\right\}_{n \geq 1}$ к некоторой конечной мере, а для возможных пределов была записана проблема мартингалов.

***Замечание* 1.** Случай $b_k \equiv 0$, т. е. когда масса каждой частицы остается постоянной, рассмотрен в [3].

Основным объектом, рассматриваемым в данной статье, является континуальная система стохастических уравнений

$$dx_t(u) = a_0(x_t(u), \mu_t)dt + \sum_{k=1}^n a_k(x_t(u), \mu_t)dw_k(t), \tag{5}$$

$$d\rho_t(u) = \left(b_0(x_t(u), \mu_t)dt + \sum_{k=1}^n b_k(x_t(u), \mu_t)dw_k(t)\right)\rho_t(u), \tag{6}$$

$$\mu_t = (\rho_t \mu) \circ x_t^{-1}, \tag{7}$$

$$x_0(u) = u, \quad \rho_0(u) = 1, \tag{8}$$

где $\mu$ — произвольная конечная мера. Здесь под $\rho_t \mu$ понимается мера, имеющая плотность Радона – Никодима $\rho_t$ относительно $\mu$; $(\rho_t \mu) \circ x_t^{-1}$ — образ $\rho_t \mu$ при отображении $x_t$.

В частном случае, когда начальное распределение является дискретной мерой: $\mu = \sum_{j=1}^{m} c_j \delta_{u_j}$, процессы $x_t^j := x_t(u_j)$, $c_t^j := \rho_t(u_j)$ удовлетворяют уравнениям (1) – (4), причем $\sum_{j=1}^{m} c_t^j(t)\delta_{x_t^j} = (\rho_t\mu) \circ x_t^{-1}$.

В работе будет доказано существование и единственность сильного решения системы (5) – (8), а также непрерывная зависимость от начальной меры и марковское свойство решения. Тем самым процесс $\mu_t$, полученный при решении системы (5) – (8), будет мерозначной диффузией в смысле определения из [5, 6].

**1. Теорема существования и единственности.** Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство конечных мер на $\mathbb{R}^d$ с топологией слабой сходимости, т. е. последовательность $\{\mu_n, n \geq 1\} \subset \mathfrak{M}$ сходится к $\mu \in \mathfrak{M}$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ имеет место сходимость

$$\langle \mu_n, f \rangle := \int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu, \quad n \to \infty.$$

Пусть $a_k, b_k\colon \mathbb{R}^d \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$, $\mu \in \mathfrak{M}$, $\{w_k(t), k = \overline{1, n}\}$ — независимые винеровские процессы.

**Определение 1.** *Пара* $(x, \rho)$ *называется решением системы* (1) – (4), *если для любого* $t \in [0, T]$ *процесс* $(x, \rho) = (x_s(u, w), \rho_s(u, w))$, $s \in [0, t]$, $u \in \mathbb{R}^d$, $w \in \Omega$, *измерим относительно* $\sigma$*-алгебры* $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \times \mathcal{F}_t$ *и выполняется интегральный аналог* (1) – (4). *Здесь* $\mathcal{B}_{[0,t]}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ *— борелевские* $\sigma$*-алгебры на* $[0, t]$ *и* $\mathbb{R}^d$ *соответственно и* $\mathcal{F}_t = \sigma(w_k(s), s \leq t, k = \overline{1, n})$.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество функций из $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, ограниченных единицей и удовлетворяющих условию Липшица с константой, не превышающей 1.

**Теорема 1.** *Предположим, что функции* $a_k$, $b_k$ *удовлетворяют условиям*:

1) $a_k$, $b_k$, $k = \overline{0, m}$, *ограничены*;

2) *существует* $L > 0$ *такое, что*

$$\forall k = \overline{0, m} \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}:$$

$$\left|a_k(u_1, \mu_1) - a_k(u_2, \mu_2)\right| + \left|b_k(u_1, \mu_1) - b_k(u_2, \mu_2)\right| \leq$$

$$\leq L\left(\sup_{k \in \mathfrak{K}} \left|\int K(u_1, v)\mu_1(dv) - \int K(u_2, v)\mu_2(dv)\right| + \left|u_1 - u_2\right|\right). \tag{9}$$

*Тогда существует единственное решение системы* (5) – (8).

***Замечание 2.*** Неравенство (9) является, вообще говоря, более общим, чем

$$\left|a_k(u_1, \mu_1) - a_k(u_2, \mu_2)\right| + \left|b_k(u_1, \mu_1) - b_k(u_2, \mu_2)\right| \leq$$

$$\leq L\left(\sup_{f \in \mathfrak{F}} \left|\int f(v)\mu_1(dv) - \int f(v)\mu_2(dv)\right| + \left|u_1 - u_2\right|\right), \tag{9$'$}$$

где $\mathfrak{F}$ — множество функций из $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, ограниченных единицей и удовлетворяющих условию Липшица с константой, не превышающей 1. Интегральные функционалы вида $a_k(u, \mu) = \int K(u, v)\mu(dv)$ с $K \in \mathfrak{K}$ могут не удовлетворять (9′), но удовлетворяют неравенству (9).

