УДК 519.658

Е. И. Радзиевская (Нац. ун-т пищ. технологий, Киев),
Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУНОРМЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{l}_1$ С ВЕСОМ*

Let $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a nondecreasing sequence of positive numbers, $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ be the space of real sequences $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, satisfying $\|\xi\|_{1,\alpha} := \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j|\xi_j| < +\infty$. We associate each sequence ξ from $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ with a sequence $\xi^* = \left\{|\xi_{\varphi(j)}|\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, where $\varphi(\cdot)$ is such permutation of the natural series that $|\xi_{\varphi(j)}| \geq |\xi_{\varphi(j+1)}|$, $j\in\mathbb{N}$. If p is a bounded seminorm on $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ and a sequence $\omega_m :=$ $:= \left\{\underbrace{1,\ldots,1}_{m}, 0, 0, \ldots\right\}$, then

$$\sup_{\xi\neq 0,\ \xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}}\frac{p(\xi^*)}{\|\xi\|_{1,\alpha}} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\frac{p(\omega_m)}{\sum_{s=1}^{m}\alpha_s}.$$

This equality implies a number of the known statements.

Нехай $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — неспадна послідовність додатних чисел, $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ — простір дійсних послідовностей $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для яких $\|\xi\|_{1,\alpha} := \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j|\xi_j| < +\infty$. Кожній послідовності ξ з $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ поставимо у відповідність послідовність $\xi^* = \left\{|\xi_{\varphi(j)}|\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, де $\varphi(\cdot)$ — така перестановка натурального ряду, що $|\xi_{\varphi(j)}| \geq |\xi_{\varphi(j+1)}|$, $j\in\mathbb{N}$. Якщо p — обмежена півнорма на $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ і послідовність $\omega_m := \left\{\underbrace{1,\ldots,1}_{m}, 0, 0, \ldots\right\}$, то

$$\sup_{\xi\neq 0,\ \xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}}\frac{p(\xi^*)}{\|\xi\|_{1,\alpha}} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\frac{p(\omega_m)}{\sum_{s=1}^{m}\alpha_s}.$$

З цієї рівності виводиться низка відомих тверджень.

Настоящее сообщение инспирировано результатами работ [1] (гл. III, лемма 15.2), [2] (лемма, пример 4), [3] (леммы 2 и 2′), [4] (гл. XI, леммы 5.1 и 5.1′), [5] (лемма 1). В нем приведены лемма, теорема и сформулированы три следствия из нее, дополняющие соответствующие утверждения из [1 – 5]. Суть этих дополнений пояснена после доказательства леммы и формулировок следствий 1 – 3.

Как обычно, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — это, соответственно, множества целых положительных (натуральных) и действительных чисел. Будем рассматривать лишь последовательности $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ вещественных чисел, а $\mathbf{c}_0$ — множество последовательностей ξ, для которых $\lim\limits_{j\to\infty}\xi_j = 0$. Каждой последовательности $\xi =$ $= \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $\mathbf{c}_0$ сопоставим последовательность $\xi^* = \{\xi_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$, полагая $\xi_j^* =$ $= |\xi_{\varphi(j)}|$, где $\varphi(\cdot)$ — такая перестановка натурального ряда, что последовательность $\left\{|\xi_{\varphi(j)}|\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ является невозрастающей.

* Поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/329-2001).

Для неубывающей последовательности положительных чисел $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ введем банахово пространство $\mathbf{l}_{1,\alpha}$, состоящее из последовательностей ξ, для которых

$$\|\xi\|_{1,\alpha} := \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j|\xi_j| < +\infty, \quad \xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}.$$

Поскольку $\mathbf{l}_{1,\alpha}\subset\mathbf{c}_0$, для всех элементов ξ из $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ определена последовательность ξ^* и, ввиду теоремы 368 из [6],

$$\left\|\xi^*\right\|_{1,\alpha} \le \|\xi\|_{1,\alpha}, \quad \xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}. \tag{1}$$

Заданный на $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ вещественнозначный функционал называется полунормой, если $p(\xi+\eta)\le p(\xi)+p(\eta)$ и $p(\lambda\xi)=|\lambda|p(\xi)$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\xi,\eta\in\in\mathbf{l}_{1,\alpha}$. Из этого определения следует, что $p(\xi)\ge 0$ для всех $\xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}$. Если же существует постоянная $c>0$, для которой $p(\xi)\le c\|\xi\|_{1,\alpha}$ при $\xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}$, то полунорма p называется ограниченной.

