УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Л. Рекке (Ун-т им. Гумбольдта, Берлин, Германия)

УСЛОВИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

By using methods of perturbation theory, we investigate the global behavior of trajectories on a toroidal attractor and in its neighborhood for a system of differential equations that appears in the study of the synchronization of oscillations of the mathematical model of an optical laser.

Методами теорії збурень досліджено глобальну поведінку траєкторій на тороїдальному атракторі та в його околі для системи диференціальних рівнянь, що виникає при дослідженні синхронізації коливань математичної моделі оптичного лазера.

Будем рассматривать систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + g(x)|y|^2, \\ \frac{dy}{dt} &= h(x)y + \gamma e^{i\alpha t}a(\beta t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{C}$, $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ и $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — достаточно гладкие функции, функция a — 2π-периодическая, α, β и γ — действительные параметры. Предполагаем, что при $\gamma = 0$ существует экспоненциально орбитально устойчивое квазипериодическое решение

$$x = x_0(\beta_0 t), \quad y = r_0(\beta_0 t)e^{i\alpha_0 t} \tag{2}$$

типа модулированной волны. Тогда, очевидно, система (1) при $\gamma = 0$ имеет инвариантный тор размерности два:

$$\mathcal{T}_2 = \left\{\left(x_0(\varphi),\ r_0(\varphi)e^{i\psi}\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}\colon\ \varphi, \psi \in \mathbb{R}\right\}.$$

Цель настоящей работы — описать явление практически точной синхронизации частоты β возмущения в (1) и частоты β_0 решения (2) при $\alpha \to \infty$ и $\beta \approx \beta_0$. Иначе говоря, мы покажем, что при естественных предположениях справедливо следующее утверждение.

Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha_* > 0$, $\gamma_* > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при

$$\alpha > \alpha_*, \quad \beta_-\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) < \beta < \beta_+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right), \qquad \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| < \gamma_*$$

для почти всех решений $x(t)$, $y(t)$ системы (1), которые в некоторый момент времени t_0 принадлежат δ-окрестности тора $\mathcal{T}_2$, существует $\varphi \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|x(t) - x_0(\beta t + \varphi)| + ||y(t)| - r_0(\beta t + \varphi)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty). \tag{3}$$

Здесь функции $\beta_-, \beta_+\colon [0, \gamma_*] \to \mathbb{R}$, описывающие „конус синхронизации", характеризуются свойствами

$$\beta_-(0) = \beta_+(0) = \beta_0, \qquad \beta_-'(0) = \beta_+'(0) = 0.$$

Система (1) — это простейшая модель для лазера под действием внешнего оптического сигнала. Здесь α — оптическая частота, β — частота модуляции и γ — интенсивность внешнего оптического сигнала. Решение (2) описывает автоколебательное состояние лазера, где α_0 — оптическая частота и β_0 — частота модуляции этого состояния. Вектор-функция $x(t)$ описывает плотность электронов в различных секциях лазера (мы имеем в виду так называемые мультисекционные полупроводниковые лазеры [1, 2]), скалярная функция $y(t)$ — это комплексная амплитуда светового поля в некоторой аппроксимации типа Галеркина [3]. В частности, $|y(t)|$ описывает интенсивность излучения лазера. Для автоколебательного состояния (2) эта интенсивность периодична с частотой β_0. Используя эту терминологию, явление „аппроксимационной синхронизации" (3) означает следующее: если разность оптических частот α и α_0 достаточно велика, а разность частот модуляции β и β_0 достаточно мала, то интенсивность света лазера на достаточно большом промежутке времени „почти" периодична с частотой β, т. е. с частотой модуляции внешнего оптического сигнала. Это явление наблюдалось экспериментально (см. [4]), и возможно использование его в оптоэлектронных сетях.

Заметим, что задача (1) при $\alpha \approx \alpha_0$ и $\beta \approx \beta_0$ рассмотрена в [5] и применена к лазерным моделям в [6, 7].

Отметим также, что задача (1) при $\beta = \beta_0$ (описывающая поведение стационарного состояния лазера под действием стационарного внешнего оптического сигнала) рассмотрена, например, в [8 – 10].

Итак, рассматриваем систему уравнений (1). В полярных координатах, вводимых вместо y согласно формуле замены

$$y = re^{i(\alpha t - \theta)}, \tag{4}$$

система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + g(x)r^2, \\ \frac{dr}{dt} &= h_1(x)r + \gamma\big(a_1(\beta t)\cos\theta - a_2(\beta t)\sin\theta\big), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \alpha - h_2(x) - \frac{\gamma}{r}\Big(a_1(\beta t)\sin\theta + a_2(\beta t)\cos\theta\Big), \end{aligned} \tag{5}$$

где обозначено

$$h_1(x) = \operatorname{Re} h(x), \qquad h_2(x) = \operatorname{Im} h(x),$$

$$a_1(\beta t) = \operatorname{Re} a(\beta t), \qquad a_2(\beta t) = \operatorname{Im} a(\beta t).$$

Предполагаем, что α — большой параметр, так что в системе уравнений (5) можно ввести малый параметр $\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha}$.

Замена переменных

$$r = \rho + \varepsilon\gamma\big(a_1(\beta t)\sin\theta + a_2(\beta t)\cos\theta\big),$$

$$\theta = \theta_1 + \frac{\varepsilon}{r}\gamma\big(a_1(\beta t)\cos\theta - a_2(\beta t)\sin\theta\big)$$

преобразует систему уравнений (5) к системе с явно выделенной невозмущенной частью

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)\rho^2 + \varepsilon X(x, \rho, \theta_1, \beta t, \varepsilon), \tag{6}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = h_1(x)\rho + \varepsilon R(x, \rho, \theta_1, \beta t, \varepsilon), \tag{7}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha - h_2(x) + \varepsilon Q(x, \rho, \theta_1, \beta t, \varepsilon), \tag{8}$$

где X, R, Q — функции, определенные при

$$x \in D, \quad \rho \geq \rho_0 > 0 \tag{9}$$

и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, имеют гладкость по x, ρ, θ такую же, а по $\varphi = \beta t$ на единицу меньшую, чем гладкость правых частей системы (5), 2π-периодические по $\theta, \varphi = \beta t$, аналитические по ε при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Систему уравнений (6) – (8) рассматриваем в предположении, что при $\varepsilon = 0$ два первых ее уравнения имеют периодическое решение

$$x = x_0(\beta_0 t), \qquad \rho = r_0(\beta_0 t), \tag{10}$$

описывающее замкнутую траекторию в области (9) фазового пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$x = x_0(\psi), \qquad \rho = r_0(\psi), \quad \psi \in \mathcal{T}_1, \tag{11}$$

где $\mathcal{T}_1$ — окружность, x_0, r_0 — 2π-периодические функции переменной ψ.

Будем предполагать, что траектория (11) экспоненциально устойчива в силу ее уравнений в вариациях. Последнее предполагает, что $(n-1)$-е собственное значение матрицы монодромии уравнений в вариациях решения (10) лежит внутри круга единичного радиуса.

С целью упрощения выкладок придадим системе уравнений (6) – (8) более общий вид, положив

$$z = (x, \rho).$$

В результате система уравнений (6) – (8) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = F(z) + \varepsilon F_1(z, \theta_1, \beta t, \varepsilon), \tag{12}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha + f_0(z) + \varepsilon Q(z, \theta_1, \beta t, \varepsilon), \tag{13}$$

периодическое решение (10) системы (6), (7) при $\varepsilon = 0$ — вид периодического решения

$$z = z_0(\beta_0 t) = \big(x_0(\beta_0 t), r_0(\beta_0 t)\big)$$

уравнения (12) при $\varepsilon = 0$, траектория (11) — вид траектории

$$z = z_0(\psi), \quad \psi \in \mathcal{T}_1. \tag{14}$$

Поэтому имеем тождество

$$\frac{dz_0(\psi)}{d\psi} = \frac{F\big(z_0(\psi)\big)}{\beta_0}, \quad \psi \in \mathcal{T}_1, \tag{15}$$

и уравнение в вариациях для (14):

$$\frac{d\delta z}{d\psi} = \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial F\big(z_0(\psi)\big)}{\partial z} \delta z. \tag{16}$$

Из предположений о собственных значениях матрицы монодромии уравнения (16) согласно теории Флоке – Ляпунова следует, что можно указать $(n-1)$-мерную постоянную матрицу H с отрицательными вещественными частями собственных чисел и $n \times (n-1)$-мерную 2π-периодическую* матрицу $\Phi(\psi)$ такие, что

$$\beta_0 \Phi'(\psi) + \Phi(\psi) H = \frac{\partial F(z_0(\psi))}{\partial z} \Phi(\psi), \tag{17}$$

$$\det\left(z_0'(\psi), \Phi(\psi)\right) \neq 0, \quad \psi \in \mathcal{T}_1, \tag{18}$$

где штрихом обозначена производная $\dfrac{d}{d\psi}$.