В п. 2 мы покажем, что если процессы $x_t(u)$, $\rho_t(u)$ являются решением системы (4) – (6), то они имеют непрерывную модификацию по $t$, $u$. Поэтому далее (в пп. 3 – 6) будем рассматривать $x_t(\cdot)$, $\rho_t(\cdot)$, $t \in [0; T]$, как случайные процессы со значениями в пространствах $C(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $C(\mathbb{R}^d)$ соответственно, где топологией является топология равномерной сходимости на компактных множествах.

Доказательство теоремы разделим на два этапа — потраекторная единственность (п. 3) и слабое существование (п. 4). Тогда существование сильного решения будет следовать из теоремы Ямада – Ватанабе [7] (доказательство соответствующей теоремы было приведено для стохастических дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$, однако оно почти дословно переносится на уравнения (5) – (8)).

Под потраекторной единственностью решения системы (5) – (8) понимается следующее.

**Определение 2.** *Система* (5) – (8) *имеет свойство потраекторной единственности, если из того, что* $(x, \rho)$, $(\bar{x}, \bar{\rho})$ *являются решениями системы* (5) – (8), *следует, что*

$$P\Big(\forall t \in [0, T]\ \forall u \in \mathbb{R}^d\colon x_t(u) = \bar{x}_t(u),\ \rho_t(u) = \bar{\rho}_t(u)\Big) = 1.$$

Отметим, что из непрерывности $(x, \rho)$ по $t, u$ следует, что данное определение эквивалентно тому, что для любых $t \in [0, T]$, $u \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$x_t(u) = \bar{x}_t(u), \qquad \rho_t(u) = \bar{\rho}_t(u) \quad \text{п. н.}$$

**2. Вспомогательные утверждения.** В статье используется множество констант $C_1, C_2, \ldots$. Для сокращения обозначений будем опускать индексы и записывать вместо этого $C.$, понимая при этом, вообще говоря, различные константы.

Пусть $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$, $\rho_1, \rho_2\colon \mathbb{R}^d \mapsto [0, \infty)$, $x_1, x_2\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $v_1 = (\rho_1\mu) \circ$ $\circ\, x_1^{-1}$, $v_2 = (\rho_2\mu) \circ x_2^{-1}$. Тогда из (9) следует оценка

$$\Big|a_k(u_1, v_1) - a_k(u_2, v_2)\Big| \le$$

$$\le L\left(\Big|u_1 - u_2\Big| + \sup_{K \in \mathfrak{K}} \left|\int (K(u_1, x_1(v))\rho_1(v) - K(u_2, x_2(v))\rho_2(v))\mu(dv)\right|\right) \le$$

$$\le C.\left(\left(\Big|u_1 - u_2\Big| + \left(\int |x_1 - x_2|^2\, d\mu\right)^{1/2}\right)\left(1 + \left(\int \rho_1^2 d\mu\right)^{1/2}\right) + \left(\int (\rho_1 - \rho_2)^2\, d\mu\right)^{1/2}\right). \quad (10)$$

В частности, если $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $x_1 = x_2$, то

$$\Big|a_k(u_1, v) - a_k(u_2, v)\Big| \le C.\Big|u_1 - u_2\Big|\left(1 + \left(\int \rho^2 d\mu\right)^{1/2}\right). \quad (11)$$

Используя ограниченность функций $a_k$, $b_k$, несложно получить следующие априорные моментные оценки для процессов $\rho_t(u)$, $x_t(u)$ (см. [8], гл. 4.5).

**Лемма 1.** *Пусть* $\rho_t(u)$, $x_t(u)$ *— решения уравнений* (1) – (4). *Тогда для любого* $p > 1$ *существует* $K_p > 0$, *не зависящее от начальной меры* $\mu$, *такое, что*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^d} \mathrm{E} \sup_{t \in [0, T]} \Big(\rho_t(u)^p + |x_t(u) - u|^p\Big) \le K_p.$$

***Замечание* 3.** Случайный процесс $\rho_t(u)$, $t \geq 0$, удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению с положительным начальным условием. Поэтому $\rho_t(u) > 0$ п. н.

Обозначим

$$\tau_m = \inf\left\{t \geq 0: \left(\int \left(1 + \rho_t^2(v)\right)\mu(dv)\right)^{1/2} \geq m\right\},$$

$$x_t^m(u) = x_{t \wedge \tau_m}(u), \quad \rho_t^m(u) = \rho_{t \wedge \tau_m}(u).$$

***Замечание* 4.** Из леммы 1 следует, что $\tau_m \uparrow \infty$, $m \to \infty$, почти наверное.

Из (7), (8) следует, что $x_t^m$, $\rho_t^m$ удовлетворяют системе уравнений Ито

$$dx_t^m(u) = a_0^m\left(x_t^m(u), t\right)dt + \sum_{k=1}^n a_k^m\left(x_t^m(u), t\right)dw_k(t),$$

$$d\rho_t^m(u) = \left(b_0^m\left(x_t^m(u), t\right)dt + \sum_{k=1}^n b_k^m\left(x_t^m(u), t\right)dw_k(t)\right)\rho_t^m(u)$$

с ограниченными коэффициентами $a_k^m(u,t) = a_k(u, \mu_t)\,\mathbb{1}_{\{t \leq \tau_m\}}$, $b_k^m(u,t) = b_k(u, \mu_t)\,\mathbb{1}_{\{t \leq \tau_m\}}$, удовлетворяющими условию Липшица (с константой, зависящей только от $m$).