Теорема. *Пусть p — ограниченная полунорма на $\mathbf{l}_{1,\alpha}$, а последовательность* $\omega_m := \left\{\underbrace{1,\ldots,1}_{m},0,0,\ldots\right\}$. *Тогда*

$$\sup_{\xi\ne0,\,\xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}}\frac{p(\xi^*)}{\|\xi\|_{1,\alpha}} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\frac{p(\omega_m)}{\sum_{s=1}^{m}\alpha_s}. \tag{2}$$

Отметим, что ограниченность обеих частей в (2) является следствием ограниченности полунормы p, поскольку выполняется неравенство (1) и $\|\omega_m\|_{1,\alpha} = = \sum_{s=1}^{m}\alpha_s$. Из последнего равенства, в частности, следует, что левая часть в (2) больше или равна правой.

Доказательство теоремы основано на ее конечномерном варианте. При этом через K^n обозначен конус в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов $\xi := \{\xi_j\}_{j=1}^{n}$ с координатами $\xi_1\ge\xi_2\ge\ldots\ge\xi_n\ge0$. Зададим также векторы $e_s := \{\delta_{j,s}\}_{j=1}^{n}$, где $s=1,\ldots,n$, а $\delta_{j,s}$ — символ Кронекера, и положим $\omega_m^{(n)} := \sum_{s=1}^{m}e_s$, $m=1,\ldots$ $\ldots,n$. В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть p — полунорма в $\mathbb{R}^n$, а $\alpha=\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}$ — произвольный вектор с положительными координатами. Тогда*

$$p(\xi) \le \left(\max_{m=1,\ldots,n}\frac{p\left(\omega_m^{(n)}\right)}{\sum_{s=1}^{m}\alpha_s}\right)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j, \quad \xi\in K^n, \tag{3}$$

причем существуют ненулевые векторы ξ из K^n, для которых (3) *превращается в равенство.*

Доказательство. Пусть максимум в (3) достигается на индексе $m_0\in\in\{1,\ldots,n\}$. Тогда (3) превращается в равенство на векторе $\xi := \omega_{m_0}^{(n)}\in K^n$. Далее, разлагая произвольный вектор ξ из K^n по векторам $\left(\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\right)^{-1}\omega_m^{(n)}$, $m=1,\ldots,n$, имеем

$$\xi = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \frac{\omega_m^{(n)}}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{m=j}^{n} \frac{\lambda_m}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} \right) e_j .$$

Поскольку $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in K^n$, из второго представления вектора ξ следует, что $\lambda_m \geq 0$, $m = 1, \ldots, n$, и

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{m=j}^{n} \frac{\lambda_m}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} \right) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m .$$

Но p — полунорма и поэтому

$$p(\xi) \leq \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \frac{p\left(\omega_m^{(n)}\right)}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} \leq \left(\max_{m=1,\ldots,n} \frac{p\left(\omega_m^{(n)}\right)}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} \right) \sum_{m=1}^{n} \lambda_m ,$$

откуда и получаем неравенство (3).

В случае $p(\xi) := \sum_{j=1}^{n} \nu_j |\xi_j|$, где $\{\nu_j\}_{j=1}^{n} \in K^n$, утверждение леммы совпадает с леммой 15.2 из гл. III монографии [1].

Доказательство теоремы. Обозначим через K^∞ множество неотрицательных последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, у которых $\xi_j \geq \xi_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда согласно неравенству (1) верхнюю грань в левой части равенства (2) достаточно брать лишь по последовательностям $\xi \neq 0$ и $\xi \in \mathbf{l}_{1,\alpha} \cap K^\infty$, что и будем предполагать в дальнейшем.

Каждой последовательности $\xi = \{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ сопоставим вектор $\xi^{(n)} := \{\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$. Если $\xi \in \mathbf{l}_{1,\alpha}$, то векторы $\xi^{(n)}$ сходятся по норме пространства $\mathbf{l}_{1,\alpha}$ к ξ и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} p\left(\xi^{(n)}\right) = p(\xi), \quad \xi \in \mathbf{l}_{1,\alpha}. \tag{4}$$

Функционал $\xi^{(n)} \mapsto p\left(\xi^{(n)}\right)$ удовлетворяет условиям леммы, на основании которой

$$p\left(\xi^{(n)}\right) \leq \left(\max_{m=1,\ldots,n} \frac{p(\omega_m)}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} \right) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j \leq \left(\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{p(\omega_m)}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s} \right) \|\xi\|_{1,\alpha}, \quad \xi \in \mathbf{l}_{1,\alpha} \cap K^\infty .$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что правая часть в (2) может быть лишь больше или равна левой. Справедливость обратного неравенства была показана непосредственно после формулировки теоремы.

Приведем три следствия из теоремы.