Используем изложенное выше и преобразуем систему уравнений (12), (13) к нужному нам виду, введя вместо z новые координаты ψ, h согласно формуле замены

$$z = z_0(\psi) + \mu \Phi(\psi) h, \tag{19}$$

где μ — малый положительный параметр, порядок малости которого по отношению к ε определим позже. Из (12) с учетом замены (19) и равенства (15) имеем

$$\begin{gathered}\left(z_0'(\psi) + \mu \Phi'(\psi) h\right)\left(\frac{d\psi}{dt} - \beta_0\right) + \Phi(\psi)\left(\frac{dh}{dt} - Hh\right)\mu + \\ + F(z_0(\psi)) + \mu \Phi'(\psi)\beta_0 h + \mu \Phi(\psi) Hh = \\ = F\left(z_0(\psi) + \mu \Phi(\psi) h\right) + \varepsilon F_1\left(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon\right).\end{gathered} \tag{20}$$

С учетом (17) из (20) получаем

$$\begin{gathered}\left(z_0'(\psi) + \mu \Phi'(\psi) h\right)\left(\frac{d\psi}{dt} - \beta_0\right) + \Phi(\psi)\left(\frac{dh}{dt} - Hh\right)\mu = \\ = F\left(z_0(\psi) + \mu \Phi(\psi) h\right) - F(z_0(\psi)) - \mu \frac{\partial F(z_0(\psi))}{\partial z} \Phi(\psi) h + \\ + \varepsilon F_1\left(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon\right).\end{gathered} \tag{21}$$

Условие (18) дает возможность выбрать достаточно малое $\mu_0 > 0$ так, чтобы для любых μ и h из области

$$\mu \in (0, \mu_0), \quad \|h\| < 1 \tag{22}$$

уравнение (21) разрешалось относительно производных $\dfrac{d\psi}{dt}$ и $\dfrac{dh}{dt}$ в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta_0 + L_1(\psi, \mu h)\left[F_2(\psi, \mu h) + \varepsilon F_1\left(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon\right)\right], \tag{23}$$

$$\frac{dh}{dt} = Hh + L_2(\psi, \mu h)\left[\frac{1}{\mu} F_2(\psi, \mu h) + \frac{\varepsilon}{\mu} F_1\left(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon\right)\right], \tag{24}$$

где

$$F_2(\psi, \mu h) = F\left(z_0(\psi) + \mu \Phi(\psi) h\right) - F(z_0(\psi)) - \mu \frac{\partial F(z_0(\psi))}{\partial z} \Phi(\psi) h,$$

$L_1(\psi, \mu h)$ и $L_2(\psi, \mu h)$ — блоки матрицы, обратной к матрице

---

* Отметим, что случай, когда ради вещественности матрицы $\Phi(\psi)$ иногда приходится выбирать в качестве $\Phi(\psi)$ 4π-периодическую матрицу, не имеет принципиального характера для проводимых далее рассуждений, тем более что из-за устойчивости траектории (14) интегральное многообразие, которое порождается этой траекторией, оказывается 2π-периодическим по ψ.

$$\left(z_0'(\psi) + \mu\Phi'(\psi)h, \quad \Phi(\psi)\right).$$

Поскольку

$$\frac{1}{\mu}F_2(\psi, \mu h) = \mu \int_0^1\int_0^t \frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{\partial F(z_0(\psi) + \mu s\Phi(\psi)h)}{\partial z}\Phi(\psi)h\right],$$

$$ds\,dt\,\Phi(\psi)h = \mu F_3(\psi, h, \mu)\Phi(\psi)h,$$

система уравнений (23), (24) при

$$\frac{\varepsilon}{\mu^2} = \varepsilon_1 \le 1 \tag{25}$$

принимает вид системы

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta_0 + \mu^2 L_1(\psi, \mu h)\left[F_3(\psi, h, \mu)\Phi(\psi)h + \varepsilon_1 F_1(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon)\right], \tag{26}$$

$$\frac{dh}{dt} = Hh + \mu L_2(\psi, h\mu)\left[F_3(\psi, h, \mu)\Phi(\psi)h + \varepsilon_1 F_1(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon)\right]. \tag{27}$$

Присоединим к (26), (27) уравнение (13), выполнив в нем замену (19):

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha + f_0(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h) + \varepsilon Q(z_0(\psi) + \mu\Phi(\psi)h, \theta_1, \beta t, \varepsilon). \tag{28}$$

Обозначим

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(z_0(\psi))\,d\psi \tag{29}$$

и выполним в системе (26) – (28) замену угловой переменной θ_1 на φ согласно формуле замены

$$\theta_1 = \varphi + \int^{\psi}\left[f_0(z_0(\psi)) - \bar{f}_0\right]d\psi, \tag{30}$$

где $\int^{\psi}$ означает какую-нибудь первообразную функции $f_0(z_0(\psi)) - \alpha_0$. В результате замены (30) система уравнений (26) – (28) преобразуется в систему

$$\frac{dh}{dt} = Hh + \mu R(h, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{31}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta_0 + \mu^2\Psi(h, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{32}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \mu f_1(h, \psi, \mu)h + \varepsilon Q(h, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{33}$$

в которой R, Ψ, Q, f_1 — функции, определенные в области (22), (25) и имеющие все свойства функций, определяющих правые части системы (26) – (28), в частности, они периодические по ψ, φ, t и удовлетворяют условию

$$|R|_{l-2} + |\Psi|_{l-2} + |Q|_{l-2} \le M, \tag{34}$$

где через $|\cdot|_r$ обозначена r-я дифференциальная норма, определяемая как сумма норм функции и всех ее производных до порядка r включительно, $|\cdot|_0$ — обычная норма в пространстве непрерывных на компакте функций, M —

постоянная, не зависящая от параметров μ и α, l — гладкость функций f, g, h, a правой части системы (1).

Если положить в (31) – (33)

$$\psi' = \beta t \tag{35}$$

и присоединить к (31) – (33) уравнение

$$\frac{d\psi'}{dt} = \beta, \tag{36}$$

то вместо (31) – (33) получим динамическую систему (31) – (33), (36) с фазовым пространством $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{T}_3$, где $\mathcal{T}_3$ — трехмерный тор. Поэтому к системе (31) – (33), (36) применима теория возмущения инвариантных тороидальных многообразий динамических систем в разнообразных ее изложениях [11 – 14].

В случае системы (31) – (33) невозмущенная система имеет простейший из возможных вид

$$\frac{dh}{dt} = Hh, \quad \frac{d\psi}{dt} = \beta_0, \quad \frac{d\psi'}{dt} = \beta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 \tag{37}$$

с той лишь особенностью, что α — большой параметр.

Однако, из теории возмущения тороидальных многообразий следует, что свойства сохранения при малых возмущениях инвариантных тороидальных многообразий определяются не самими невозмущенными уравнениями (в данном случае не уравнениями (37)), а уравнениями в вариациях порождающего тороидального многообразия. В рассматриваемой нами системе уравнений такими уравнениями являются уравнения

$$\frac{d\delta h}{dt} = H\delta h, \quad \frac{d\delta\psi}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta\psi'}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta\varphi}{dt} = 0,$$

которые не зависят от величины параметра α.

Единственное условие, кроме гладкости правых частей системы (31) – (33), которое существенно для сохранения при возмущении инвариантного тора

$$h = 0, \qquad (\psi, \psi, \varphi) \in \mathcal{T}_3$$

системы (37), связано с предположениями о собственных числах матрицы H, в данном случае с предположением, что

$$\left\| e^{Ht} \right\| \leq \mathcal{L} e^{-kt}, \quad t > 0, \tag{38}$$

где $\mathcal{L} = \text{const} \geq 1$, $k = \text{const} > 0$.

При выполнении этого условия согласно основной теореме [14] система уравнений (31) – (36) при достаточно малом μ_0 имеет в области (22), (25) инвариантное тороидальное многообразие вида

$$h = \mu u(\psi, \varphi, \psi', \mu, \varepsilon) \tag{39}$$

с определенными свойствами гладкости и устойчивости. С учетом формулы (35) многообразие (39) системы (31) – (36) является интегральным многообразием

$$h = \mu u(\psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) \tag{40}$$

системы уравнений (31) – (33).

Первое приближение к многообразию (40) согласно методу интегральных многообразий [11, 15] определяется по формуле

$$h \simeq \mu \int_{-\infty}^{0} e^{H\tau} R\big(0, \beta_0\tau + \psi, \big(\alpha + \bar f_0\big)\tau + \varphi, \beta(\tau + t), \mu, \varepsilon\big) d\tau. \tag{41}$$

Из (41) очевидным образом объясняются свойства многообразия (40), которые ему присущи, в частности, независимость оценок функции u и ее производных по $\psi, \varphi, \psi_1 = \beta t$, а также параметров μ, ε от значения α, определяемая неравенством

$$|u|_{l-3} \le M_1,$$

где M_1 не зависит от μ, α, ε.

С учетом замены (19) и формулы (40) из изложенного следует, что система уравнений (12), (13) имеет интегральное многообразие

$$z = z_0(\psi) + \varepsilon\Phi(\psi) u_1\left(\psi, \varphi, \beta t, \frac{1}{\alpha}\right), \tag{42}$$

$$\theta_1 = \varphi + \int_0^{\psi} \big(f_0(z_0(\psi)) - \bar f_0\big) d\psi, \tag{43}$$

где через u_1 обозначена функция

$$u_1\left(\psi, \varphi, \beta t, \frac{1}{\alpha}\right) = u(\psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon)\big|_{\mu = 1/\sqrt{\alpha},\, \varepsilon = 1/\alpha}.$$

На многообразии (42), (43) решения системы уравнений (12), (13) определяются системой уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta_0 + \varepsilon\Psi_1(\psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{44}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha + \bar f_0 + \varepsilon\Phi_1(\psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon). \tag{45}$$

Здесь через Ψ_1, Φ_1 обозначены функции

$$\Psi_1 = \Psi(\mu u_1, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{46}$$

$$Q_1 = f_1(\mu u_1, \psi, \mu) u_1 + Q(\mu u_1, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{47}$$

где $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha}$.