**Лемма 2.** $\forall p > 1$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists L = L(m, p)$ $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathrm{E}\left|x_{t_1}^m(u_1) - x_{t_2}^m(u_2)\right|^p \leq L\left(\left|t_1 - t_2\right|^{p/2} + \left|u_1 - u_2\right|^p\right).$$

Доказательство леммы 2 стандартно (см., например, [8], гл. 4).

Из теоремы Колмогорова следует непрерывность по $(t, u)$ процессов $x_t^m(u)$, $\rho_t^m(u)$. Из замечания 4 вытекает существование непрерывной модификации и для процессов $x_t(u)$, $\rho_t(u)$. Несложно также заметить, что если $\bar{x}_t(u)$, $\bar{\rho}_t(u)$ — эта модификация, то она также удовлетворяет системе (5) – (8), причем с вероятностью 1 имеет место равенство $(\rho_t\mu) \circ x_t^{-1} = (\bar{\rho}_t\mu) \circ \bar{x}_t^{-1}$, $t \in [0, T]$. Поэтому далее будем предполагать, что у пары $(x, \rho)$ уже выбрана непрерывная по $(t, u)$ модификация.

**Лемма 3.** $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \sup_u \frac{|x_t(u) - u| + \rho_t(u)}{1 + |u|^\varepsilon} < \infty\right) = 1. \tag{12}$$

Равенство (12) получается аналогично соответствующему утверждению для производной по начальным данным решения стохастического уравнения (см. [8], гл. 4).

**3. Доказательство потраекторной единственности решения.** Пусть $(x_t, \rho_t)$, $(\bar{x}_t, \bar{\rho}_t)$ — два решения (1). Введем момент остановки

$$\tau_n = \inf\left\{t \geq 0: \left(\int \left(1 + \rho_t^2(v)\right)\mu(dv)\right)^{1/2} \geq n\right\}.$$

Из леммы 1 вытекает, что $\tau_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$ п. н. Тогда из формулы Ито и оценок (10), (11) следует, что для любого $t \geq 0$

$$\left|x_{t \wedge \tau_n}(u) - \bar{x}_{t \wedge \tau_n}(u)\right|^2\left(1 + \rho_{t \wedge \tau_n}^2(u)\right) \leq$$

$$\leq L.\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\Big(\Big(|x_s(u)-\bar{x}_s(u)|^2+\int|x_s(v)-\bar{x}_s(v)|^2\mu(dv)\Big)\Big(1+\int\rho_s^2(v)\mu(dv)\Big)+$$

$$+\int|\rho_s(v)-\bar{\rho}_s(v)|^2\mu(dv)\Big)\Big(1+\rho_s^2(u)\Big)ds \;+\; M_t(u), \tag{13}$$

где $M_t(u)$ — некоторый мартингал (по $t$), причем

$$\sup_u \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}|M_t(u)|^2 \;<\; \infty,$$

$$\mathrm{E}M_t(u) \;=\; 0.$$

Аналогично, учитывая определение $\tau_n$, получаем следующее неравенство с $\mathrm{E}N_t(u)=0$:

$$\Big|\rho_{t\wedge\tau_n}(u)-\bar{\rho}_{t\wedge\tau_n}(u)\Big|^2 \;\leq$$

$$\leq L.\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\Big(|\rho_s(u)-\bar{\rho}_s(u)|^2+\Big(1+\rho_s^2(u)\Big)\times$$

$$\times\Big(|x_s(u)-\bar{x}_s(u)|^2+\int|x_s(v)-\bar{x}_s(v)|^2\Big(1+\rho_s^2(v)\Big)\mu(dv)\Big)\Big)ds \;+\; N_t(u). \tag{14}$$

Возьмем математическое ожидание левой и правой частей (13), а затем проинтегрируем по $\mu(du)$. Напомним, что $\int\Big(1+\rho^2_{s\wedge\tau_n}(u)\Big)\mu(du)\leq n$. Тогда после замены $u$ на $v$ в интегралах получим следующее неравенство (вообще говоря, с другой константой $L. = L.(n)$):

$$\int\mathrm{E}\Big|x_{t\wedge\tau_n}(v)-\bar{x}_{t\wedge\tau_n}(v)\Big|^2\rho^2_{t\wedge\tau_n}(v)\mu(dv) \;\leq$$

$$\leq L.\left(2\int\mathrm{E}\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}|x_s(v)-\bar{x}_s(v)|^2\rho_s^2(v)\mu(dv)ds+\right.$$

$$\left.+\int\mathrm{E}\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}|\rho_s(v)-\bar{\rho}_s(v)|^2\mu(dv)ds\right). \;\leq$$

$$\leq L.\left(2\int\limits_0^t\int\mathrm{E}\Big|x_{s\wedge\tau_n}(v)-\bar{x}_{s\wedge\tau_n}(v)\Big|^2\rho^2_{s\wedge\tau_n}(v)\mu(dv)ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t\int\mathrm{E}\Big|\rho_{s\wedge\tau_n}(v)-\bar{\rho}_{s\wedge\tau_n}(v)\Big|^2\mu(dv)ds\right). \tag{15}$$

Существование интегралов в обеих частях неравенства следует из леммы 1.