По неотрицательной последовательности чисел $\nu = \{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\nu_j}{\alpha_j} < +\infty, \tag{5}$$

и для $q \in [1; +\infty]$ введем полунормы $p_{q,\nu}$, заданные равенствами

$$p_{q,\nu}(\xi) := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^q \left|\xi_j\right|^q\right)^{1/q}, \quad 1 \le q < +\infty,$$

$$p_{\infty,\nu}(\xi) := \sup_{j\in\mathbb{N}} \nu_j \left|\xi_j\right|.$$

Ввиду условия (5) и теоремы 19 из [6] полунормы $p_{q,\nu}$ ограничены на пространстве $\mathbf{l}_{1,\alpha}$. Применяя к ним теорему, получаем такое утверждение.

***Следствие* 1.** *Справедливо равенство*

$$\sup_{\xi\ne 0,\, \xi\in\mathbf{l}_{1,\alpha}} \frac{p_{q,\nu}(\xi^*)}{\|\xi\|_{1,\alpha}} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{\left(\sum_{s=1}^{m} \nu_s^q\right)^{1/q}}{\sum_{s=1}^{m} \alpha_s},$$

причем для $q = +\infty$ *полагаем* $\left(\sum_{s=1}^{m} \nu_s^q\right)^{1/q} := \max\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$.

Если в следствии 1 считать последовательность $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ с $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = +\infty$, а ν — ограниченной и неубывающей последовательностью и $1 \le q < +\infty$, то утверждение следствия 1 совпадает с леммой 1 из [5]. Следует отметить, что доказательство этой леммы в [5] весьма объемное и занимает 12 страниц журнального текста. В свою очередь лемма 1 из [5] содержит лемму 2 из [3] или лемму 5.1 из гл. XI в [4], если положить в ней последовательность ν равной последовательности

$$\hat{\nu} = \{\hat{\nu}_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \hat{\nu}_j = 0, \quad j \le r, \quad \hat{\nu}_j = 1, \quad j > r, \tag{6}$$

для $r \in \mathbb{N}$.

Пусть $[\![\beta]\!]$ — целая часть $\beta \in \mathbb{R}$. Для $r > 0$ и $1 < q < +\infty$ введем числа

$$r_q := \left[\!\!\left[\frac{r}{q-1}\right]\!\!\right], \qquad d(q;r) := \max\left\{\frac{(r_q)^{1/q}}{r+r_q};\ \frac{(r_q+1)^{1/q}}{r+r_q+1}\right\}. \tag{7}$$

Заметим, что при различных значениях q и r максимум в определении (7) величины $d(q;r)$ может достигаться либо на первом, либо на втором выражении из ее определения. В частности,

$$d(q;r) := \frac{1}{q}\left(\frac{q-1}{r}\right)^{1-1/q}, \quad \text{если} \quad \frac{r}{q-1} \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to\infty} d(q;r)\, r^{1-1/q} = \frac{(q-1)^{1-1/q}}{q}, \quad 1 < q < +\infty.$$

Для $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ с $\alpha_j = 1$ при $j \in \mathbb{N}$ полагаем $\mathbf{l}_1 := \mathbf{l}_{1,\alpha}$.

Во введенных обозначениях из следствия 1 вытекает такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, *а последовательность* $\hat{\nu}$ *задана соотношениями* (6). *Тогда*

$$\sup_{\xi\ne 0,\, \xi\in\mathbf{l}_1} \frac{p_{q,\hat{\nu}}(\xi^*)}{\|\xi\|_1} = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ (1+r)^{-1}, & 1 < q \le +\infty, \quad r \le q-1, \\ d(q;r), & 1 < q < +\infty, \quad r > q-1. \end{cases}$$

В случае $1 < q < +\infty$ следствие 2 совпадает с леммой 5.1′ из гл. XI в [4].

***Следствие* 3.** *Пусть* $\alpha = \{j\}_{j\in\mathbb{N}}$, *а при* $r \in \mathbb{N}$ *последовательность* $\hat{\nu}$ *задана соотношениями* (6). *Тогда*

$$\sup_{\xi\neq 0,\, \xi\in \mathbf{l}_{1,\alpha}} \frac{p_{1,\hat{\nu}}(\xi^*)}{\|\xi\|_{1,\alpha}} = \frac{1}{2r+1}.$$

Равенство, установленное в этом следствии, совпадает с тем, что доказывается во второй части примера 4 из [2], где подсчет выполнен до указания конкретного числа. Однако соответствующее число в [2] указано неверно.

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
5. *Степанець О. І., Шидліч А. Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами у просторах S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1107 – 1126.
6. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Получено 18.11.2003