УДК 517.946

**И. И. Скрыпник** (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# УСТРАНИМОСТЬ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С АБСОРБЦИЕЙ

We prove a priori estimates of singular solutions for nonlinear elliptic equations with absorption. By using these estimates, we establish precise conditions on the behavior of absorption term of the equation under which solutions with pointwise singularities do not exist.

Доведено апріорні оцінки сингулярних розв'язків для нелінійних еліптичних рівнянь з абсорбцією. З допомогою цих оцінок отримано точні умови на поведінку члена рівняння, що характеризує абсорбцію, при яких не існують розв'язки з точковою особливістю.

**1. Введение.** Работа посвящена изучению условий, обеспечивающих устранимость изолированных особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений дивергентной формы

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\,a_j\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+a_0\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+g(x,u)=0,\qquad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Предполагается, что функции $a_j(x,u,\xi)$, $j=0,1,\ldots,n$, удовлетворяют стандартным условиям эллиптичности и роста относительно $u$, $\xi$, так что энергетическим пространством для уравнения

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\,a_j\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+a_0\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=0,\qquad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

является пространство $W_p^1(\Omega)$. Кроме того, предполагается, что функция $g(x,u)$ удовлетворяет неравенству

$$g(x,u)\operatorname{sign}u\geqslant\nu\,|u|^q-f(x) \tag{1.3}$$

с положительными постоянными $\nu,q$ и положительной функцией $f(x)$, удовлетворяющей некоторому условию интегрируемости.

Устранимость особенностей уравнений (1.1), (1.2) рассматривали многие авторы (см., например, монографию Л. Верона [1]). Отметим, что для решения уравнения (1.2) условие Дж. Серрина [2, 3] устранимости особенности в точке $x_0$ имеет вид

$$u(x)=O\big(|x-x_0|^{-\frac{N-p}{p-1}+\gamma}\big)\quad\text{при}\quad N>p>1 \tag{1.4}$$

с положительным $\gamma$. Точное условие устранимости особенностей таких решений было получено в работе [4], и оно имеет вид

$$u(x)=o\big(|x-x_0|^{-\frac{N-p}{p-1}}\big)\quad\text{при}\quad N>p. \tag{1.5}$$

Для уравнений вида (1.1) с оператором Лапласа в главной части

$$-\Delta u+g(u)=0 \tag{1.6}$$

устранимость изолированных особенностей изучалась Х. Брезисом и Л. Вероном [5]. Ими доказана устранимость особенности каждого сингулярного решения уравнения (1.6) при выполнении условия (1.3) и неравенства

$$q \geqslant \frac{N}{N-2}. \tag{1.7}$$

О дальнейших результатах в этом направлении для уравнения (1.6) см. [1].

Для уравнений вида (1.1) с линейным дивергентным оператором в главной части

$$-\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + |u|^{q-1}u = 0 \tag{1.8}$$

устранимость изолированных особенностей изучали В. А. Кондратьев и Е. М. Ландис [6], доказавшие устранимость особенности в точке для произвольного решения уравнения (1.8) при более сильном условии, чем (1.7), а именно, в предположении

$$q > \frac{N}{N-2}. \tag{1.9}$$

В настоящей работе впервые получено точное условие устранимости особенности решения нелинейного эллиптического уравнения (1.1), которое оказывается новым даже для уравнения (1.8). Доказано, что при выполнении условия (1.3) каждая изолированная особенность решения уравнения (1.1) устранима, если

$$q \geqslant \frac{N(p-1)}{N-p}. \tag{1.10}$$

В работе развит новый метод изучения локального поведения решений нелинейных уравнений в окрестности особенностей, основанный на поточечных оценках решений. Этот метод является развитием метода И. В. Скрыпника доказательства поточечных оценок емкостных потенциалов (см., например, [7]).

**2. Формулировка предположений и основных результатов.** Далее $\Omega$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Предполагается, что функции $a_j(x,u,\xi)$, $j=0,1,\ldots,N, g(x,u)$ удовлетворяют следующим условиям:

$\mathrm{a}_1)$ $a_j(x,u,\xi)$, $j=0,1,\ldots,N$, $g(x,u)$ определены при $(x,u,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^N$ и являются измеримыми функциями $x$ для всех $(x,\xi)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^N$ и непрерывными функциями $u,\xi$ для почти всех $x\in\Omega$;

$\mathrm{a}_2)$ существуют числа $p>1$, $q>1$, $\nu_1,\nu_2,\nu_4>0$ такие, что для всех $x,u,\xi$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{N} a_j(x,u,\xi)\xi_j \geqslant \nu_1\,|\xi|^p - g_1(x)\,|u|^p - f_1(x), \\
|a_j(x,u,\xi)| \leqslant \nu_2\,|\xi|^{p-1} + g_2(x)\,|u|^{p-1} + f_2(x), \quad j=1,\ldots,N, \\
|a_0(x,u,\xi)| \leqslant \nu_3(x)\,|\xi|^{p-1} + g_3(x)\,|u|^{p-1} + f_3(x), \\
g(x,u)\operatorname{sign} u \geqslant \nu_4\,|u|^q - f_4(x),
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\nu_3(x),\ g_i(x), i = 1,2,3,\ f_j(x), j = 1,2,3,4,$ — неотрицательные функции такие, что

$$\begin{gathered}\nu_3(x) \in L_{\frac{N}{1-\delta}}(\Omega), \quad f_j(x) \in L_{p_j}(\Omega), \quad g_i(x) \in L_{p_i}(\Omega), \\ p_1 = p_3 = p_4 = \frac{N}{p-\delta}, \qquad p_2 = \frac{N}{p-1-\delta}\end{gathered} \tag{2.2}$$

с некоторым $\delta \in (0, \min[p-1, 1])$.