Взяв математическое ожидание в (14), а затем проинтегрировав по $\mu(du)$, аналогично (15) будем иметь следующее неравенство:

$$\int\mathrm{E}\Big|\rho_{t\wedge\tau_n}(v)-\bar{\rho}_{t\wedge\tau_n}(v)\Big|^2\mu(dv) \;\leq$$

$$\leq L.\left(\int\limits_0^t\int\mathrm{E}\Big|\rho_{s\wedge\tau_n}(v)-\bar{\rho}_{s\wedge\tau_n}(v)\Big|^2\mu(dv)ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t\int\mathrm{E}\Big|x_{s\wedge\tau_n}(v)-\bar{x}_{s\wedge\tau_n}(v)\Big|^2\Big(1+\rho_{s\wedge\tau_n}(v)^2\Big)\mu(dv)ds\right). \tag{16}$$

Применяя лемму Гроноулла к (15), (16), для любого $t \in [0, T]$ получаем равенство $x_{t\wedge\tau_n}(v) = \bar{x}_{t\wedge\tau_n}(v)$, $\rho_{t\wedge\sigma_n}(v) = \bar{\rho}_{t\wedge\tau_n}(v)$ для $\mu$-п. в. $v \in \mathbb{R}^d$ и п. в. $\omega \in \Omega$. Поскольку $\tau_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ п. н., то для любого $t \in [0, T]$

$$x_t(v) = \bar{x}_t(v), \qquad \rho_t(v) = \bar{\rho}_t(v) \quad \mu\text{-п. н.}$$

Подставим данные равенства в (13), (14) и возьмем математическое ожидание. Затем, применив лемму Гроноулла, получим

$$\forall\, t \in [0, T] \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^d\colon\ x_t(u) = \bar{x}_t(u), \quad \rho_t(u) = \bar{\rho}_t(u) \quad P\text{-п. н.}$$

**4. Слабое существование.** Пусть $\mu^m = \sum_{k=1}^m c_{k,m}\delta_{u_{k,m}}$, $m \geq 1$, — последовательность дискретных мер, слабо сходящихся к мере $\mu$.

Обозначим через $x_t^m$, $\rho_t^m$, $\mu_t^m$ решение системы (5) – (8) с начальным условием $\mu^m$ вместо $\mu$.

Отметим, во-первых, что решения соответствующих уравнений существуют и единственны. Действительно, из предположений о коэффициентах $a_i$, $b_i$ несложно вывести, что функции

$$(u_1, \ldots, u_m, \rho_1, \ldots, \rho_m) \mapsto a_i\left(u_k, \sum_{j=1}^m c_j\rho_j\delta_{u_j}\right),$$

$$(u_1, \ldots, u_m, \rho_1, \ldots, \rho_m) \mapsto b_i\left(u_k, \sum_{j=1}^m c_j\rho_j\delta_{u_j}\right)$$

удовлетворяют условию линейного роста и локальному условию Липшица.

***Замечание* 5.** Здесь, для сокращения обозначений, $c_{k,m}$, $u_{k,m}$ заменены на $c_k$, $u_k$ соответственно.

Таким образом, система

$$dx_t^m(u_k) = a_0\left(x_t^m(u_k), \sum_{j=1}^m c_j\rho_t^m(u_j)\delta_{x_t^m(u_j)}\right)dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i\left(x_t^m(u_k), \sum_{j=1}^m c_j\rho_t^m(u_j)\delta_{x_t^m(u_j)}\right)dw_i(t),$$

$$d\rho_t^m(u_k) = \left(b_0\left(x_t^m(u_k), \sum_{j=1}^m c_j\,\rho_t^m(u_j)\delta_{x_t^m(u_j)}\right)dt +\right.$$

$$\left.+ \sum_{i=1}^n b_i\left(x_t^m(u_k), \sum_{j=1}^m c_j\,\rho_t^m(u_j)\delta_{x_t^m(u_j)}\right)dw_i(t)\right)\rho_t^m(u_k),$$

$$x_0^m(u_k) = u_k, \qquad \rho_0^m(u_k) = 1$$

имеет единственное решение.

Для $u \neq u_k$ получим $x_t^m(u)$ из уравнения

$$dx_t^m(u) = a_0\left(x_t^m(u), \sum_{j=1}^m c_j\,\rho_t^m(u_j)\delta_{x_t^m(u_j)}\right)dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i\left(x_t^m(u), \sum_{j=1}^m c_j\,\rho_t^m(u_j)\delta_{x_t^m(u_j)}\right)dw_i(t).$$

Уравнение для $\rho_t^m(u)$ записывается аналогично.

Заметим, что построенные указанным образом $x^m$, $\rho^m$ являются единственным решением системы (5) – (8) с начальным условием $\mu_0^m = \sum_{k=1}^m c_{k,m}\delta_{u_{k,m}}$.