Выясним характер поведения решений системы (31), (32) в окрестности многообразия (39). Для этого воспользуемся известными результатами расщепления систем вида (31), (32) [16 – 18], согласно которым уравнения угловых переменных системы (31), (32) можно отщепить в отдельную подсистему. В частности, согласно [17, 18] для достаточно малого $\delta > 0$ можно так зафиксировать достаточно большое α_0, чтобы для любого $\alpha > \alpha_0$ указать замену переменных

$$\begin{aligned} h &= h_1 + \mu u(\psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \\ \psi &= \psi_1 + U(h_1, \psi_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon) h_1, \\ \varphi &= \varphi_1 + U_1(h_1, \psi_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon) h_1 \end{aligned} \tag{48}$$

с 2π-периодическими по $\psi_1, \varphi_1, \varphi_2 = \beta t$ матрицами U, U_1, определенными в области $|h_1| < \delta$ и удовлетворяющими условию

$$|U|_{l-5} + |U_1|_{l-5} \le M_2$$

с постоянной M_2, не зависящей от μ, α, такую, которая приводит систему уравнений (31) – (33) к системе

$$\frac{dh_1}{dt} = (H + \mu A(h_1, \psi_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon))h_1, \tag{49}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \beta_0 + \varepsilon\Psi_1(\psi_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{50}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_1(\psi_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{51}$$

где Ψ_1, Φ_1 — функции вида (46), (47), A — матрица, получаемая из R согласно замене переменных (48).

Из (49) – (51) следует, что при достаточно большом α_0 любое решение системы (49) – (51), начинающееся при $t = t_0$ в области

$$|h_1| < \frac{\delta}{\mathcal{L}},$$

где $\mathcal{L}$ — постоянная из оценки (38), удовлетворяет неравенству

$$\|h_1(t)\| \leq \mathcal{L}\, e^{-\frac{k}{2}(t-t_0)}\|h_1(t_0)\| \tag{52}$$

для всех $t \geq t_0$. Неравенство (52) с учетом формул замены переменных (48) обеспечивает притяжение решений системы уравнений (31) – (33), начинающихся при $t = t_0$ в малой окрестности многообразия (39), к решениям, начинающимся при $t = t_0$ на самом многообразии, по экспоненциальному закону притяжения вида (52).

Согласно методу последовательных приближений построения матриц U, U_1, предложенному в [17, 18], первые приближения к U и U_1 определяются по матрицам, обеспечивающим разложения правых частей уравнений (32), (33) вида

$$\Psi(h_1 + \mu u, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) - \Psi(\mu u, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) = A_1(h_1, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon)h_1,$$

$$f_1(h_1 + \mu u, \psi, \mu) - f_1(\mu u, \psi, \mu) = A_2(h_1, \psi, \mu)h_1,$$

$$Q(h_1 + \mu u, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) - Q(\mu u, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) = A_3(h_1, \psi, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon)h_1,$$

согласно формулам

$$U \simeq -\mu^2 \int_0^\infty A_1\big(h_1, \beta_0\tau + \psi_1, (\alpha + \bar{f}_0)\tau + \varphi_1, \beta\tau + \varphi, \mu, \varepsilon\big)e^{H\tau}\, d\tau, \tag{53}$$

$$U_1 \simeq -\Bigg[\mu \int_0^\infty A_2\big(h_1, \beta_0\tau + \psi_1, (\alpha + \bar{f}_0)\tau + \varphi_1, \beta\tau + \varphi, \mu, \varepsilon\big)e^{H\tau}\, d\tau +$$
$$+ \varepsilon \int_0^\infty A_3\big(h_1, \beta_0\tau + \psi_1, (\alpha + \bar{f}_0)\tau + \varphi_1, \beta\tau + \varphi, \mu, \varepsilon\big)e^{H\tau}\, d\tau\Bigg]. \tag{54}$$

Из формул (53), (54) видно, в частности, почему величина параметра α не играет существенной роли в определении свойств гладкости и ограниченности матриц U и U_1 и всех их производных по h_1, ψ_1, φ_1, $\varphi = \beta t$.

Исследуем теперь систему уравнений на многообразии (39). Эта система состоит из двух уравнений (44), (45), и мы будем рассматривать ее в предположении, что частоты β_0 и β близки между собой. Обозначим через $\varepsilon\Delta$ расстройку между β и β_0

$$\beta - \beta_0 = \varepsilon\Delta$$

и выполним в системе уравнений (44), (45) замену переменных, положив

$$\psi = \beta t + \theta.$$

В результате замены вместо (44), (45) получим систему уравнений

$$\frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon\Delta + \varepsilon\Psi_1(\beta t + \theta, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{55}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_1(\beta t + \theta, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon). \tag{56}$$

Положим

$$\Psi_0(\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_1(\psi + \theta, \varphi, \psi, 0, 0)\,d\psi\,d\varphi, \tag{57}$$

$$\Phi_0(\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_1(\psi + \theta, \varphi, \psi, 0, 0)\,d\psi\,d\varphi \tag{58}$$

и рассмотрим наряду с системой (55), (56) усредненную систему уравнений

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon(-\Delta + \Psi_0(\vartheta)), \tag{59}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0(\vartheta). \tag{60}$$

Будем предполагать, что на окружности $\mathcal{T}_1 = [0, 2\pi)$ уравнение

$$\Delta = \Psi_0(\vartheta)$$

имеет только два решения

$$\vartheta = \vartheta_0, \qquad \vartheta = \vartheta_2^0 \quad \left(\vartheta_1^0 < \vartheta_2^0\right)$$

таких, что

$$\Psi_0'\left(\vartheta_1^0\right) = -\beta_0 < 0, \qquad \Psi_0'\left(\vartheta_2^0\right) = \alpha_0 > 0.$$

Предположения означают, что усредненная система уравнений (59), (60) имеет на $\mathcal{T}_1$ два квазистатических положения равновесия: „нижнее”

$$\vartheta = \vartheta_1^0, \qquad \overline{\varphi} = \left(\alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0\left(\vartheta_1^0\right)\right)t + \overline{\varphi}_0$$

и „верхнее”

$$\vartheta = \vartheta_2^0, \qquad \overline{\varphi} = \left(\alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0\left(\vartheta_2^0\right)\right)t + \overline{\varphi}_0,$$

такие, что „нижнее” положение экспоненциально устойчивое, а „верхнее” — экспоненциально неустойчивое с показателями соответственно $-\varepsilon\beta_0$ и $\varepsilon\alpha_0$.

Система уравнений (55), (56) имеет вид стандартной системы нелинейной механики [11], и к ней применимы формулы асимптотического интегрирования метода Крылова – Боголюбова – Митропольского. С учетом формул первых приближений указанного метода замена переменных

$$\theta = \theta_1 + \frac{\varepsilon}{\beta}\int_0^{\beta t}\left[\overline{\Psi}_1(\psi + \theta_1, \psi, \mu, \varepsilon) - \overline{\Psi}_1^{(0)}(\theta_1, \mu, \varepsilon)\right]d\psi +$$

$$+\ \varepsilon^2 \int_0^{\varphi_1} \left[\Psi_1(\beta t+\theta_1, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) - \overline{\Psi}_1(\beta t+\theta_1, \beta t, \mu, \varepsilon)\right] d\varphi,$$

$$\overline{\varphi} = \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{\beta} \int_0^{\beta t} \left[\overline{\Phi}_1(\psi+\theta_1, \psi, \mu, \varepsilon) - \overline{\Phi}_1^{(0)}(\theta_1, \mu, \varepsilon)\right] d\psi +$$

$$+\ \varepsilon^2 \int_0^{\varphi_1} \left[\Phi_1(\beta t+\theta_1, \varphi, \beta t, \mu, \varepsilon) - \overline{\Phi}_1(\beta t+\theta_1, \beta t, \mu, \varepsilon)\right] d\varphi,$$

где

$$\overline{\Psi}_1(\psi+\theta, \psi, \mu, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\psi+\theta, \varphi, \psi, \mu, \varepsilon)\, d\varphi, \tag{61}$$

$$\overline{\Phi}_1(\psi+\theta, \psi, \mu, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1(\psi+\theta, \varphi, \psi, \mu, \varepsilon)\, d\varphi, \tag{62}$$

$$\overline{\Psi}_1^{(0)}(\theta, \mu, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\psi+\theta, \psi, \mu, \varepsilon)\, d\psi, \tag{63}$$

$$\overline{\Phi}_1^{(0)}(\theta, \mu, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1(\psi+\theta, \psi, \mu, \varepsilon)\, d\psi, \tag{64}$$

приводит систему уравнений (55), (56) к системе

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\varepsilon\Delta + \varepsilon\overline{\Psi}_1^{(0)}(\theta_1, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Psi_2(\theta_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{65}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\overline{\Phi}_1^{(0)}(\theta_1, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Phi_2(\theta_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{66}$$

функции Ψ_2, Φ_2 которой имеют свойства функций Ψ_1, Φ_1 с тем лишь изменением, что их гладкость на единицу меньше гладкости Ψ_1, Φ_1.

Поскольку согласно (57), (58), (61) – (64)

$$\overline{\Psi}_1^{(0)}(\theta, 0, 0) = \Psi_0(\theta),$$

$$\overline{\Phi}_1^{(0)}(\theta, 0, 0) = \Phi_0(\theta),$$

система (65), (66) принимает вид

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \varepsilon(-\Delta + \Psi_0(\theta_1)) + \varepsilon\mu\Psi_3(\theta_1, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 F(\theta_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{67}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0(\theta_1) + \varepsilon\mu\Phi_3(\theta_1, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 Q(\theta_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{68}$$

при этом функции Ψ_3, Φ_3, F, Q — 2π-периодические по переменным θ_1, φ_1, $\psi = \beta t$ и удовлетворяют условию

$$|\Psi_3|_{l-4} + |\Phi_3|_{l-4} + |F|_{l-4} + |Q|_{l-4} \le M_3 \tag{69}$$

с постоянной M_3, не зависящей от μ, α, ε в области

$$\mu = \frac{1}{\alpha^{1/2}} \le \mu_0, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\alpha} \le \mu_0^2 \tag{70}$$

при достаточно малом $\mu_0 > 0$.