Рассмотрим решение $u(x)$ уравнения (1.1) с изолированной особенностью. Можем считать, что $0 \in \Omega$ и $0$ — особая точка решения $u(x)$. Будем говорить, что $u(x)$ — решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \{0\}$, если для произвольных функций $\xi(x) \in C^\infty(\Omega)$, равной нулю вблизи границы множества $\Omega \setminus \{0\}$, и $\psi(x) \in \in W^1_p(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)$ имеет место включение $u(x)\,\xi(x) \in W^1_p(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)$ и справедливо при $\varphi(x) = \xi(x)\psi(x)$ равенство

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^N a_j\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a_0\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\varphi + g(x,u)\varphi \right\} dx = 0. \tag{2.3}$$

Определим $R_0 = \dfrac{1}{2}\min\{\text{dist}(\{0\}, \partial\Omega), 1\}$ и для $0 < r \leqslant R_0$ обозначим

$$M(r) = \max\{|u(x)| : r \leqslant |x| \leqslant R_0\}. \tag{2.4}$$

Известно, что условия $\mathrm{a}_1), \mathrm{a}_2)$ обеспечивают гельдеровость решения $u(x)$ в кольце $\{r \leqslant |x| \leqslant R_0\}$ и поэтому максимум в (2.4) является конечным числом.

Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (1.1) имеет устранимую особенность в точке $\{0\}$, если $u(x) \in W^1_p(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)$ и тождество (2.3) справедливо для $\varphi(x) = \overline{\xi}(x)\psi(x)$, где $\overline{\xi}, \psi$ — произвольные функции такие, что $\overline{\xi} \in C^\infty_0(\Omega)$, $\psi \in W^1_p(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $1 < p < N$, *выполнены условия* $\mathrm{a}_1), \mathrm{a}_2)$ *и* $u(x)$ — *решение уравнения* (1.1) *в* $\Omega \setminus \{0\}$. *Предположим, что выполнено неравенство*

$$q \geqslant \frac{N(p-1)}{N-p}. \tag{2.5}$$

*Тогда особенность* $u(x)$ *в* $\{0\}$ *устранима.*

Доказательство теоремы основано на новых поточечных и интегральных оценках, характеризующих локальное поведение решения $u(x)$ вблизи особой точки. В п. 3 доказывается следующая теорема, дающая первоначальную поточечную оценку решения.

**Теорема 2.2.** *Предположим, что* $p > 1, q > p-1$, *выполнены условия* $\mathrm{a}_1), \mathrm{a}_2)$ *и* $u(x)$ — *решение уравнения* (1.1) *в* $\Omega \setminus \{0\}$. *Тогда существует постоянная* $K$, *зависящая лишь от постоянных* $\nu_1, \nu_2, \nu_4, N, p, \delta$, *норм функций* $\nu_3(x), g_i(x), f_j(x)$ *в пространствах* $L_{\frac{N}{1-\delta}}(\Omega), L_{p_i}(\Omega), L_{p_j}(\Omega)$ *соответственно, такая, что выполняется оценка*

$$|u(x)| \leqslant K|x|^{-\frac{p}{q-p+1}} \tag{2.6}$$

*при* $0 < |x| \leqslant R_0$.

В п. 4 изучаются интегральные оценки градиента решения. В частности, отметим оценку

$$\int\limits_{E(\rho,4\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p dx \leqslant K_4 M(\rho)\rho^{\lambda+\delta}, \tag{2.7}$$

$$E(\rho,4\rho) = \left\{x : \widetilde{M}(4\rho) < u(x) < \widetilde{M}(\rho),\ |x| \leqslant R_0\right\}, \quad \widetilde{M}(\rho) = M(\rho) + \ln\frac{1}{\rho},$$

полученную в лемме 4.3 в предположении, что решение $u(x)$ удовлетворяет дополнительному неравенству

$$|u(x)| \leqslant K'|x|^{-\frac{N-p-\lambda}{p-1}} \quad \text{при} \quad 0 < |x| \leqslant R_0 \tag{2.8}$$

с некоторыми $\lambda \geqslant 0,\ K' > 0$.

Используя оценку (2.7), в п. 5 доказываем улучшение поточечной оценки (2.8) в виде

$$|u(x)| \leqslant K_6 \max\left\{|x|^{-\frac{N-p-\lambda}{p-1}+\frac{\delta}{\tilde{p}}},\ \ln^2\frac{1}{|x|}\right\} \tag{2.9}$$

с $\tilde{p} = \dfrac{Np}{\delta} + 1 + p$. Эта оценка получена в лемме 5.2.

Заметим, что неравенство (2.6) обеспечивает справедливость оценки (2.8) с

$$\lambda = \frac{q(N-p) - N(p-1)}{q-p+1}. \tag{2.10}$$

Правая часть равенства (2.10) неотрицательна при выполнении условия (2.5). Это обеспечивает возможность доказательства теоремы 2.1 следующим образом. Начиная с оценки (2.6) и используя неравенство (2.9), получаем последовательное улучшение поточечных оценок и достигаем через конечное число шагов оценки

$$|u(x)| \leqslant C\ln^2\frac{1}{|x|}. \tag{2.11}$$

Теперь можно свести уравнение (1.1) к уравнению (1.2) с новой функцией $\tilde{a}_0(x,u,\xi)$, удовлетворяющей условиям $\mathrm{a}_1), \mathrm{a}_2)$. Оценка (2.11) обеспечивает выполнение условия (1.4), что и приводит к доказательству устранимости особенности решения $u(x)$. Доказательство теоремы 2.1 приведено в п. 5.

**3. Доказательство теоремы 2.2.** Будем предполагать в дальнейшем, что

$$\lim_{r\to 0} M(r) = \infty. \tag{3.1}$$

В противном случае утверждение теоремы 2.1 непосредственно следует из теоремы Серрина [2]. Зафиксируем число $R_1$ из интервала $(0, R_0)$ так, чтобы

$$M(R_1) \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Определим при $\rho > 0, \sigma \in (0,1)$ функцию $\varphi_{\rho,\sigma}(x)$ условиями: $\varphi_{\rho,\sigma}(x) = 1$ при $\rho \leqslant |x| \leqslant 2\rho$, $\varphi_{\rho,\sigma}(x) = 0$ вне множества $\{(1-\sigma)\rho < |x| < (2+\sigma)\rho\}$, выполнена оценка $\left|\dfrac{\partial \varphi_{\rho,\sigma}(x)}{\partial x}\right| \leqslant \dfrac{2}{\sigma\rho}$, $0 \leqslant \varphi_{\rho,\sigma}(x) \leqslant 1$.