Аналогично леммам 1 и 2 имеем следующие неравенства:

$$\forall p>1 \quad \forall n\geq 1 \quad \exists L_n \quad \forall m \quad \forall t_1,\, t_2\in[0,T] \quad \forall u_1,\, u_2\in\mathbb{R}^d:$$

$$\mathrm{E}\left|x^m_{t_1\wedge\tau_{n,m}}(u_1)-x^m_{t_2\wedge\tau_{n,m}}(u_2)\right|^p+\left|\rho^m_{t_1\wedge\tau_{n,m}}(u_1)-\rho^m_{t_2\wedge\tau_{n,m}}(u_2)\right|^p\leq$$
$$\leq L_n\left(|t_1-t_2|^{p/2}+|u_1-u_2|^p\right), \tag{17}$$
$$\forall p>1 \quad \exists C:\quad \sup_m\sup_{u\in\mathbb{R}^d}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\left|x_t^m(u)-u\right|^p+\left|\rho_t^m(u)\right|^p\right) < C,$$

где

$$\tau_{n,m} = \inf\left\{t\geq 0:\ \left(\int\left(1+\left(\rho_t^m(v)\right)^2\mu^m(dv)\right)\right)^{1/2}\geq n\right\}.$$

Из теоремы 1.4.7 [8] следует, что для любого $n\in\mathbb{N}$ последовательность случайных полей $\left\{\left(x^m_{\cdot\wedge\tau_{n,m}}(\cdot),\ \rho^m_{\cdot\wedge\tau_{n,m}}(\cdot)\right),\ m\geq 1\right\}$ слабо относительно компактна в пространстве $C\left([0,T];\ C\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)\times C\left([0,T],\ C\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, где пространства $C\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)$, $C\left(\mathbb{R}^d\right)$ наделены топологией равномерной сходимости на компактных множествах.

Из (17) следует, что

$$\forall c>0:\quad \lim_{n\to\infty}\sup_m \mathrm{P}\left\{\tau_{n,m}<c\right\} = 0.$$

Поэтому последовательность $\left\{\left(x^m_\cdot(\cdot),\ \rho^m_\cdot(\cdot)\right), m\geq 1\right\}$ также слабо относительно компактна.

Покажем, что последовательность мерозначных процессов $\left\{\mu_t^m,\ m\geq 1\right\}$ слабо относительно компактна в $C([0,T],\ \mathfrak{M})$. Для этого достаточно проверить [1], что:

1) для любой ограниченной липшицевой функции $f$ последовательность случайных процессов $\left\langle\mu_t^m, f\right\rangle = \int f\,d\mu_t^m$, $m\geq 1$, слабо относительно компактна в $C([0,T])$;

2) для любого $\varepsilon>0$

$$\sup_m \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\mu_t^m\{\|u\|\geq n\}\geq\varepsilon\right)\to 0,\quad n\to\infty. \tag{18}$$

Условие 1 несложно проверить, если заметить, что $\left\langle\mu_t^m, f\right\rangle = \int f\left(x_t^m(u)\right)\times$ $\times\,\rho_t^m(u)\,\mu^m(du)$, а затем воспользоваться рассуждениями, приведшими к слабой компактности потоков $\left(x^m,\rho^m\right)$.

Проверим (18):

$$\mathrm{P}\left(\sup_t\mu_t^m\{|u|\geq n\}\geq\varepsilon\right)\leq$$
$$\leq \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\sup_{|u|\leq\sqrt{n}}|x_t(u)|\geq\frac{n}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\int_{|u|>\sqrt{n}}\rho_t^m(u)\mu^m(du)\geq\varepsilon\right).$$

Согласно лемме 3 первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$. Для оценки второго слагаемого применим неравенство Чебышева и лемму 1:

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} \int_{|u|>\sqrt{n}} \rho_t^m(u)\mu^m(du) \geq \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-1}\mu_m(u\colon |u|>\sqrt{n}) \sup_u E \sup_{t\in[0,T]} \rho_t^m(u) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Таким образом, слабая относительная компактность доказана.

Взяв, в случае необходимости, подпоследовательность, будем считать, что $(x_\cdot^m, \rho_\cdot^m, \mu_\cdot^m)$ слабо сходится при $m\to\infty$ к предельному процессу $(x_\cdot, \rho_\cdot, \mu_\cdot)$ (определенному, вообще говоря, на другом вероятностном пространстве).

Докажем, что

$$P\left(\forall t\in[0,T]\colon \mu_t = (\rho_t\mu)\circ x_t^{-1}\right) = 1. \tag{19}$$

Несложно видеть, что $(\rho_t\mu)\circ x_t^{-1}$ — непрерывный мерозначный процесс. Поэтому для проверки (19) достаточно доказать, что

$$\forall t\in[0,T]\colon \quad P\left(\mu_t = (\rho_t\mu)\circ x_t^{-1}\right) = 1.$$

В свою очередь для этого достаточно, чтобы для любого $k\geq 1$ и любой непрерывной финитной функции $f\colon \mathbb{R}^{kd}\to\mathbb{R}$ имело место равенство математических ожиданий:

$$E\int_{\mathbb{R}^{kd}} f(x_t(u_1),\ldots,x_t(u_k))\rho_t(u_1)\ldots\rho_t(u_k)\mu(du_1)\ldots\mu(du_k) =$$

$$= E\int_{\mathbb{R}^{kd}} f(u_1,\ldots,u_k)\mu_t(du_1)\ldots\mu_t(du_k).$$

Без потери общности [9] можно считать, что процессы $(x_t^m, \rho_t^m, \mu_t^m)$ и $(x_t, \rho_t, \mu_t)$ заданы на одном вероятностном пространстве и имеет место сходимость п. н. Для простоты рассмотрим только случай $k=1$.