Рассмотрим систему уравнений (67), (68). Обозначим

$$f_0(\theta_1) = \Psi_0(\theta_1) - \Delta.$$

Из разложений

$$f_0(\theta_1) = f_0\left(\vartheta_\nu^0 + \theta_1 - \vartheta_\nu^0\right) - f_0\left(\vartheta_\nu^0\right) =$$

$$= \left[f_0'\left(\vartheta_\nu^0\right) + \int_0^1 \left(f_0'\left(\vartheta_\nu^0 + s\left(\theta_1 - \vartheta_\nu^0\right)\right) - f_0'\left(\vartheta_\nu^0\right)\right)ds\right]\left(\theta_1 - \vartheta_\nu^0\right), \quad \nu = 1, 2, \tag{71}$$

следует, что при достаточно малом $\delta > 0$

$$-2\beta_0 \le \frac{f_0(\theta_1)}{\theta_1 - \vartheta_1^0} \le -\frac{\beta_0}{2}, \qquad \frac{\alpha_0}{2} \le \frac{f_0(\theta_1)}{\theta_1 - \vartheta_2^0} \le 2\alpha_0 \tag{72}$$

для всех θ_1 из области

$$\left|\theta_1 - \vartheta_\nu^0\right| < \delta, \quad \nu = 1, 2,$$

и

$$f_0(\theta_1) \le -m\delta, \quad \theta_1 \in \left[\vartheta_1^0 + \delta, \vartheta_2^0 - \delta\right], \tag{73}$$

$$f_0(\theta_1) \ge m\delta, \quad \theta_1 \in \left[\vartheta_1^0 - \delta, \vartheta_2^0 + \delta\right], \tag{74}$$

где

$$m = \min\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right). \tag{75}$$

Действительно, неравенства (72) непосредственно следуют из разложений (71) и непрерывности функции $f_0'(\theta_1)$. Неравенства (73), (74) — это следствие того, что функция $f_0(\theta_1)$ на $\mathcal{T}_1$ имеет лишь два нуля $\theta_1 = \vartheta_\nu^0$, $\nu = 1, 2$, так что начиная с некоторого достаточно малого $\delta > 0$ ее максимальное и минимальное значения в областях (73), (74) достигаются на границе этих областей, следовательно, эти значения удовлетворяют неравенствам (72), но тогда для них выполняются неравенства (73), (74), что доказывает оценки (73), (74).

Из неравенств (73), (74) и оценки (69) следуют оценки

$$f_0(\theta_1) + \mu\Psi_3 + \varepsilon F \le -m\delta + 2\mu M_3 \le -\frac{m\delta}{2}$$

для

$$\theta_1 \in \left[\vartheta_1^0 + \delta, \vartheta_2^0 - \delta\right], \tag{76}$$

$$f_0(\theta_1) + \mu\Psi_3 + \varepsilon F \ge m\delta - 2\mu M_3 \ge \frac{m\delta}{2}$$

для

$$\theta_1 \in \left[\vartheta_1^0 - \delta, \vartheta_2^0 + \delta\right], \tag{77}$$

лишь только μ_0 выбрать настолько малым, чтобы выполнялось условие

$$\mu_0 \le \frac{m\delta}{4M_3}, \tag{78}$$

и μ, ε выбирать из области (70), где μ_0 удовлетворяет неравенству (78).

Из неравенств (76), (77) следует, что любое решение $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ системы (67), (68), которое в какой-нибудь момент $t = t_0$ достигает значения

$$\theta_1(t_0) = \vartheta_2^0 - \delta, \tag{79}$$

при $t > t_0$ за конечный отрезок времени $T > 0$ достигает значения

$$\theta_1(t_0 + T) = \vartheta_1^0 + \delta.$$

Действительно, согласно (67) из (79) и неравенства (75) следует, что

$$\frac{d\theta_1}{dt}(t_0) \le -\frac{\mu m\delta}{2}.$$

Поэтому функция $\theta_1(t)$ при $t > t_0$ уменьшается и в какой-то момент $t = t_0 + T$ должна достичь значения $\theta_1(t_0 + T) = \vartheta_1^0 + \delta$, так как в противном случае имело бы место неравенство

$$\frac{d\theta(t)}{dt} \le -\frac{\mu m\delta}{2} \tag{80}$$

для всех $t > t_0$. Из (80) следовало бы, что

$$\theta(t) \le \theta(t_0) - \frac{\mu m\delta}{2}(t - t_0), \quad t > t_0, \tag{81}$$

и неравенство (81) противоречило бы тому, что $\theta_1(t)$ не достигает при $t > t_0$ значения $\vartheta_1^0 + \delta$.

Для оценки T сверху имеем неравенство

$$\theta_1(t_0 + T) = \vartheta_1^0 + \delta = \vartheta_2^0 - \delta + \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\theta_1(t)}{dt}dt \le \vartheta_2^0 - \delta - \frac{\mu m\delta}{2}T,$$

из которого следует, что

$$T \le \frac{2}{\mu m\delta}\left(\vartheta_2^0 - \vartheta_1^0 - 2\delta\right).$$

Докажем теперь, что

$$\vartheta_1^0 - \delta < \theta_1(t) < \vartheta_1^0 + \delta, \quad t > t_0 + T. \tag{82}$$

Действительно, так как в точке $t = t_0 + T$ производная функции $\theta_1(t)$ отрицательна, то при увеличении t от $t_0 + T$ выполняется неравенство (82) для всех t близких, но больших, чем $t_0 + T$. Пусть в какой-то момент $t = t_2 > t_0 + T$ функция $\theta_1(t)$ достигает границы области $(\vartheta_1^0 - \delta,\ \vartheta_1^0 + \delta)$, тогда при $t_0 + T < t < t_2$ выполняется неравенство (82) и одно из равенств

$$\theta_1(t_2) = \vartheta_1^0 - \delta, \qquad \theta_1(t_2) = \vartheta_1^0 + \delta. \tag{83}$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество нулей функции $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ при $t_0 + T \le t \le t_2$ и положим $\tau = \sup\mathcal{N}$. Поскольку

$$\frac{d\theta_1(t_1)}{dt} < 0, \qquad \frac{d\theta_1(t_2)}{dt} > 0,$$

то τ существует и $t_0 + T < \tau < t_2$. Но тогда согласно неравенству (82) для t из отрезка $[t_0 + T, t_2]$ имеем

$$\vartheta_1^0 - \delta < \theta_1(\tau) < \vartheta_1^0 + \delta.$$

Пусть выполняется первое из равенств (83). Из определения τ следует соотношение

$$\frac{d\theta_1(t_1)}{dt} > 0, \quad \tau < t \le t_2,$$

поэтому

$$\vartheta_1^0 - \delta = \theta_1(t_2) = \theta_1(\tau) + \int_\tau^{t_2} \frac{d\theta_1(t)}{dt}\,dt > \theta_1(\tau) > \vartheta_1^0 - \delta,$$

что противоречиво. Противоречие доказывает, что при $t > t_0 + T$ функция $\theta_1(t)$ не достигает значения $\vartheta_1^0 - \delta$.

Аналогичное противоречие получим, предположив, что выполняется второе из равенств (83). Поэтому при $t > t_0 + T$ функция $\theta_1(t)$ не достигает значения $\vartheta_1^0 + \delta$.

Изложенное завершает доказательство неравенства (82) для любого решения $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ системы (67), (68), удовлетворяющего условию (79).

Аналогичные приведенным выше рассуждения доказывают, что любое решение $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ системы (67), (68), которое в какой-нибудь момент $t = t_0$ достигает значения

$$\theta_1(t_0) = \vartheta_2^0 + \delta,$$

при $t > t_0$ за конечный отрезок времени $T_1 > 0$ достигает значения

$$\theta_1(t_0 + T_1) = 2\pi + \left(\vartheta_1^0 - \delta\right)$$

и в дальнейшем удовлетворяет условию

$$\vartheta_1^0 + \delta \ge \theta_1(t) - 2\pi \ge \vartheta_1^0 - \delta, \quad t > t_0 + T_1. \tag{84}$$

Для оценки величины T_1 сверху имеем неравенство

$$\theta_1(t_0 + T_1) = 2\pi + \vartheta_1^0 - \delta = \vartheta_2^0 + \delta + \int_{t_0}^{t_0+T_1} \frac{d\theta_1(t)}{dt}dt \ge \vartheta_2^0 + \delta + \frac{\mu m\delta}{2}T_1,$$

из которого следует, что

$$T_1 \le \frac{2}{\mu m\delta}\left(2\pi + \vartheta_1^0 - \vartheta_2^0 - 2\delta\right).$$

Отметим, что так как θ_1, φ_1 выбраны на двумерном торе $\mathcal{T}_2$, то их значения отождествляются по модулю 2π, поэтому неравенство (84) означает, что $\theta_1(t)$ при $t > t_0 + T_1$ принимает значения на дуге $(\vartheta_1^0 - \delta,\ \vartheta_1^0 + \delta)$ окружности $\mathcal{T}_1 = (0, 2\pi)$, следовательно, решение $\theta_1(t)$, $\psi_1(t)$ при $t > t_0 + T_1$ остается в δ-окружности точки $\vartheta_1 = \vartheta_1^0$.