Под известными параметрами будем понимать постоянные $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_4$, $N$, $p$, $\delta$, $R_0$, нормы функций $\nu_3(x)$, $g_i(x)$, $f_j(x)$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$, в соответствующих пространствах. В дальнейшем постоянные, зависящие только от известных параметров, будем обозначать через $C_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

**Лемма 3.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда существует постоянная* $K_1$, *зависящая только от известных параметров, такая, что при* $0 < \sigma < 1$, $0 < \rho < \dfrac{R_1}{3}$ *выполнена оценка*

$$\int\limits_{\Omega} \left( \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + |u|^{q+1} \right) \varphi_{\rho,\sigma}^p(x)dx \leqslant K_1 \sigma^{-p} \rho^{N-p} M^p(\rho - \sigma\rho). \tag{3.3}$$

***Доказательство.*** Подставим в интегральное тождество (2.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = u(x)\varphi_{\rho,\sigma}^p(x).$$

Используя предположение (2.1) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega} \left( \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + |u|^{q+1} \right) \varphi_{\rho,\sigma}^p(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{\Omega} \big(1 + |u(x)|\big)^p h_1(x) \varphi_{\rho,\sigma}^p(x)dx + C_1 \int\limits_{\Omega} \big(1 + |u(x)|\big)^p \left|\frac{\partial \varphi_{\rho,\sigma}}{\partial x}\right|^p dx, \tag{3.4}$$

где

$$h_1(x) = \nu_3^p(x) + f_1(x) + g_1(x) + \big[f_2(x) + g_2(x)\big]^{\frac{p}{p-1}} + f_3(x) + g_3(x) + f_4(x). \tag{3.5}$$

Интегралы в правой части (3.4) оцениваем, применяя неравенство Гельдера, определения функций $\varphi_{\rho,\sigma}(x)$, $M(r)$ и условие a$_2$). В результате имеем

$$\int\limits_{\Omega} \big(1 + |u(x)|\big)^p h_1(x) \varphi_{\rho,\sigma}^p(x)dx \leqslant C_2 M^p(\rho - \sigma\rho)\rho^{N-p+\delta},$$

$$\int\limits_{\Omega} \big(1 + |u(x)|\big)^p \left|\frac{\partial \varphi_{\rho,\sigma}(x)}{\partial x}\right|^p dx \leqslant C_3 \sigma^{-p} \rho^{N-p} M^p(\rho - \sigma\rho).$$

Теперь оценка (3.3) следует из (3.4) и двух последних неравенств, и доказательство леммы 3.1 завершено.

**Лемма 3.2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при* $0 < \sigma < 1$, $0 < \rho < \dfrac{R_1}{3}$ *справедлива оценка*

$$\max\left\{|u(x)|^{q+1}:\rho\leqslant|x|\leqslant 2\rho\right\}\leqslant K_2\sigma^{-\frac{p}{\delta}N}\rho^{-N}\int\limits_\Omega\left(1+|u(x)|\right)^{q+1}\varphi^p_{\rho,\sigma}(x)dx \quad (3.6)$$

*с постоянной $K_2$, зависящей лишь от известных параметров.*

***Доказательство.*** Подставим в интегральное тождество (2.3) пробную функцию

$$\varphi(x)=\left(1+|u(x)|\right)^k u(x)\varphi^{l+p}_{\rho,\sigma}(x),$$

где $k,l$ — произвольные неотрицательные числа. Используя условие (2.1) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\int\limits_\Omega\left\{\left(1+|u(x)|\right)^k\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p+\left(1+|u(x)|\right)^{k+q+1}\right\}\varphi^{l+p}_{\rho,\sigma}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4(l+1)^p\int\limits_\Omega\left[1+|u(x)|\right]^{k+p}\left\{h_1(x)\varphi^{l+p}_{\rho,\sigma}(x)+(\sigma\rho)^{-p}\varphi^l_{\rho,\sigma}(x)\right\}dx \quad (3.7)$$

с функцией $h_1(x)$, определенной в (3.5).

Оценим интеграл в правой части (3.7) по неравенству Гельдера. Используя условие $\mathrm{a}_2$), получаем

$$\int\limits_\Omega\left[1+|u(x)|\right]^{k+p}h_1(x)\varphi^{l+p}_{\rho,\sigma}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant C_5\left\{\int\limits_\Omega\left\{\left[1+|u(x)|\right]^{k+p}\varphi^{l+p}_{\rho,\sigma}(x)\right\}^{\frac{N}{N-p+\delta}}dx\right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}},$$

$$(\sigma\rho)^{-p}\int\limits_\Omega\left[1+|u(x)|\right]^{k+p}\varphi^l_{\rho,\sigma}(x)dx\leqslant \quad (3.8)$$

$$\leqslant C_5\sigma^{-p}\rho^{-\delta}\left\{\int\limits_\Omega\left\{\left[1+|u(x)|\right]^{k+p}\varphi^l_{\rho,\sigma}(x)\right\}^{\frac{N}{N-p+\delta}}dx\right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}}.$$

Из неравенств (3.7), (3.8) следует оценка

$$\int\limits_\Omega\left(1+|u(x)|\right)^k\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p\varphi^{l+p}_{\rho,\sigma}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant C_6(l+1)^p\sigma^{-p}\rho^{-\delta}\left\{\int\limits_\Omega\left[\left(1+|u(x)|\right)^{k+p}\varphi^l_{\rho,\sigma}(x)\right]^{\frac{N}{N-p+\delta}}dx\right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}}. \quad (3.9)$$

Полученное неравенство дает возможность применить итерационный метод Мозера для оценки максимума функции $1+|u(x)|$ на множестве $\{x:\rho\leqslant|x|\leqslant 2\rho\}$. Опуская промежуточные оценки, аналогичные доказательству леммы 1.2 гл. VIII

[7], отметим, что итогом итерационного процесса является неравенство (3.6), что и завершает доказательство леммы 3.2.

***Доказательство теоремы* 2.2.** Зафиксируем число $R_2$ из интервала $\left(0, \dfrac{R_1}{2}\right)$ так, чтобы $M(R_2) > M\left(\dfrac{R_1}{2}\right)$, и пусть $\rho$ — произвольное число из интервала $(0, R_2)$. Определим числовые последовательности $\{\rho_j\}$, $\{\sigma_j\}$ равенствами

$$\rho_j = \left(\frac{1}{2} + 2^{-j}\right)\rho, \qquad \sigma_j = 2^{-(j+1)}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Выберем точку $x_j$ так, чтобы $M(\rho_j) = |u(x_j)|$, $\rho_j \leqslant |x_j| \leqslant R_2$, и обозначим $\rho'_j = |x_j|$. Определим последовательность функций $\{\varphi_j(x)\}$, полагая $\varphi_j(x)$ равной функции $\varphi_{\rho,\sigma}(x)$ при $\rho = \rho'_j, \sigma = \sigma_j$.