Для любого $m\geq 1$ имеем $\mu_t^m = \left(\rho_t^m\mu^m\right)\circ\left(x_t^m\right)^{-1}$ и, следовательно,

$$E\int f\left(x_t^m(u)\right)\rho_t^m(u)\mu^m(du) = E\int f(u)\mu_t^m(du). \tag{20}$$

Для п. в. $\omega$ имеет место сходимость

$$\int f(u)\mu_t^m(du) \to \int f(u)\mu_t(du).$$

Кроме того, имеем равномерную интегрируемость последовательности случайных величин $\left\{\int f\,d\mu_t^m,\ m\geq 1\right\}$, так как

$$\sup_m E\left(\int f\,d\mu_t^m\right)^2 \leq \sup_u |f(u)|^2 \sup_m E\left(\int \rho_t^m\,d\mu_t^m\right)^2 \leq$$

$$\leq \sup_u |f(u)|^2 \sup_m \sup_u E\left|\rho_t^m(u)\right|^2 \sup_m \mu^m\left(\mathbb{R}^d\right) < \infty.$$

Поэтому правая часть (20) сходится к $E\int f\,d\mu_t$. Рассмотрим левую часть (20). Несложно проверить равномерную интегрируемость последовательности

$\left\{\mathrm{E}\int f\left(x_t^m\right)\rho_t^m d\mu^m,\, m\geq 1\right\}$. Следовательно, достаточно проверить сходимость по вероятности следующих интегралов:

$$\int f\left(x_t^m\right)\rho_t^m d\mu_t^m \;\to\; \int f(x_t)\rho_t d\mu, \quad m\to\infty. \tag{21}$$

Напомним, что почти наверное имеет место равномерная сходимость на компактах:

$$x_t^m \;\to\; x_t \quad \text{и} \quad \rho_t^m \;\to\; \rho_t \quad \text{при} \quad m\to\infty. \tag{22}$$

Пусть $U\subset\mathbb{R}^d$ — некоторый компакт. Тогда

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(x_t^m\right)\rho_t^m\, d\mu^m - \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x_t)\rho_t\, d\mu\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x_t)\rho_t\, d\mu - \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x_t)\rho_t\, d\mu^m\right| + \int\limits_U \left|f(x_t)\rho_t - f\left(x_t^m\right)\rho_t^m\right| d\mu^m +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus U} \left(|f(x_t)\rho_t| + \left|f\left(x_t^m\right)\rho_t^m\right|\right) d\mu^m. \tag{23}$$

Первое слагаемое в правой части (23) сходится к нулю с вероятностью 1 из-за слабой сходимости мер, непреривности $x_t$, $\rho_t$ по параметру $u$ и леммы 1. Второе слагаемое не превышает $\sup_{u\in U}\left(|f(x_t(u))\rho_t(u) - f\left(x_t^m(u)\right)\rho_t^m(u)|\right)\sup_m \mu^m(U)$ и, следовательно, сходится к нулю почти наверное для любого фиксированного компакта $U$.

Выбором $U$ можно также сделать как угодно малым выражение

$$\sup_m \mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus U} \left(|f(x_t)\rho_t| + \left|f\left(x_t^m\right)\rho_t^m\right|\right) d\mu^m \;\leq\; C\sup_m \mu^m\left(\mathbb{R}^d\setminus U\right).$$

Из изложенного выше следует сходимость (21), и, значит, соотношение (19) является истинным.

Аналогично рассуждениям, описанным выше, несложно доказать слабую относительную компактность последовательности

$$\zeta_m = \Bigg(x_\cdot^m(\cdot), \rho_\cdot^m(\cdot), \mu_\cdot^m(\cdot), \int_0^\cdot a_k\left(x_s^m(\cdot), \mu_s^m\right) ds,$$

$$\int_0^\cdot b_k\left(x_s^m(\cdot), \mu_s^m\right)\rho_s^m\, dw_k(s),\; w_k(\cdot),\; k=\overline{0,n},\; m\geq 1\Bigg),$$

где обозначено $w_0(t)\equiv t$.

Переходя к подпоследовательностям, если необходимо, и используя теорему Скорохода [9], выбираем единое вероятностное пространство и такую последовательность

$$\tilde\zeta_m = \Bigg(\tilde x_\cdot^m, \tilde\rho_\cdot^m, \tilde\mu_\cdot^m, \int_0^\cdot a_k\left(\tilde x_s^m(\cdot), \tilde\mu_s^m\right) ds,$$

$$\int_0^\cdot b_k\left(\tilde x_s^m(\cdot), \tilde\mu_s^m\right) dw_k(s),\; \tilde w_k(\cdot),\; k=\overline{0,n},\; m\geq 1\Bigg)$$

на нем, что $\tilde{\zeta}_m \overset{\mathfrak{D}}{=} \zeta_m$, которая сходится п. н. к некоторому элементу

$$\tilde{\zeta} = \left(\tilde{x}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu}, \alpha_k, \beta_k, \tilde{w}_k,\ k = \overline{0, n}\right),$$

где $\tilde{w}_k, k = \overline{1, n}$, — винеровские процессы, причем $\tilde{\mu} = \left(\tilde{\rho}\mu^0\right) \circ \tilde{x}^{-1}$, как было доказано ранее.