Очевидно, что любое решение $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ системы (67), (68), которое при $t = t_0$ принимает значение $\theta_1(t_0)$, принадлежащее одному из интервалов

$$\left(\vartheta_1^0 + \delta, \vartheta_2^0 - \delta\right), \quad \left(\vartheta_1^0 - \delta, \vartheta_2^0 + \delta\right),$$

за конечный отрезок времени, не превышающий соответственно значений T или T_1, достигает границы области $(\vartheta_1^0 - \delta,\ \vartheta_2^0 + \delta) \in \mathcal{T}_1$ и при дальнейшем увеличении t остается в этой области все последующее время.

Исследуем поведение решений системы (67), (68), начинающихся при $t = t_0$ в интервале $(\vartheta_1^0 - \delta,\ \vartheta_2^0 + \delta)$. В этой окрестности система уравнений (67), (68) является типичной системой амплитудно-фазовых уравнений теории нелинейных колебаний [11] и преобразуется к виду, к которому применимы результаты этой теории. Действительно, выполним в системе уравнений (67), (68) замену переменных, положив

$$\theta_1 = \vartheta_1^0 + \mu_1 h_1, \tag{85}$$

где $\mu_1 = \mu^{1/2}$. В результате, учитывая разложение (71), получаем вместо (67), (68) систему вида

$$\frac{dh_1}{dt} = -\varepsilon\lambda_1 h_1 + \varepsilon\mu_1 R_1(h_1, \varphi_1, \beta t, \mu_1, \mu, \varepsilon), \tag{86}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0\left(\vartheta_1^0\right) + \varepsilon\mu_1 Q_1(h_1, \varphi_1, \beta t, \mu_1, \mu, \varepsilon), \tag{87}$$

которая является возмущенной по отношению к системе уравнений

$$\frac{dh_1}{dt} = -\varepsilon\beta_0 h_1, \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\varphi_0\left(\vartheta_1^0\right).$$

Применяя к системе (86), (87) методы теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий аналогично тому, как это было сделано для системы уравнений (31) – (33), доказываем существование интегрального многообразия системы (86), (87)

$$h_1 = \mu_1 v(\varphi_1, \beta t, \mu_1, \mu, \varepsilon),$$

где v — 2π-периодическая по $\varphi_1,\ \varphi_2 = \beta t$ функция, имеющая $l - 5$ производных по $\varphi_1,\ \varphi_2 = \beta t,$ ограниченная вместе со своими производными постоянной, не зависящей от $\mu_1, \mu, \alpha, \varepsilon$.

С учетом замены (85) получаем, что система уравнений (67), (68) имеет интегральное многообразие

$$\theta_1 = \vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1, \beta t, \mu) \tag{88}$$

такое, что

$$\left|D^s v_1\right| \le M_4, \quad s = \overline{0, l-5}, \tag{89}$$

где

$$v_1(\varphi_1, \beta t, \mu) = v\left(\varphi_1, \beta t, \mu^{1/2}, \mu, \mu^2\right),$$

D^s — s-я производная по $\varphi_1,\ \varphi_2 = \beta t,\ M_4$ — постоянная, не зависящая от $\mu,\ \alpha$.

Система (86), (87) на многообразии (88) сводится к уравнению

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0\left(\vartheta_1^0\right) + \varepsilon\mu_1 Q_1(\mu_1 v_1, \varphi_1, \beta t, \mu_1, \mu, \varepsilon).$$

Согласно методу интегральных многообразий первое приближение к многообразию (88) определяется по формуле

$$h_1 \simeq \varepsilon\mu_1 \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon\beta_0\tau} R_1\Big(0, \left(\alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon\Phi_0\left(\vartheta_1^0\right)\right)\tau + \varphi_1,\ \beta\left(\hat{f} + t\right), \mu_1, \mu, \varepsilon\Big) d\varepsilon, \tag{90}$$

из которой становятся понятными все свойства многообразия (88) как предела итераций вида (90).

Докажем экспоненциальную устойчивость многообразия (88). Для этого выполним в системе уравнений (67), (68) замену переменных

$$\theta_1 = \vartheta_1^0 + \mu v_1 + z, \qquad v_1 = v_1(\varphi_1, \beta t, \mu).$$

В результате замены получаем уравнения вида

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon\Big[f_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z\big) - f_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1\big) + \mu Z(z, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon)\Big], \tag{91}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 +$$

$$+\ \varepsilon\Big[\Phi_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z\big) + \mu\Phi_3\big(\vartheta_1^0 + \mu v + z, \mu, \varepsilon\big) + \varepsilon Q\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon\big)\Big], \tag{92}$$

где через Z обозначена функция

$$Z = \Psi_3\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z, \mu, \varepsilon\big) - \Psi_3\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1, \mu, \varepsilon\big) +$$

$$+\ \mu\Big(F\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon\big) - F\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon\big)\Big) -$$

$$-\ \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1}\Big[\Phi_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z\big) - \Phi_0\big(\vartheta_1^0 + \mu V_1\big) +$$

$$+\ \mu\Big(\Phi_3\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z, \mu, \varepsilon\big) - \Phi_3\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1, \mu, \varepsilon\big)\Big) +$$

$$+\ \varepsilon\Big(Q\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1 + z, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon\big) - Q\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1, \varphi_1, \beta t, \mu, \varepsilon\big)\Big)\Big],$$

которая представима в виде

$$Z = Z_1 z. \tag{93}$$

Здесь функция Z_1 $l - 6$ раз непрерывно дифференцируема по z, φ_1, $\varphi = \beta t$ для всех z, φ_1, t и всех μ, ε из области (70), ограничена вместе со всеми своими производными постоянной M_5, не зависящей от μ, ε.

Из периодичности правых частей системы (91), (92) по z, φ_1, t следует существование решений $z(t)$, $\varphi_1(t)$ при произвольных значениях $z(t_0)$, $\varphi_1(t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и произвольном $t_0 \in \mathbb{R}$.

Более того, если значения

$$z_0 = z(t_0), \qquad (\varphi_1)_0 = \varphi_1(t_0)$$

выбраны из условия, что значение

$$\theta_1(t_0) = \vartheta_1^0 + \mu v_1((\varphi_1)_0, \alpha t_0, \mu) + z_0 \tag{94}$$

принадлежит δ-окрестности точки

$$\theta_1 = \vartheta_1^0, \tag{95}$$

то согласно доказанному выше функция

$$\theta_1(t) = \vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \alpha t, \mu, \varepsilon) = z(t),$$

определяющая вместе с $\varphi_1(t)$ решение системы (67), (68), при всех $t \geq t_0$ остается в δ-окрестности точки (95). Отсюда следует оценка для $z(t)$

$$|z(t) + \mu v_1(\varphi_1(t), \alpha t, \mu, \varepsilon)| \leq \delta, \quad t \geq t_0,$$

из которой с учетом неравенства (89) следует, что

$$|z(t)| \le \delta - \mu M_4 < \frac{\delta}{2}, \quad t \ge t_0, \tag{96}$$

лишь только $\mu \le \mu_0 < \dfrac{\delta}{2M_4}$.

Более того, если выполняются оценки

$$|z(t_0)| < \frac{\delta}{2}, \qquad \mu_0 < \frac{\delta}{2M_4}, \tag{97}$$

то согласно (89), (95) имеем

$$\left|\theta_1(t_0) - \vartheta_1^0\right| \le |\mu v_1((\varphi_1)_0, \alpha t_0, \mu)| + |z(t_0)| < \delta,$$

и значение $\theta_1(t_0)$ принадлежит δ-окрестности точки (95), следовательно, условия (97) гарантируют оценку (96) для функции $z(t)$, удовлетворяющей условию

$$|z(t_0)| < \frac{\delta}{2}. \tag{98}$$

Учитывая вид уравнения (91) и представление (93) функции z, находим оценку

$$\frac{dz^2(t)}{dt} \le 2\varepsilon\Big[f_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \beta t, \mu) + z(t)\big) - f_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \beta t, \mu)\big)\Big] +$$

$$+ 2\varepsilon\mu M_5 z^2(t). \tag{99}$$

Далее имеем

$$f_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \beta t, \mu) + z(t)\big) - f_0\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \beta t, \mu)\big) =$$

$$= -\lambda_1 z(t) + \int_0^1 \Big[f_0'\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \beta t, \mu) + s z(t), \mu, \varepsilon\big) - f_0'\big(\vartheta_1^0\big)\Big] ds\, z(t), \quad t \ge t_0. \tag{100}$$

Из (100) с учетом (89) и (96) следует, что для $0 \le s \le 1$, $t \ge t_0$

$$\left|f_0'\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi(t), \beta t, \mu) + s z(t)\big) - f_0'\big(\vartheta_1^0\big)\right| \le K_1 |\mu v_1(\varphi(t), \beta t, \mu) + s z(t)| \le$$

$$\le K_1(\mu M_4 + \delta - \mu M_4) = K_1 \delta, \quad t \ge t_0, \tag{101}$$

где K_1 — постоянная Липшица функции $f_0'(\theta_1)$. Из (99) – (101) следует оценка

$$\frac{dz^2(t)}{dt} \le 2\varepsilon(-\lambda_1 + K_1\delta + \mu M_5) z^2(t), \quad t \ge t_0. \tag{102}$$

Выберем настолько малые δ и μ_0, чтобы имело место неравенство

$$K_1\delta + M_5\mu_0 < \frac{\lambda_1}{2}. \tag{103}$$

При таком выборе неравенство (102) принимает вид

$$\frac{dz^2(t)}{dt} \le -\varepsilon\lambda_1 z^2(t), \quad t \ge t_0,$$

следовательно, приводит к оценке

$$|z(t)| \le e^{-\frac{\varepsilon\lambda_1}{2}(t - t_0)} |z(t_0)|, \quad t \ge t_0. \tag{104}$$

Поскольку $\mu_0 < \dfrac{\delta}{2M_4}$, для того, чтобы выполнялось неравенство (103), достаточно выбрать δ из условия

$$\delta\left(K_1 + \frac{M_5}{2M_4}\right) < \frac{\lambda_1}{2}.$$

В этом случае δ будет обеспечивать выполнение неравенства (104) и не зависеть от выбора параметра μ, следовательно, неравенство (104) имеет место для любого сколь угодно малого μ, лишь только $z(t_0)$ удовлетворяет неравенству (98) при фиксированном достаточно малом δ.