Применяя лемму 3.2, получаем оценку

$$[M(\rho_j)]^{q+1} = |u(x_j)|^{q+1} \leqslant C_7 2^{\frac{jp}{\delta}} \rho^{-N} \int\limits_{\Omega} \big(1 + |u(x)|\big)^{q+1} \varphi_j^p(x)\, dx. \tag{3.10}$$

Оценим далее интеграл в (3.10) по неравенству (3.3) и получим

$$[M(\rho_j)]^{q+1} \leqslant C_8 \rho^{-p} a^j [M(\rho'_j - \sigma_j \rho'_j)]^p \leqslant C_8 a^j \rho^{-p} [M(\rho_{j+1})]^p, \tag{3.11}$$

где $a = 2^{p\left(\frac{1}{\delta}+1\right)}$.

Последовательным применением оценки (3.11) получаем неравенство

$$M(\rho_1) \leqslant C_8^{\frac{1}{q+1}\sum\limits_{j=0}^{J}\left(\frac{p}{q+1}\right)^j} a^{\frac{1}{q+1}\sum\limits_{j=0}^{J}(j+1)\left(\frac{p}{q+1}\right)^j} \times$$

$$\times \rho^{-\frac{p}{q+1}\sum\limits_{j=0}^{J}\left(\frac{p}{q+1}\right)^j} \big[M(\rho_{J+2})\big]^{\left(\frac{p}{q+1}\right)^{J+1}}. \tag{3.12}$$

Устремляя $J \to \infty$ и используя ограниченность последовательности $\{M(\rho_j)\}$, из (3.12) имеем оценку

$$M(\rho) \leqslant C_9 \rho^{-\frac{p}{q-p+1}},$$

что и завершает доказательство теоремы 2.2.

**4. Интегральные оценки градиента решения.** Определим при $r \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ функцию $\psi_r : R^N \to R^1$, $\psi_r(x) = \tilde{\psi}_r(|x|)$, где $\tilde{\psi}_r : R^1 \to R^1$ — функция, определенная равенствами $\tilde{\psi}_r(t) \equiv 0$ при $t \leqslant r$, $\tilde{\psi}_r(t) \equiv 1$ при $t \geqslant R(r)$,

$$\tilde{\psi}_r(t) = \frac{1}{(1-\theta)\ln\ln\frac{1}{r}} \int\limits_r^t \frac{dz}{z \ln\frac{1}{z}} \quad \text{при} \quad r \leqslant t \leqslant R(r). \tag{4.1}$$

Выше $e$ — натуральное число, $\theta$ — выбираемое далее число из интервала $(0, 1)$, $R(r)$ — число, определенное равенством

$$\ln\frac{1}{R(r)} = \left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\theta}. \tag{4.2}$$

Обозначим при $\rho \in (0, R_0)$ функцию $u_\rho(x)$ и множество $E(\rho)$ равенствами

$$u_\rho(x) = [u(x) - \widetilde{M}(\rho)]_+ = \max\{u(x) - \widetilde{M}(\rho), 0\} \quad \text{при} \quad x \in B(\rho) \setminus \{0\},$$

$$u_\rho(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega \setminus B(\rho),$$

$$\widetilde{M}(\rho) = M(\rho) + \ln \frac{1}{\rho}, \tag{4.3}$$

$$E(\rho) = \{x \in B(\rho) \setminus \{0\} : u(x) > \widetilde{M}(\rho)\}.$$

Определим число $\overline{p}$ и функцию $F_1(r, \rho)$ :

$$\overline{p} = \frac{qp}{q - p + 1}, \qquad F_1(r, \rho) = \rho^{N - \overline{p}}, \quad \text{если} \quad q > \frac{N(p-1)}{N-p},$$

$$F_1(r, \rho) = \left[\ln \frac{1}{r}\right]^{2 - \frac{N}{p}}, \quad \text{если} \quad q = \frac{N(p-1)}{N-p}, \quad N < 2p,$$

$$F_1(r, \rho) = \ln \ln \frac{1}{r}, \quad \text{если} \quad q = \frac{N(p-1)}{N-p}, \quad N = 2p, \tag{4.4}$$

$$F_1(r, \rho) = \left[\ln \frac{1}{\rho}\right]^{2 - \frac{N}{p}}, \quad \text{если} \quad q = \frac{N(p-1)}{N-p}, \quad N > 2p.$$

**Лемма 4.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1 *и дополнительно, что решение* $u(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(x)| \leqslant K' \, |x|^{-\frac{N-p-\lambda}{p-1}} \quad \textit{при} \quad 0 < |x| \leqslant R_0 \tag{4.5}$$

*с* $K' > 0$, $\lambda \in [0, N-p)$. *Тогда при* $r \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, $R(r) < \rho < R_1$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{E(\rho)} \frac{1}{u} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)\, dx \leqslant K_3 \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r}\right]^{-\overline{p}} F_1(r, \rho) + \rho^{\lambda + \delta} \ln \frac{1}{\rho} \right\} \tag{4.6}$$

*с* $\overline{p}$, $F_1(r, \rho)$, *определенными равенствами* (4.4), *и постоянной* $K_3$, *зависящей только от известных параметров,* $\theta$ *и* $K'$.

***Доказательство.*** Подставим в интегральное тождество (2.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = \left[\ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)}\right]_+ \psi_r^{\overline{p}}(x).$$

Оценивая возникающие интегралы на основе условия a$_2$) и неравенства Юнга, получаем оценку

$$\int\limits_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + u^q \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \right\} \psi_r^{\overline{p}}(x)\, dx \leqslant C_{10}(I_1 + I_2), \tag{4.7}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{E(\rho)} \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right| \psi_r^{\overline{p}-1}(x)\, dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{E(\rho)} u^{p-1}(x) \Bigg\{ f_1 + g_1 + (f_2 + g_2) \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \left|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right| +$$

$$+ \nu_3^p(x) \left[\ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\right]^p + (f_3 + g_3 + f_4) \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)} \Bigg\} \psi_r^{\overline{p}-1}(x)\, dx.$$