Аналогично теореме 1 [10] (гл. 5, § 2) можно убедиться, что

$$\alpha_t^k(u) = \int_0^t a_k\left(\tilde{x}_s(u), \tilde{\mu}_s\right) d\tilde{w}_k(s),$$

$$\beta_t^k(u) = \int_0^t b_k\left(\tilde{x}_s(u), \tilde{\mu}_s\right) \rho_s(u) d\tilde{w}_k(s)$$

и $\tilde{x}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{w}_k$ связаны соотношениями (5) – (8). Таким образом, слабое существование, а с ним и теорема 1 доказаны.

***Замечание* 6.** Для существования слабого решения условие (9) теоремы 1 можно ослабить. А именно, достаточно требовать вместо него непрерывность функций $a_k$, $b_k$ по $(u, \mu)$ и липшицевость по первому аргументу:

$$\exists K \quad \exists L \quad \forall k = \overline{0, m} \quad \forall u_1,\ u_2 \in \mathbb{R}^d \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}:$$

$$\left|a_k(u_1, \mu) - a_k(u_2, \mu)\right| + \left|b_k(u_1, \mu) - b_k(u_2, \mu)\right| \leq L|u_1 - u_2|.$$

При аналогичных условиях теорема существования слабого решения для уравнений с взаимодействием, но без изменения массы частиц, т. е. $b_k \equiv 0$, доказана в [11].

**5. Непрерывная зависимость от начальной меры.** В данном пункте устанавливается непрерывная зависимость решения системы (5) – (8) от начальной меры $\mu$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mu^m \to \mu$, $m \to \infty$, *в* $\mathfrak{M}$. *Обозначим через* $\left(x^m, \rho^m\right)$ *решение системы* (1) – (4) *с начальным условием* $\mu^m$. *Тогда для любого компакта* $U \subset \mathbb{R}^d$ *имеет место сходимость по вероятности*

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{u \in U} \left(\left|x_t^m(u) - x_t(u)\right| + \left|\rho_t^m(u) - \rho_t(u)\right|\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad m \to \infty, \tag{24}$$

*а также сходимость по вероятности процессов*

$$\mu_t^m \to \mu_t, \quad m \to \infty \quad \text{в} \quad C([0, T], \mathfrak{M}). \tag{25}$$

***Доказательство.*** Аналогично доказательству слабого существования решения системы (5) – (8) несложно проверить, что последовательность процессов $\eta^m = \left(x^m,\ \rho^m, x, \rho,\ w_k, k = \overline{1, n}\right)$ является слабо компактной в

$$\Big(C\big([0, T], C\big(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\big)\big) \times C\big([0, T], C\big(\mathbb{R}^d\big)\big) \times C\big([0, T], C\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\big)\big) \times$$

$$\times\, C\big([0, T], C\big(\mathbb{R}^d\big)\big) \times C([0, T])\Big).$$

Использовав теорему Скорохода [9], выберем единое вероятностное пространство и подпоследовательность $\tilde{\eta}^m \overset{\mathcal{D}}{=} \eta^m$, сходящуюся почти наверное к некоторому предельному процессу $\tilde{\eta} = \left(\bar{x},\ \bar{\rho},\ \tilde{x},\ \tilde{\rho},\ \tilde{w}_k, k = \overline{1, n}\right)$. Как и в п. 3, можно установить, что $(\bar{x}, \bar{\rho})$ и $(\tilde{x}, \tilde{\rho})$ является решением системы (5) – (8) с $\tilde{w}_k$ вместо $w_k$. Из теоремы 1 вытекает равенство

$$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad \forall t \in [0, T]: \quad \tilde{x}_t(u) = \bar{x}_t(u), \quad \tilde{\rho}_t(u) = \bar{\rho}_t(u) \quad \text{п. н.}$$

Поэтому имеет место равномерная сходимость на компактах $\tilde{x}^m \to \tilde{x}$ и $\tilde{\rho}^m \to \tilde{\rho}$, $m \to \infty$ п. н. Поскольку распределения $(\tilde{x}^m, \tilde{\rho}^m, \tilde{x}, \tilde{\rho})$ и $(x^m, \rho^m, x, \rho)$ совпадают, отсюда следует (24).

Сходимость (25) следует из (24) и моментных оценок из леммы 1.

**6. Марковское свойство мерозначного процесса $\mu_t$.** Доказательство марковости процесса $\mu_t$ проводится аналогично классической схеме доказательства марковского свойства для решений (обычных) стохастических дифференциальных уравнений (см. [10], гл. 6, § 1).

Пусть $s > 0$, $t \geq s$, $\varepsilon > 0$, $\mu \in \mathfrak{M}$. Обозначим

$$\mathcal{F}_s = \sigma\left(w_k(\tau), \ \tau \in [0, s], \ k = \overline{1, n}\right),$$

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\left(w_k(\tau) - w_k(s), \ \tau \in [s, t], \ k = \overline{1, n}\right).$$

Отметим, что $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_{s,t}$ независимы.