Согласно изложенному, каждое решение $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ системы уравнений (67), (68) такое, что

$$|z(t_0)| = \left|\theta_1(t_0) - \left(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t_0), \alpha t_0, \mu, \varepsilon)\right)\right| < \frac{\delta}{2}, \tag{105}$$

удовлетворяет условию

$$\left|\theta_1(t) - \left(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t), \alpha t, \mu, \varepsilon)\right)\right| \leq$$

$$\leq e^{-\varepsilon\frac{\lambda_1}{2}(t-t_0)}\left|\theta_1(t_0) - \left(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\varphi_1(t_0), \alpha t_0, \mu, \varepsilon)\right)\right| \tag{106}$$

для всех $t \geq t_0$.

Учитывая то, что при $\mu \to 0$ многообразие (88) стягивается в точку (95), легко фиксировать достаточно малые $\delta_0 > 0$ и $\rho = \rho(\delta_0) > 0$ так, чтобы область

$$\left|\theta_1 - \vartheta_1^0\right| < \delta_0 \tag{107}$$

содержала многообразие (88) вместе с его ρ-окрестностью и чтобы любое $\theta_1 = \theta_1(t_0)$ из области (107) удовлетворяло условию (105) для произвольного $t_0 \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\mu < \mu_0$.

При таком выборе δ_0, ρ любое решение системы (67), (68), у которого $\theta_1(t_0)$ вибирается из δ_0-окрестности точки ϑ_1^0, притягивается к многообразию (88) по закону (106).

В ρ-окрестности многообразия (88) система уравнений (67), (68), записанная в переменных z, φ_1 в виде системы (91), (92), ведет себя аналогично системе уравнений (31) – (33) в окрестности многообразия (39), а именно, допускает расщепление системы с отщеплением уравнения на многообразии (88). Иначе говоря, к системе уравнений (91), (92) применимы результаты [17, 18], согласно которым для достаточно малого $\rho > 0$ можно так фиксировать достаточно большое α_0, чтобы для любого $\alpha > \alpha_0$ существовала замена переменных

$$\varphi_1 = \varphi_2 + u_2(z, \varphi_2, \beta t, \mu, \varepsilon)z,$$

которая преобразует систему уравнений (91), (92) к виду

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon(-\beta_0 + \mu Z_2(z, \varphi_2, \beta t, \mu, \varepsilon))z, \tag{108}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 +$$

$$+ \varepsilon\left[\Phi_0\left(\vartheta_1^0 + \mu v_1\right) + \mu\Phi_3\left(\vartheta_1^0 + \mu v_1, \mu, \varepsilon\right) + \varepsilon Q\left(\vartheta_1^0 + \mu v_1, \varphi_2, \beta t, \mu, \varepsilon\right)\right]. \tag{109}$$

Здесь u_2 — $l-7$ раз непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая по φ_2, $\varphi = \beta t$ функция, ограниченная вместе со всеми своими производными постоянной, не зависящей от μ, α, ε, Z_2 — функция со свойствами функции Z_1 с тем лишь отличием, что ее гладкость относительно z, φ_2, $\varphi = \beta t$ на единицу меньше, чем гладкость функции Z.

Из изложенного следует, что решение системы (67), (68), которое при $t = t_0$ начинается в достаточно малой окрестности многообразия (88), притягивается к некоторому решению, начинающемуся при $t = t_0$ на многообразии (88), так, что

$$\left|\theta_1(t) - \bar{\theta}_1(t)\right| + \left|\varphi_1(t) - \bar{\varphi}_1(t)\right| \le$$

$$\le K e^{-\frac{\varepsilon\lambda_1}{2}(t-t_0)}\left(\left|\theta_1(t_0) - \bar{\theta}_1(t_0)\right| + \left|\varphi_1(t_0) - \bar{\varphi}_1(t_0)\right|\right), \quad t \ge t_0,$$

где $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ — решение системы (67), (68), $\bar{\theta}_1(t)$, $\bar{\varphi}_1(t)$ — решение системы (67), (68) на многообразии (88), K — некоторая постоянная, не зависящая от μ, α, ε.

Аналогичным образом исследуется система уравнений (67), (68) в окрестности точки

$$\theta_1 = \vartheta_2^0. \tag{110}$$

Все утверждения относительно поведения решений системы (67), (68) в окрестности точки $\theta_1 = \vartheta_1^0$ остаются в силе и относительно их поведения в окрестности точки (110) с тем лишь изменением, что предельное их поведение следует рассматривать при $t \to -\infty$.

В силу изложенного система (67), (68) имеет интегральное многообразие

$$\theta_1 = \vartheta_2^0 + \mu v_2(\varphi_1, \beta t, \mu)$$

со свойствами многообразия (88). Это многообразие характеризуется тем свойством, что для

$$z_1(t) = \theta_1(t) - \left(\vartheta_2^0 + \mu v_2(\varphi_1(t), \beta t, \mu)\right) \tag{111}$$

справедлива оценка

$$\frac{dz_1^2(t)}{dt} \ge \varepsilon\lambda_2 z_1^2(t) \tag{112}$$

для всех значений $t \ge t_0$, при которых решение $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$ системы (67), (68) принадлежит δ-окрестности точки (110). Из (112) следует, что для указанных значений $t \ge t_0$

$$|z_1(t)| \ge e^{\varepsilon\frac{\lambda_2}{2}(t-t_0)}|z_1(t_0)|. \tag{113}$$

Из (113) следует, что за конечный отрезок времени T, зависящий лишь от значения $z_1(t_0) \ne 0$, решение $\theta_1(t)$, $\varphi_1(t)$, начальное значение которого $\theta_1(t_0)$, $\varphi_1(t_0)$ при $t = t_0$ не принадлежит многообразию (111)

$$\theta_1(t_0) \ne \vartheta_2^0 + \mu v_2(\varphi_1(t_0), \beta t_0, \mu,),$$

достигает границы δ-окрестности точки (108), а затем за конечный отрезок времени δ-окрестности точки ϑ_1^0 и при дальнейшем увеличении t притягивается к одному из решений системы (67), (68), начинающемуся на многообразии (88) в соответствующий момент времени.

Подводя итог приведенным рассуждениям, получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть система уравнений* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *функции* f, g, h, a *являются* $l \geq 9$ *раз непрерывно дифференцируемыми по* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, a — 2π*-периодическая функция по* βt;

2) *при* $\gamma = 0$ *система уравнений* (1) *имеет однопараметрическое семейство двоякопериодических по* t *решений*

$$x = x_0(\beta_0 t + \psi_0), \qquad y = r_0(\beta_0 t + \psi_0)e^{i\alpha t}, \tag{114}$$

где x_0, r_0 — *вещественные* 2π*-периодические по* $\psi = \beta_0 t$ *функции,* β_0, α — *частоты,* ψ_0 — *произвольный параметр*;

3) *соответствующая уравнениям в вариациях семейства решений* (114) *системы* (1) *система уравнений*

$$\frac{d\delta x}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x_0(\beta_0 t)) + g(x_0(\beta_0 t))r_0^2(\beta_0 t)\Big)\right]\delta x + 2g(x_0(\beta_0 t))r_0(\beta_0 t)\delta r,$$

$$\frac{d\delta r}{dt} = \frac{\partial h_1(x_0(\beta_0 t))}{\partial x}r_0(\beta_0 t)\delta x + h_1(x_0(\beta_0 t))\delta r$$

имеет n *мультипликаторов матрицы монодромии, которые лежат внутри круга единичного радиуса плоскости* $\mathbb{C}$.