Вначале оценим интеграл $I_2$, используя неравенство Гельдера, условие $\mathrm{a}_2)$ и оценку (4.5):

$$I_2 \leqslant \left\{ \int\limits_{E(\rho)} [h_2(x)]^{\frac{N}{p-\delta}} \psi_r^{\overline{p}-1}(x)\, dx \right\}^{\frac{p-\delta}{N}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{E(\rho)} [\ln^p u |u|^{p-1}]^{\frac{N}{N-p+\delta}} \psi_r^{\overline{p}-1}(x)\, dx \right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{E(\rho)} [f_2(x) + g_2(x)]^{\frac{N}{p-1-\delta}} \psi_r^{\overline{p}-1}(x)\, dx \right\}^{\frac{p-1-\delta}{N}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{E(\rho)} \left[\ln u |u|^{p-1} \left|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|\right]^{\frac{N}{N-p+1+\delta}} \psi_r^{\overline{p}-1}(x)\, dx \right\}^{\frac{N-p+1+\delta}{N}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} \left\{ \int\limits_r^\rho \left( \left[\ln \frac{1}{|x|}\right]^p |x|^{-(N-p-\lambda)} \right)^{\frac{N}{N-p+\delta}} |x|^{N-1} d|x| \right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} +$$

$$+ C_{11} \left[\ln \ln \frac{1}{r}\right]^{-1} \left\{ \int\limits_r^\rho |x|^{-(N-p-\lambda+1)\frac{N}{N-p+1+\delta} + N-1} d|x| \right\}^{\frac{N-p+1+\delta}{N}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \rho^{\lambda+\delta} \left[\ln \frac{1}{\rho}\right]^p. \tag{4.8}$$

В этой и дальнейших оценках данного пункта постоянные $C_j$, $j = 1, \ldots,$ зависят только от известных параметров, $\theta$ и $K'$. Здесь

$$h_2(x) = f_1(x) + g_1(x) + \nu_3^p(x) + f_3(x) + g_3(x) + f_4(x). \tag{4.9}$$

Используя неравенство Юнга, получаем следующую оценку интеграла $I_1$ :

$$C_{10}I_1 \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{E(\rho)} \left\{\frac{1}{u}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + u^q \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\right\}\psi_r^{\overline{p}}(x)\,dx + C_{13}I_3, \tag{4.10}$$

где

$$I_3 = \int\limits_{E(\rho)} \left[\ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\right]^{\left(1-\frac{p-1}{pq}\right)\overline{p}} \left|\frac{\partial\psi_r}{\partial x}\right|^{\overline{p}} dx.$$

Последний интеграл оцениваем, применяя неравенство (4.5) и формулу (4.1):

$$I_3 \leqslant C_{14}\left[\ln\ln\frac{1}{r}\right]^{-\overline{p}} \int\limits_r^\rho |x|^{-\overline{p}+N-1}\left[\ln\frac{1}{|x|}\right]^{-\frac{\overline{p}}{pq}(p-1)} d|x| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\left[\ln\ln\frac{1}{r}\right]^{-\overline{p}} F_1(r,\rho). \tag{4.11}$$

Теперь оценка (4.6) следует из неравенств (4.7), (4.8), (4.10), (4.11), и доказательство леммы 4.1 завершено.

Определим при $z \in R^1$ функцию

$$\Phi(z) = \left[[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} - [z - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa}\right]_+, \tag{4.12}$$

где $\kappa = \min\left[2,\ 1 + \dfrac{\delta+\lambda}{2(N-p-\lambda)}\right]$.

Обозначим при $0 < r < R_0$ $F_2(r) = \dfrac{1}{\lambda}[R(r)]^\lambda$, если $\lambda > 0$, и $F_2(r) = \left[\ln\dfrac{1}{R(r)}\right]^{1-p}$, если $\lambda = 0$, где $\lambda$ — число из неравенства (4.5).

**Лемма 4.2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1 *и неравенство* (4.5). *Тогда при* $0 < R(r) < \rho < \dfrac{R_1}{4}$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{E(\rho)} [u(x) - \widetilde{M}(4\rho)]^{-\kappa}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx \leqslant K_4[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa}\times$$

$$\times\left\{F_2(r) + \left\{\int\limits_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx\right\}^{\frac{p-1}{p}} \{F_2(r)\}^{\frac{1}{p}} + \rho^{\lambda+\delta}\right\} \tag{4.13}$$

*с постоянной* $K_4$, *зависящей лишь от известных параметров,* $\theta$ *и* $K'$.

***Доказательство.*** Подставим в тождество (2.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = \Phi_\rho(u(x))\psi_r^{\overline{p}}(x) \quad \text{при} \quad r \in \left(0, \frac{1}{e}\right), \quad R(r) < \rho < R_1.$$

Оценивая слагаемые в равенстве, полученном в результате этой подстановки, получаем

$$\int\limits_{E(\rho)} \left\{[u(x) - \widetilde{M}(4\rho)]^{-\kappa}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + \Phi_\rho(u(x))u^q(x)\right\}\psi_r^{\overline{p}}(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa}\sum_{j=4}^{6} I_j, \tag{4.14}$$

где

$$I_4 = \int\limits_{E(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1}\psi_r^{\overline{p}-1}(x)\left|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|dx,$$

$$I_5 = \int\limits_{E(\rho)} u^{p-1}(x)\left|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|^p dx, \qquad I_6 = \int\limits_{E(\rho)} h_1(x)u^{p-1}(x)\psi_r^{\overline{p}}(x)dx$$

и функция $h_1(x)$ определена в равенстве (3.5).

Оценим далее интегралы $I_4$, $I_5$, $I_6$. Используя неравенство (4.6) и следующую из (4.1) оценку для $\left|\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|$, имеем

$$I_5 \leqslant C_{17}\, F_2(r). \tag{4.15}$$

Из (4.15) и неравенства Гельдера получаем

$$I_4 \leqslant C_{18}\left\{\int\limits_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx\right\}^{\frac{p-1}{p}} \{F_2(r)\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.16}$$

Оценка интеграла $I_6$ следует аналогично оценке (4.8):

$$I_6 \leqslant C_{19}\, \rho^{\lambda+\delta}. \tag{4.17}$$

Используя оценки для $I_4$, $I_5$, $I_6$, получаем неравенство (4.13) непосредственно из (4.14), что завершает доказательство леммы 4.2.