Обозначим через $x_{s,t,v}(u)$, $\rho_{s,t,v}(u)$, $\mu_{s,t,v}$ решение системы

$$dx_{s,t,v}(u) = a_0\left(x_{s,t,v}(u), \mu_{s,t,v}\right)dt + \sum_{k=1}^{n} a_k\left(x_{s,t,v}(u), \mu_{s,t,v}\right)dw_k(t), \tag{26}$$

$$d\rho_{s,t,v}(u) =$$

$$= \left(b_0\left(x_{s,t,v}(u), \mu_{s,t,v}\right)dt + \sum_{k=1}^{n} b_k\left(x_{s,t,v}(u), \mu_{s,t,v}\right)dw_k(t)\right)\rho_{s,t,v}(u), \quad t \geq s, \quad u \in \mathbb{R}^d, \tag{27}$$

$$x_{s,s,v}(u) = u, \quad \rho_{s,s,v}(u) = 1, \quad \mu_{s,t,v} = v \circ x_{s,t,v}^{-1}. \tag{28}$$

Из теоремы 2 следует существование измеримой версии отображения

$$\Omega \times \mathfrak{M} \ni (\omega, v) \mapsto \left(x_{s,t,v}, \rho_{s,t,v}, \mu_{s,t,v}\right) \in C\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right) \times C\left(\mathbb{R}^d\right) \times \mathfrak{M}.$$

Используя незначительную модификация теоремы 1 для неупреждающих начальных условий, несложно проверить, что система (26) – (28) с начальным условием $\mu_s$ имеет единственное решение.

Рассмотрим случайные процессы

$$y_t(u) = x_t\left(x_s^{-1}(u)\right), \quad r_t(u) = \frac{\rho_t\left(x_s^{-1}(u)\right)}{\rho_s\left(x_s^{-1}(u)\right)}, \quad t \geq s.$$

***Замечание* 7.** Для любого $s > 0$ отображение $u \mapsto x_s(u)$ является гомеоморфизмом $\mathbb{R}^d$ [8], поэтому обратное отображение $x_s^{-1}$ корректно определено.

Несложно заметить, что пара $y_t$, $r_t$ удовлетворяет системе

$$dy_t(u) = a_0(y_t(u), \mu_t)dt + \sum_{k=1}^{n} a_k(y_t(u), \mu_t)dw_k(t), \quad t \geq s,$$

$$dr_t(u) = \left(b_0(y_t(u), \mu_t)dt + \sum_{k=1}^{n} b_k(y_t(u), \mu_t)dw_k(t)\right)r_t(u),$$

$$y_s(u) = u, \qquad r_s(u) = 1.$$

Отметим также, что

$$\mu_t = (\rho_t \mu) \circ x_t^{-1} = \left( \left( \frac{\rho_t}{\rho_s} \rho_s \mu \right) \circ x_s^{-1} \right) \circ \left( x_t \circ x_s^{-1} \right)^{-1} =$$

$$= \left( \frac{\rho_t \circ x_s^{-1}}{\rho_s \circ x_s^{-1}} (\rho_s \mu) \circ x_s^{-1} \right) \circ \left( x_t \circ x_s^{-1} \right)^{-1} = (r_t \mu_s) \circ y_t^{-1}.$$

Из единственности решения системы (26) – (28) с начальным условием $\nu = \mu_s$ следует

$$y_t = x_{s,t,\mu_s}, \qquad r_t = \rho_{s,t,\mu_s}, \qquad \mu_t = \mu_{s,t,\mu_s}.$$

Из независимости $\mathcal{F}_{s,t}$-измеримого отображения $\mu_{s,t,\cdot}$ и $\mathcal{F}_s$-измеримой случайной меры $\mu_s$ вытекает марковское свойство процесса $\mu_t$.

Аналогично предыдущим рассуждениям и результатам § 3.3 [3] можно проверить более общее утверждение.

**Теорема 3.** 1. *Для любых* $k, l \geq 0,\ k \geq l,\ u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^d$ *случайный процесс*

$$\left(\mu_t, x_t(u_1), \ldots, x_t(u_k),\ \rho_t(u_1), \ldots, \rho_t(u_l)\right), \quad t \geq 0,$$

*является марковским.*

2. *Случайный процесс*

$$\left(\mu_t,\ x_t(\cdot),\ \rho_t(\cdot)\right), \quad t \geq 0,$$

*является марковским в* $\mathfrak{M} \times C\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \times C\left(\mathbb{R}^d\right)$, *где в пространствах* $C\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right)$, $C\left(\mathbb{R}^d\right)$ *рассматривается топология равномерной сходимости на компактах.*


1. *Dawson D. A.* Measure-valued Markov processes // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1993. – **1541**.
2. *Cerrai S., Clement Ph.* Well-posedness of the martingale problem for some degenerate diffusion processes occuring in dymanics of populations // Bull. Sci. Math. – 2004. – **128**, № 5. – P. 355 – 370.
3. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Stochastic flows with interaction and random measures, Dordrecht: Kluwer, 2004.
4. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic flows with interaction and measure-valued processes // Int. J. Math. Sci. – 2003. – № 63. – P. 3963 – 3977.
5. *Skorokhod A. V.* Measure-valued diffusions // Theory Stochast. Processes. – 1997. – **3(19)**, № 1 – 2. – P. 7 – 12.
6. *Skorokhod A. V.* Measure-valued diffusions // Ukr. Mat. Zh. – 1997. – **49**, № 3. – P. 458 – 464.
7. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 445 с.
8. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations / Cambridge Stud. in Adv. Math. – 1990. – 346 p.
9. *Kallenberg O.* Foundation of modern probability. 2nd ed. // Text Monograph, Probab. and Its Appl. – New York: Springer, 2002. – 638 p.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
11. *Карликова М. П.* О слабом решении уравнения для эволюционного потока со взаимодействием // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 895 – 903.


Получено 17.06.2005