Тогда можно указать такое достаточно большое значение α_0, *что для любого*

$$\alpha > \alpha_0 \tag{115}$$

справедливы следующие утверждения:

1) *система уравнений* (1) *имеет интегральное многообразие*

$$\begin{aligned} x &= x_0(\psi) + \varepsilon u(\psi, \theta, \beta t, \varepsilon), \\ y &= e^{i(\alpha t + u_0(\psi) - \theta)}\big(r_0(t) + \varepsilon v(\psi, \theta, \beta t, \varepsilon)\big), \end{aligned} \tag{116}$$

решения на котором определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \beta_0 + \varepsilon f_1(\psi, \theta, \beta t, \varepsilon), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon f_2(\psi, \theta, \beta t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{117}$$

где u_0, u, v, f_1, f_2 — $l - 4$ *раз непрерывно дифференцируемые* 2π*-периодические функции переменных* $\psi, \theta, \varphi = \beta t$, *ограниченные вместе со всеми своими производными постоянной, не зависящей от* $\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha}$, $\bar{f}_0$ — *постоянная* (29);

2) *можно указать достаточно малые* $\delta > 0$, $\delta_1 = \delta_1(\delta) > 0$ *такие, что замена переменных*

$$x = x_0(\psi) + \varepsilon u(\psi, \theta, \beta t, \varepsilon) + \mu\Phi_0(\psi)h,$$

$$y = e^{i(\alpha t + u_0(\psi) - \theta)}\big(r_0(\psi) + \varepsilon v(\psi, \theta, \beta t, \varepsilon) + \mu\Phi_1(\psi)h\big),$$

$$\psi = \psi_1 + U(h, \psi_1, \theta_1, \beta t, \mu, \varepsilon)h,$$

$$\theta = \theta_1 + U_1(h, \psi_1, \theta_1, \beta t, \mu, \varepsilon)h$$

приводит систему уравнений (1) *для*

$$\|h\| < \delta \tag{118}$$

к системе

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \beta_0 + \varepsilon f_1(\psi_1, \theta_1, \beta t, \varepsilon),$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon f_2(\psi_1, \theta_1, \beta t, \varepsilon),$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(P_0(\psi_1) + \mu P_1(\psi_1, \theta_1, h_1, \mu, \varepsilon)\right)h,$$

решения которой $\psi_1(t)$, $\theta_1(t)$, $h(t)$ *при*

$$\|h(t_0)\| < \delta_1$$

принадлежат области (118) *для* $t \ge t_0$ *и удовлетворяют неравенству*

$$\|h(t)\| \le \mathcal{L}\, e^{-\frac{k}{2}(t-t_0)}\|h(t_0)\|, \quad t \ge t_0,$$

где Φ_0, Φ_1, U, U_1, P_0, P_1 — $l-5$ *раз непрерывно дифференцируемые по* $\psi_1, \theta_1, \varphi = \beta t, h$, 2π-*периодические по* $\psi_1, \theta_1, \varphi = \beta t$ *функции, ограниченные вместе со всеми своими производными постоянной, не зависящей от* $\mu = \dfrac{1}{\alpha^{1/2}}$, $\varepsilon, \mathcal{L} = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const} > 0$.

Поведение решений системы (1) на многообразии (116) определяет следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и, кроме того, система уравнений* (117), *определяющая решения* (1) *на многообразии* (116), *удовлетворяет таким условиям*:

1) $\beta - \beta_0 = \varepsilon\Delta$;

2) *функция*

$$f_0(\psi) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\psi, \theta, \varphi, 0)\, d\theta\, d\varphi$$

такая, что уравнение

$$f_0(\psi) = \Delta$$

имеет на $\mathcal{T}_1 = [0, 2\pi)$ *только два решения*

$$\psi = \vartheta_1^0, \qquad \psi = \vartheta_2^0 \quad \left(\vartheta_1^0 < \vartheta_2^0\right);$$

3) $f_0'\left(\vartheta_1^0\right) = -\lambda_1 < 0$, $f_0'\left(\vartheta_2^0\right) = \lambda_2 > 0$.

Тогда можно указать такое достаточно большое значение α_0, *что для любого*

$$\alpha > \alpha_0 \tag{119}$$

справедливы следующие утверждения:

1) *система уравнений* (1) *имеет на интегральном многообразии* (116) *два интегральных многообразия*

$$\psi = \vartheta_1^0 + \beta t + \mu v_1(\theta, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{120}$$

$$\varphi = \vartheta_2^0 + \beta t + \mu v_2(\theta, \beta t, \mu, \varepsilon), \tag{121}$$

решения на которых определяются соответственно уравнениями

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon f_2\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\theta, \beta t, \mu, \varepsilon), \theta, \beta t, \varepsilon\big),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon f_2\big(\vartheta_2^0 + \mu v_2(\theta, \beta t, \mu, \varepsilon), \theta, \beta t, \varepsilon\big), \tag{122}$$

где v_1, v_2 — $l-5$ *раз непрерывно дифференцируемые* 2π-*периодические по* θ, $\varphi = \beta t$ *функции, ограниченные вместе со своими производными постоянной, не зависящей от* μ, ε;

2) *можно указать достаточно малое* $\delta_0 > 0$ *такое, что замена переменных*

$$\psi = \vartheta_1^0 + \beta t + \mu v_1(\theta, \beta t, \mu, \varepsilon) + \mu_1 z,$$
$$\theta = \theta_1 + \Phi_3(\theta_1, z, \beta t, \mu_1, \mu, \varepsilon) z$$

приводит систему уравнений (117) *для всех*

$$\|z\| < \delta_0 \tag{123}$$

к системе

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon f_2\big(\vartheta_1^0 + \mu v_1(\theta_1, \beta t, \mu, \varepsilon), \theta_1, \beta t, \varepsilon\big),$$
$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon(-\lambda_1 + \mu_1 Z_1(\theta_1, z, \beta t, \mu_1, \mu, \varepsilon))z,$$

решения $\theta_1(t)$, $z(t)$ *которой при* $|z(t_0)| < \delta_0$ *принадлежат области* (123) *для* $t \geq t_0$ *и удовлетворяют неравенству*

$$|z(t)| \leq e^{-\frac{\varepsilon\lambda_1}{2}(t-t_0)}|z(t_0)|, \quad t \geq t_0,$$

где Φ_3, Z_1 — $l-7$ *раз непрерывно дифференцируемые по* $\theta_1, z, \beta t$, 2π-*периодические по* θ_1, $\varphi = \beta t$ *функции, ограниченные вместе со своими производными постоянной, не зависящей от* $\mu_1 = \mu^{1/2}$, μ, ε;

3) *решения* $\psi(t)$, $\theta(t)$ *системы уравнений* (117), *которые при* $t = t_0$ *не принадлежат интегральному многообразию* (121)

$$\psi(t_0) \neq \vartheta_2^0 + \beta t_0 + \mu v_2(\theta(t_0), \beta t_0, \mu, \varepsilon),$$

притягиваются при $t \geq t_0$ *к решениям* ψ_t, θ_t *системы* (117) *на интегральном многообразии* (120)

$$\psi_t = \vartheta_1^0 \beta t + \mu V_1(\theta_t, \beta t, \mu, \varepsilon),$$
$$\theta = \theta_t \text{ — решения уравнения (122),}$$

так, что

$$|\psi(t) - \psi_t| + |\theta(t) - \theta_t| \leq \mathcal{L}_1 e^{-\frac{\varepsilon\lambda_1}{2}(t-T)}\delta_0, \quad t \geq T,$$

для некоторого $T = T(\psi(t_0)) \geq t_0$ *и* $\mathcal{L}_1 = \text{const}$.

Следует заметить, что величина области приближения к интегральному многообразию (116) системы (1) определяется величиной области орбитальной устойчивости траектории (11) соответствующей системы уравнений (6) – (8) и поэтому может быть выбрана единой для всех α, удовлетворяющих условию (115). Очевидно также обобщение теоремы 2 на случай, когда условие 2 этой теоремы имеет место не для одной, а для p пар решений, удовлетворяющих попарно условию 3 теоремы 2. Более того, очевидно обобщение теоремы 2 на случай, когда $f_0(t) \equiv 0$, но преобразованное асимптотическим методом уравнение 2-го приближения определяет функцию $f_1(t)$ типа $f_0(t)$ со свойствами 2 и 3 теоремы 2.

Учитывая изложенное и утверждения теорем 1 и 2, приходим к следующему утверждению, характеризующему поведение решений системы (1).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теорем* 1 *и* 2.

Тогда можно указать такие достаточно большое α_0 *и достаточно малое* $\delta_0 > 0$, *что для любого* $\alpha > \alpha_0$ *решения* $x(t)$, $y(t)$ *системы уравнений* (1), *которые при* $t = t_0$ *начинаются в* δ_0*-окрестности интегрального многообразия* (116)

$$\| x(t_0) - (x_0(\psi_0) + \varepsilon u(\psi_0, \theta_0, \beta t_0, \varepsilon)) \| +$$
$$+ \left\| y(t_0) - \left[e^{i(\alpha t_0 + u_0(\psi_0) - \theta_0)} (r_0(\psi_0) + \varepsilon v(\psi_0, \theta_0, \beta t_0, \varepsilon)) \right] \right\| < \delta_0,$$

но вне интегрального многообразия (121)

$$\psi_0 \neq \vartheta_2^0 + \beta t_0 + \mu v_2(\theta_0, \beta t_0, \mu, \varepsilon),$$

притягиваются к решениям x_t, y_t *системы* (1) *на интегральном многообразии* (116), *которые определяются решениями системы* (117)

$$\psi = \psi_t, \qquad \theta = \theta_t,$$

принадлежащими интегральному многообразию (120), *таким образом, что*

$$\| x(t) - x_t \| + \| y(t) - y_t \| \le \mathcal{L}_2 e^{-\frac{\varepsilon\lambda_1}{2}(t-T)} \delta_0, \quad t \ge T \ge t_0,$$

где $T = T(\psi_0)$ — *некоторая постоянная,* $\mathcal{L}_2 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим уравнение (122), определяющее решения системы (1) на интегральном многообразии (120). Согласно (120) это уравнение имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon F(\theta, \beta t, \mu\varepsilon), \tag{124}$$

где через F обозначена функция f_2 из (122). К (124) при $l - 7 \ge 2$ применима теория Пуанкаре – Дантуа о структуре траекторий динамической системы на двумерном торе [11, 19, 20]. Согласно этой теории характер поведения решений уравнений (124) определяется числом вращения Пуанкаре, которое имеет вид

$$\nu(\varepsilon) = \frac{\alpha + \bar{f}_0 + \varepsilon \bar{\nu}}{\beta}, \quad |\bar{\nu}| \le M,$$

где M не зависит от μ, ε, α, при этом если $\nu(\varepsilon)$ — иррационально, то

$$\theta_t = \nu(\varepsilon)\beta t + \theta_0 + \varepsilon w(v(\varepsilon)\beta t + \theta_0, \beta t, \mu, \varepsilon) \tag{125}$$

и функция w является квадратической, равномерно ограниченной при $\alpha \ge \alpha_0$, с частотным базисом $(\nu(\varepsilon)\beta, \beta)$, а если $\nu(\varepsilon)$ — рационально,

$$\nu(\varepsilon) = \frac{p}{s},$$

то θ_t имеет вид (125) для конечного значения θ_0,

$$\theta_0 = \theta_0^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, d, \tag{126}$$

и функция w для этих значений θ_0 является периодической с периодом $T = \frac{2\pi}{\beta} s$, при этом любое решение уравнения (124), отличное от решений (125), (126), притягивается к одному из этих решений (125), (126) при $t \to \infty$.