Определим функцию $u^{(\rho)}(x)$ и множество $E(\rho, 4\rho)$:

$$\begin{gathered} u^{(\rho)}(x) = \min\{[u(x) - \widetilde{M}(4\rho)]_+, \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)\}, \\ E(\rho, 4\rho) = \{x \in B(R_0) : \widetilde{M}(4\rho) < u(x) < \widetilde{M}(\rho)\}. \end{gathered} \tag{4.18}$$

**Лемма 4.3.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1 *и неравенство* (4.5). *Тогда при* $0 < \rho < \dfrac{R_1}{4}$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{E(\rho,4\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p dx \leqslant K_5\widetilde{M}(\rho)\rho^{\lambda+\delta} \tag{4.19}$$

*с постоянной* $K_5$, *зависящей только от известных параметров и* $K'$.

***Доказательство.*** Подставим в тождество (2.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = u^{(\rho)}(x)\psi_r^{\overline{p}}(x) \quad \text{при} \quad r \in \left(0, \frac{1}{e}\right), \quad R(r) < \rho < R_1.$$

Из полученного равенства на основании условия a$_2$) и неравенства Юнга следует оценка

$$\int\limits_{E(\rho,4\rho)} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx + \int\limits_{E(4\rho)} u^q(x)u^{(\rho)}(x)\psi_r^{\overline{p}}(x)dx \leqslant C_{20}\sum_{j=7}^{10} I_j, \tag{4.20}$$

где

$$I_7 = \widetilde{M}(\rho)\int\limits_{E(4\rho)} u^{p-1}(x)h_2(x)\psi_r^{\overline{p}}(x)dx,$$

$$I_8 = \int\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1}\Big|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\Big|\psi_r^{\overline{p}-1}(x)dx,$$

$$I_9 = \int\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x)u^{p-1}(x)[f_2(x)+g_2(x)]\Big|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\Big|\psi_r^{\overline{p}-1}(x)dx,$$

$$I_{10} = \int\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x)\nu_3(x)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1}\psi_r^{\overline{p}}(x)dx$$

и функция $h_2(x)$ определена равенством (4.9).

Оцениваем далее интегралы $I_j$. Используя неравенство Гельдера, условие a$_2$) и неравенство (4.5), имеем

$$I_7 \leqslant \widetilde{M}(\rho)\Big\{\int\limits_{E(4\rho)} [h_2(x)]^{\frac{N}{p-\delta}}dx\Big\}^{\frac{p-\delta}{N}} \times$$

$$\times\Big\{\int\limits_{E(4\rho)} [u^{p-1}\psi_r^{\overline{p}-1}(x)]^{\frac{N}{N-p+\delta}}dx\Big\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{21}\widetilde{M}(\rho)\Big\{\int\limits_r^{4\rho} |x|^{-(N-p-\lambda)\frac{N}{N-p+\delta}+N-1}d|x|\Big\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} \leqslant C_{22}\widetilde{M}(\rho)\rho^{\lambda+\delta}. \tag{4.21}$$

Применяя неравенство Юнга и Гельдера, получаем оценку

$$C_{20}I_8 \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}(x)u^q(x)\psi_r^{\overline{p}}(x)dx + C_{23}I_{11}I_{12}, \tag{4.22}$$

где

$$I_{11} = \Big\{\int\limits_{E(4\rho)} \frac{1}{u}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p\psi_r^{\overline{p}}(x)dx\Big\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}},$$

$$I_{12} = \Big\{\int\limits_{E(4\rho)} [u^{(\rho)}(x)]^{(1-\frac{p-1}{pq})\overline{p}}\Big|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\Big|^{\overline{p}}dx\Big\}^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}}.$$

В следующем неравенстве использованы оценки для $u^{(\rho)}(x)$ и $\left|\dfrac{\partial\psi_r}{\partial x}\right|$, получаемые из представлений (4.12) и (4.1):

$$I_{12} \leqslant C_{24}[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)] \left[\ln\ln\frac{1}{r}\right]^{-\frac{qp}{qp-p+1}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_r^{R(r)} \frac{|x|^{N-1}d|x|}{\left[\ln\frac{1}{|x|}\right]^{\overline{p}} |x|^{\overline{p}}} \right\}^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} \leqslant C_{25}\widetilde{M}(\rho)\, F_3(r), \qquad (4.23)$$

где

$$F_3(r) = [R(r)]^{(N-\overline{p})\frac{q-p+1}{qp-p+1}}, \quad \text{если} \quad q > \frac{N(p-1)}{N-p},$$

$$F_3(r) = \left[\ln\frac{1}{R(r)}\right]^{-(N-1)\frac{q-p+1}{qp-p+1}}, \quad \text{если} \quad q = \frac{N(p-1)}{N-p},$$

и $R(r)$ определено равенством (4.2).

Оценку для $I_9$ получаем, применяя неравенства Гельдера, (4.5), условие $\mathrm{a}_2$) и оценку для $\left|\dfrac{\partial\psi_r(x)}{\partial x}\right|$, следующую из (4.1):

$$I_9 \leqslant [\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]\left\{ \int\limits_{E(4\rho)} [f_2(x) + g_2(x)]^{\frac{N}{p-1-\delta}}\, dx \right\}^{\frac{p-1-\delta}{N}} \times$$

$$\times\left\{ \int\limits_{E(4\rho)} \left[u^{p-1}(x)\left|\frac{\partial\psi_r}{\partial x}\right|\psi_r^{\overline{p}-1}(x)\right]^{\frac{N}{N-p+1+\delta}} dx \right\}^{\frac{N-p+1+\delta}{N}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{26}\left[\ln\ln\frac{1}{r}\right]^{-1} \widetilde{M}(\rho)\left\{ \int\limits_r^{R(r)} \left[|x|^{-(N-p-\lambda+1)}\frac{1}{\ln\frac{1}{|x|}}\right]^{\frac{N}{N-p+1+\delta}} |x|^{N-1}d|x| \right\}^{\frac{N-p+1+\delta}{N}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{27}\widetilde{M}(\rho)[R(r)]^{\lambda+\delta}. \qquad (4.24)$$

Используя неравенства Юнга, Гельдера, (4.5) и выбор $\kappa$, имеем

$$I_{10} \leqslant \frac{1}{2C_{20}} \int\limits_{E(\rho,4\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx + C_{28}\widetilde{M}(\rho)\rho^{\lambda+\delta} +$$

$$+ C_{28}[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]\left\{ \int\limits_{E(\rho,4\rho)} [u(x) - \widetilde{M}(4\rho)]^{-\kappa}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \rho^{\frac{\lambda+\delta}{2p}}. \qquad (4.25)$$

Теперь из неравенств (4.20) – (4.25), (4.6) и (4.13) получаем

$$\int\limits_{E(\rho,4\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x)dx \leqslant C_{29}\widetilde{M}(\rho)\Bigg\{\rho^{\frac{\lambda+\delta}{2}} + F_2(r)+$$

$$+F_3(r)\left[\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)^{-\overline{p}} F_1(r,\rho) + \rho^{\lambda+\delta}\ln\frac{1}{\rho}\right]^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} +$$

$$+[F_2(r)]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)^{-\overline{p}} F_1(r,\rho) + \rho^{\lambda+\delta}\ln\frac{1}{r}\right]^{\frac{p-1}{p}}\Bigg\}. \tag{4.26}$$

Выберем теперь число $\theta \in (0,1)$, введенное в равенстве (4.2), из следующих условий:

$$-\theta(N-1)\,(q-p+1) + \left(2-\frac{N}{p}\right)q(p-1) < 0,\ \theta > \left[1-\frac{N}{2p}\right]_+,$$

$$\text{если}\quad q = \frac{N(p-1)}{N-p},$$

$$\theta = 1-\frac{N}{2p},\quad \text{если}\quad q > \frac{N(p-1)}{N-p},\quad N<2p, \tag{4.27}$$

$$\theta = \frac{1}{2},\quad \text{если}\quad q > \frac{N(p-1)}{N-p},\quad N>2p.$$

Возможность выбора $\theta$, удовлетворяющего неравенствам (4.27), следует из того, что при $q = \dfrac{N(p-1)}{N-p}$, $p<N$

$$\left(2-\frac{N}{p}\right)q(p-1) < q(p-1) =$$

$$= \frac{N(p-1)^2}{N-p} < \frac{(N-1)p(p-1)}{N-p} = (N-1)(q-p+1).$$

Зафиксируем в дальнейшем число $\theta$, зависящее только от $N$, $p$ и удовлетворяющее условию (4.27).

Условие (4.27) дает возможность перейти к пределу в (4.26) при $r\to 0$. В результате получаем оценку

$$\int\limits_{E(\rho,4\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p dx \leqslant C_{29}\widetilde{M}(\rho)\rho^{\frac{\lambda+\delta}{2}},$$

что и завершает доказательство леммы 4.3.

**5. Доказательство теоремы 2.1.** Вначале получим вспомогательные поточечные оценки.

**Лемма 5.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда при* $0<\sigma<1$, $0<\rho<\dfrac{R_1}{3}$ *справедлива оценка*

$$\max\left\{[u(x)-\widetilde{M}(2\rho)]^{\tilde p} : \rho \leqslant |x| \leqslant 2\rho\right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_6 \sigma^{-\frac{Np}{\delta}} \rho^{-N} \int\limits_{E(2\rho)} [u(x)]^{\tilde p - p} [u_{2\rho}(x)]^p \varphi^p_{\rho,\sigma}(x)\, dx \tag{5.1}$$

*с* $\tilde p = \dfrac{Np}{\delta} + 1 + p$ *и постоянной* $K_6$, *зависящей только от известных параметров.*

***Доказательство.*** Подставим в интегральное тождество (2.3) пробную функцию

$$\varphi(x) = [u(x)]^k [u_{2\rho}(x)]^l \varphi^m_{\rho,\sigma}(x),$$

где $k, l, m$ — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $k \geqslant 0$, $l \geqslant 1$, $m \geqslant p$.

Аналогично доказательству неравенства (3.9) получим оценку

$$\int\limits_{E(2\rho)} u^k(x) u^{l-1}_{2\rho}(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \varphi^m_{\rho,\sigma}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{30} m^p \sigma^{-p} \rho^{-\delta} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[u^{k+p}(x) u^{l-1}_{2\rho}(x) \varphi^{m-p}_{\rho,\sigma}(x)\right]^{\frac{N}{N-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}}. \tag{5.2}$$

Применяя теорему вложения, из (5.2) получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{E(2\rho)} \big[u(x)\big]^{k\frac{N}{N-p}} \big[u_{2\rho}(x)\big]^{(l+p-1)\frac{N}{N-p}} \big[\varphi_{\rho,\sigma}(x)\big]^{m\frac{N}{N-p}} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{31} \big(k+l+m\big)^{\frac{2Np}{N-p}} \big[\sigma^{-p} \rho^{-\delta}\big]^{\frac{N}{N-p}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{E(2\rho)} \left[u^{k+p}(x) u^{l-1}_{2\rho}(x) \varphi^{m-p}_{\rho,\sigma}(x)\right]^{\frac{N}{N-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{N-p+\delta}{N-p}}. \tag{5.3}$$

Итерируя неравенства (5.3) при соответствующем выборе $k$, $l$, $m$, получаем оценку (5.1), что и завершает доказательство леммы 5.1.

**Лемма 5.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и оценка* (4.5). *Тогда существует постоянная* $K_7$, *зависящая лишь от известных параметров,* $R_1$, $\widetilde{M}\left(\dfrac{R_1}{4}\right)$ *и* $K'$, *такая, что выполняется оценка*

$$|u(x)| \leqslant K_7 \max\left\{ |x|^{-\frac{N-p-\lambda}{p-1} + \frac{\delta}{\tilde p}}, \ln^2 \frac{1}{|x|} \right\} \quad \textit{при} \quad 0 < |x| < R_1 \tag{5.4}$$

*с постоянной* $\tilde p$, *определенной в лемме* 5.1.