Рассмотрим, учитывая изложенное, вид решений x_t, y_t системы (1).

Подставив функцию θ_t в уравнение интегрального многообразия (120), получим решение $\psi = \psi_t$ на этом многообразии в виде

$$\psi_t = \vartheta_1^0 + \beta t + \mu v_1(\nu(\varepsilon)\beta t + \theta_0 + \varepsilon w(\nu(\varepsilon)\beta t + \theta_0, \beta t, \mu, \varepsilon), \beta t, \mu, \varepsilon) \quad (127)$$

для случая, когда $\nu(\varepsilon)$ — иррационально, или

$$\varphi_t = \varphi_t^{(k)} = \vartheta_1^0 +$$

$$+ \beta t + \mu v_1\Big(\nu(\varepsilon)\beta t + \theta_0^{(k)} + \varepsilon w\Big(\nu(\varepsilon)\beta t + \theta_0^{(k)}, \beta t, \mu, \varepsilon\Big), \beta t, \mu, \varepsilon\Big), \quad k = \overline{1, d}, \quad (128)$$

для случая, когда $\nu(\varepsilon)$ — рационально, при этом любое решение на многообразии (120), отличное от (128), притягивается к одному из решений (128) при $t \to \infty$.

С учетом формул (125) – (128) и (116) для x_t, y_t имеем представление:

в случае иррационального $\nu(\varepsilon)$

$$x_t = x_0(\psi_t) + \varepsilon u(\psi_t, \theta_t, \beta t, \varepsilon), \quad (129)$$

$$y_t = e^{i[u_0(\psi_t) - \theta_0 - (\bar f_0 + \varepsilon\bar\nu)t - \varepsilon w(\psi_t, \theta_t, \beta t, \varepsilon)]}[r_0(\psi_t) + \varepsilon v(\psi_t, \theta_t, \beta t, \varepsilon)]; \quad (130)$$

в случае рационального $\nu(\varepsilon)$

$$x_t = x_t^{(k)} = x_0\Big(\psi_t^{(k)}\Big) + \varepsilon u\Big(\psi_t^{(k)}, \theta_t^{(k)}, \beta t, \varepsilon\Big),$$

$$(131)$$

$$y_t = y_t^{(k)} = e^{i\left[u_0\left(\psi_t^{(k)}\right) - \theta_0^{(k)} - (\bar f_0 + \varepsilon\bar\nu)t\right] - i\varepsilon w\left(\psi_t^{(k)}, \theta_t^{(k)}, \beta t, \varepsilon\right)}\Big[r_0\Big(\psi_t^{(k)}\Big) + \varepsilon v\Big(\psi_t^{(k)}, \theta_t^{(k)}, \beta t, \varepsilon\Big)\Big]$$

для $k = \overline{1, d}$, и любое решение x_t, y_t, отличное от решений (131), притягивается к одному из решений (131) при $t \to \infty$.

Как следует из (130), (131), решение (130) является квазипериодическим с частотным базисом, определяемым частотами $\nu(\varepsilon)\beta$, β, $\bar f_0 + \varepsilon\bar\nu$, в решениях (131) координата x_t является периодической с периодом T, а y_t является либо периодической, когда отношение $\nu_1(\varepsilon) = \dfrac{\bar f_0 + \varepsilon\bar\nu}{\beta}$ рационально, либо квазипериодической, когда $\nu_1(\varepsilon)$ иррационально, при этом в последнем случае частотный базис y_t определяется значением $(\nu_1(\varepsilon)\beta, \beta)$.

Изложенное о решениях x_t, y_t, определяемых интегральным многообразием (120), остается в силе и для решений x_t, y_t, определяемых интегральным многообразием (121).

Будем называть, следуя [11], решения (129) – (131) и аналогичные им решения, определяемые многообразием (121), стационарными решениями системы (1). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теорем* 1 *и* 2, *значение* α *удовлетворяет неравенству* (119).

Тогда система уравнений (1) *имеет на интегральных многообразиях* (120) *и* (121) *стационарные решения* x_t, y_t, *которые представляют собой либо однопараметрические семейства квазипериодических решений вида* (129), (130), *либо конечное число периодических или квазипериодических решений вида* (131); *любое решение системы* (1), *которое начинается в* δ-*окрестности интегрального многообразия* (116), *но не принадлежит интегральному многообразию* (121) *и не является стационарным, притягивается к одному из стационарных решений* x_t, y_t, *принадлежащих интегральному многообразию* (120); *любое решение системы* (1), *которое начинается на интегральном многообразии* (121), *но не является стационарным, притягивается при* $t \to \infty$ *к одному из стационарных решений* x_t, y_t, *принадлежащему интегральному многообразию* (121).

Отметим, наконец, что стационарные решения (130), (131) имеют вид

$$x_t = x_0\left(\vartheta_1^0 + \beta t\right) + O(\varepsilon),$$
$$y_t = e^{i\left(u_0\left(\vartheta_1^0+\beta t\right)-\left(\bar{f}_0+\varepsilon\bar{\nu}\right)t-\theta_0\right)}\left(r_0\left(\vartheta_1^0 + \beta t\right) + O(\varepsilon)\right), \tag{132}$$

следовательно, с точностью до $O(\varepsilon)$ функция x_t является периодической с периодом $\frac{2\pi}{\beta}$, а функция y_t с точностью до $O(\varepsilon)$ — двоякопериодической с частотами $\left(\beta, \bar{f}_0 + \varepsilon\bar{\nu}\right)$. Поэтому очевидно, что при

$$\bar{f}_0 = p\frac{2\pi}{\beta} \tag{133}$$

с целым p предельные значения решений (132) являются периодическими с периодом $\frac{2\pi}{\beta}$. Условие (133) в силу изложенного является условием практической синхронизации решений системы (1).

1. *Bauer S., Brox O., Kreissl J., Sartorius B., Radziunas M., Sieber J., Wunsche H.-J., Henneberger F.* Nonlinear dynamics of semiconductor lasers with active optical feedback // Phys. Rev. E. – 2004. – **69**. – 016206.
2. *Tromborg B., Lassen H. E., Olesen H.* Travelling wave analysis of semiconductor lasers // IEEE J. Quant. El. – 1994. – **30**, № 5. – P. 939 – 956.
3. *Sieber J.* Numerical bifurcation analysis for multisection semiconductor lasers // SIAM J. Appl. Dynam. Syst. – 2002. – **1**, № 2. – P. 248 – 270.
4. *Sartorius B., Bornholdt C., Brox O., Ehrke H. J., Hoffmann D., Ludwig R., Mohrle M.* All-optical clock recovery module based on self-pulsating DFB laser // Electron. Lett. – 1998. – **34**, № 17. – P. 1664 – 1665.
5. *Recke L., Peterhof D.* Abstract forced symmetry breaking and forced frequency locking of modulated waves // J. Different. Equat. – 1998. – **144**, № 2. – P. 233 – 262.
6. *Bandelow U., Recke L., Sandstede B.* Frequency regions for forced locking of self-pulsating multisection DFB lasers // Opt. Communs. – 1998. – **147**, № 1–3. – P. 212 – 218.
7. *Peterhof D., Sandstede B.* All-optical clock recovery using multisection distributed-feedfack lasers // J. Nonlinear Sci. – 1999. – **9**, № 5. – P. 575 – 613.
8. *Recke L.* Forced frequency locking of rotating waves // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 1. – P. 94 – 101.
9. *Krauskopf B., Wieczorek S. M.* Accumulating regions of winding periodic orbits in optically driven lasers // Physica D. – 2002. – **173**, № 1-2. – P. 97 – 113.
10. *Рекке Л., Шнайдер К. Р., Сибер Дж.* Динамика многосекционных полупроводниковых лазеров // Совр. математика. Фундам. направления. – 2003. – **1**, № 1. – С. 1 – 12.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
12. *Moser J.* A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations // Ann. Scuola norm. super Pisa. – 1966. – **20**, № 3. – P. 499 – 535.
13. *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds // Lect. Notes Math. – 1977. – **583**. – 149 p.
14. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Kluwer Acad. Publ., 1991. – Vol. 71. – 313 p.
15. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
16. *Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M.* Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics. – Berlin; New York: Springer, 1976. – viii + 291 p.
17. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
18. *Samoilenko A. M., Petryshyn R.* Multi-frequency oscillations of nonlinear systems. – Kluwer Acad. Publ., 2004. – Vol. 567. – 317 p.
19. *Denjoy A.* Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore // J. math. Ser. 9. – 1932. – **11**. – P. 333 – 375.
20. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

Получено 01.11.2004