***Доказательство.*** Из неравенства (5.1) с $\sigma = \dfrac{1}{2}$ и (4.5) следует оценка

$$\left[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho)\right]^{\tilde{p}} \leqslant C_{32}\Bigg\{\rho^{-N-\frac{(\tilde{p}-p)(N-p-\lambda)}{p-1}} \times$$

$$\times \int\limits_{E(2\rho)} \max\left\{\left[\widetilde{M}\left(\frac{\rho}{2}\right) - \widetilde{M}(2\rho)\right]^{p},\ \left[u(x) - \widetilde{M}(2\rho)\right]^{p}\right\} dx + \left[\ln\frac{1}{\rho}\right]^{\tilde{p}}\Bigg\}. \qquad (5.5)$$

Далее оценим последний интеграл по неравенству Пуанкаре:

$$\left[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho)\right]^{\tilde{p}} \leqslant C_{33}\Bigg\{\rho^{-N+p-\frac{(\tilde{p}-p)(N-p-\lambda)}{p-1}} \int\limits_{E(\frac{\rho}{2},2\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p} dx + \left[\ln\frac{1}{\rho}\right]^{\tilde{p}}\Bigg\}. \qquad (5.6)$$

Используя неравенства (4.19) и (4.5), оцениваем интеграл в правой части неравенства (5.6):

$$\left[\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho)\right]^{\tilde{p}} \leqslant C_{34}\Bigg\{\rho^{-\frac{N-p-\lambda}{p-1}\tilde{p}+\delta} + \left[\ln\frac{1}{\rho}\right]^{\tilde{p}}\Bigg\}. \qquad (5.7)$$

Таким образом, получены оценки

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \leqslant C_{35}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{N-p-\lambda}{p-1}-\frac{\delta}{\tilde{p}}}, \quad \text{если} \quad \frac{N-p-\lambda}{p-1} - \frac{\delta}{\tilde{p}} > 0, \qquad (5.8)$$

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \leqslant C_{35}\ln\frac{1}{\rho}, \quad \text{если} \quad \frac{N-p-\lambda}{p-1} - \frac{\delta}{\tilde{p}} \leqslant 0. \qquad (5.9)$$

Рассмотрим последовательность

$$\rho_i = 2^{i-1}\rho, \quad i = 1, \ldots, I, \qquad (5.10)$$

где $I$ определяется условием $\dfrac{R_1}{4} < 2^I\rho \leqslant \dfrac{R_1}{2}$. Суммируя неравенства (5.8) с $\rho = \rho_i$, получаем оценку

$$\widetilde{M}(\rho) \leqslant \widetilde{M}\left(\frac{R_1}{4}\right) + C_{35}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{N-p-\lambda}{p-1}-\frac{\delta}{\tilde{p}}} \sum_{i=1}^{I}\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)^{\frac{N-p-\lambda}{p-1}-\frac{\delta}{\tilde{p}}} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}\left(\frac{R_1}{4}\right) + C_{36}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{N-p-\lambda}{p-1}-\frac{\delta}{\tilde{p}}}, \qquad (5.11)$$

если $\dfrac{N-p-\lambda}{p-1} - \dfrac{\delta}{\tilde{p}} > 0$.

Если же $\dfrac{N-p-\lambda}{p-1} - \dfrac{\delta}{\tilde{p}} \leqslant 0$, то, суммируя неравенства (5.9) с $\rho = \rho_i$, получаем

$$\widetilde{M}(\rho) \leqslant \widetilde{M}\left(\frac{R_1}{4}\right) + C_{35}\sum_{i=1}^{I}\ln\frac{1}{\rho_i} \leqslant \widetilde{M}\left(\frac{R_1}{4}\right) + C_{37}\ln^2\frac{R_1}{2\rho}. \qquad (5.12)$$

Оценка (5.4) следует из доказанных неравенств (5.11), (5.12), и, тем самым, доказательство леммы 5.2 завершено.

***Доказательство теоремы* 2.1.** Доказанная в теореме 2.2 оценка решения показывает, что выполнено неравенство (4.5) с

$$\lambda_0 = 0, \quad \text{если} \quad q = \frac{N(p-1)}{N-p},$$
$$\lambda_0 = N - p - \frac{p(p-1)}{q-p+1} > 0, \quad \text{если} \quad q > \frac{N(p-1)}{N-p}, \tag{5.13}$$

и постоянной $K'$, зависящей лишь от известных параметров.

Лемма 5.2 гарантирует последовательное улучшение неравенства (4.5) с увеличением на каждом шаге $\lambda$ на $\dfrac{\delta(p-1)}{\tilde{p}}$ до тех пор, пока $N-p-\lambda$ остается положительным. Таким образом, отправляясь от неравенства (4.5) со значением $\lambda_0$, определенным равенствами (5.13), получим, в силу леммы 5.2, после конечного числа шагов следующую оценку:

$$|u(x)| \leqslant C_{38} \ln^2 \frac{1}{|x|} \quad \text{при} \quad 0 < |x| < R_1 \tag{5.14}$$

с постоянной $C_{38}$, зависящей лишь от известных параметров.

Теперь уравнение (1.1) запишем в виде

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \tilde{a}_0\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0, \tag{5.15}$$

где $\tilde{a}_0(x,u,\xi) = a_0(x,u,\xi) + \tilde{g}(x)$,

$$\tilde{g}(x) = g(x, u(x)). \tag{5.16}$$

В правой части равенства (5.16) $u(x)$ — рассматриваемое сингулярное решение уравнения (2.1), для которого установлена оценка (5.14).

Рассмотрим $u(x)$ как локальное решение уравнения (5.15) в $B(R_1) \setminus \{0\}$. Поскольку определенная равенством (5.16) функция $\tilde{g}(x)$ принадлежит $L_{p_3}(B(R_1))$, коэффициенты уравнения (5.15) удовлетворяют условиям $\mathrm{a}_1), \mathrm{a}_2)$. Известно [2], что особенность решения $u(x)$ уравнения (5.15) устранима, если при $N > p > 1$ выполнено условие (1.4). Так как неравенство (5.14) обеспечивает выполнение условия (1.4), доказана устранимость особенности $u(x)$ в нуле, и, тем самым, доказательство теоремы 2.1 завершено.


1. *Veron L.* Singularities of solutions of second order quasilinear equations // Pitman Res. Notes in Math. Ser. – 1995. – **353**.
2. *Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasilinear equations // Acta Math. – 1964. – **111**. – P. 247 – 302.
3. *Serrin J.* Isolated singularities of solutions of quasilinear equations // Ibid. – 1965. – **113**. – P. 219 – 240.
4. *Nicolosi F., Skrypnik I. V., Skrypnik I. I.* Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities // Communs Part. Different. Equat. – 2003. – **28**, № 3 – 4. – P. 677 – 696.
5. *Brezis H., Veron L.* Removable singularities of some nonlinear equations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1980. – **75**. – P. 1 – 6.
6. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений нелинейных уравнений второго порядка // Мат. сб. – 1988. – **135**. – С. 346 – 360.
7. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 374 с.


Получено 17.11.2004