УДК 517.947

И. П. Фишман

О представлении общего решения дифференциально-операторного уравнения

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $L_2(\mathfrak{H}, (0, \infty))$ — пространство всех вектор-функций $u(t)$, $t \in [0, \infty)$, со значениями в $\mathfrak{H}$, для которых $\int\limits_0^\infty \|u(t)\|^2 dt < \infty$. Скалярное произведение в $L_2(\mathfrak{H}, (0, \infty))$ определяется как $(u, v)_{L_2(\mathfrak{H}, (0, \infty))} = \int\limits_0^\infty (u(t), v(t))\, dt$.

Объектом нашего изучения будет дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} P_k(A)\, y^{(n-k)}(t) = 0, \tag{1}$$

где $A \geqslant \mu E$, $\mu > 0$, — самосопряженный в $\mathfrak{H}$ оператор, а $P_k(A) = \sum_{i=1}^{p_k} a_{ki} A^i$ — многочлен от оператора A порядка p_k, $k = 1, \ldots, n$, причем выполняется условие (I): $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$. Для простоты изложения будем считать, что оператор A имеет чисто дискретный спектр.

Как следует из теории алгебраических функций [1], многочлен от двух переменных $\chi(\lambda, \omega) = \omega^n + \sum_{k=1}^{n} P_k(\lambda)\omega^{n-k}$ определяет в комплексной плоскости n непрерывных по $\lambda \in [\mu, \infty)$ функций $\omega_1(\lambda), \ldots, \omega_n(\lambda)$, являющихся корнями уравнения

$$\chi(\lambda, \omega) = 0, \tag{2}$$

которые при больших λ представляются рядами Пьюизё по дробным убывающим степеням λ: $\omega_i(\lambda) \doteq \sum_{j=-\infty}^{r_i} c_{ij}\lambda^{j/\nu_i}$.

Очевидно, что при $\lambda \to +\infty$

$$\omega_i(\lambda) \sim c_i\lambda^{\alpha_i}, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\omega_i(\lambda) \sim d_i\lambda^{\beta_i} \tag{4}$$

и $\alpha_i \geqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, при этом условие (I) обеспечивает выполнение неравенства

$$\alpha_n \geqslant 0. \tag{5}$$

Предположим, что выполняются условия (II): корни уравнения (2) различны, т. е. $\omega_i(\lambda) \neq \omega_j(\lambda)$ ни в одной точке $\lambda \in [\mu, \infty)$, а в случае, когда $\alpha_i = \alpha_j$, считаем $c_i \neq c_j$, $i \neq j$.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения: σ_r — элементарный симметрический многочлен от l переменных $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ порядка r, $r \leqslant l$, $\sigma_r = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_r + \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{r-1}\omega_{r+1} + \ldots + \omega_{l-r} \ldots \omega_l$; σ_r^i — элементарный симметрический многочлен порядка r от переменных $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_l$.

Если для $G(\lambda) > c$, $0 < c \equiv \mathrm{const}$, непрерывной на $[0, \infty)$ функции на области определения $D(G(A))$ оператора $G(A)$, ввести скалярное произведение $(f, g)_G = (G(A)f, G(A)g)$, то $D(G(A))$ превратится в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_G$ с позитивной нормой относительно $\mathfrak{H}$ [2]. Пополнение пространства $\mathfrak{H}$ по норме $\|f\|_{\mathfrak{H}'_G} = \|G^{-1}(A)f\|$ обозначим $\mathfrak{H}'_G$. Тогда $\mathfrak{H}_G \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'_G$.

Положим $G_{\delta,\alpha}(\lambda) = \exp(\delta\lambda^\alpha)$, $\delta > 0$, $\mathfrak{H}_{\exp(\delta\lambda^\alpha)} = \mathfrak{H}_{G_{\delta,\alpha}}$, $\mathfrak{H}'_{\exp(\delta\lambda^\alpha)} = \mathfrak{H}'_{G_{\delta,\alpha}}$ и обозначим через $\mathfrak{A}(A^\alpha) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\delta\to 0} \operatorname{ind} \mathfrak{H}_{G_{\delta,\alpha}}$, $\mathfrak{Z}(A^\alpha) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\delta\to\infty} \operatorname{pr} \mathfrak{H}_{G_{\delta,\lambda}}$ пространства аналитических [3] и целых [4] векторов оператора A^α соответственно. Напомним, что сходимость последовательности f_n в $\mathfrak{A}(A^\alpha)$ означает принадлежность этой последовательности к $\mathfrak{H}_{G_{\delta,\alpha}}$ при некотором $\delta > 0$ и ее сходимость в этом пространстве, а сходимость последовательности g_n в $\mathfrak{Z}(A^\alpha)$ означает ее сходимость в каждом $\mathfrak{H}_{G_{\delta,\alpha}}$. Пространство билинейных непрерывных функционалов над $\mathfrak{A}(A^\alpha)$ ($\mathfrak{Z}(A^\alpha)$) будем обозначать $\mathfrak{A}'(A^\alpha)$ ($\mathfrak{Z}'(A^\alpha)$) и называть пространством коаналитических (коцелых) векторов оператора A^α: $\mathfrak{A}'(A)^\alpha = \lim_{\delta\to 0} \operatorname{pr} \mathfrak{H}'_{G_{\delta,\alpha}}$ ($\mathfrak{Z}'(A^\alpha) = \lim_{\delta\to\infty} \operatorname{pr} \mathfrak{H}'_{G_{\delta,\alpha}}$). При этом очевидны включения $\mathfrak{Z}(A^\alpha) \subseteq \mathfrak{A}(A^\alpha) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}'(A^\alpha) \subseteq \mathfrak{Z}'(A^\alpha)$.

Если в качестве $G(\lambda)$ рассмотреть $G(\lambda) = 1 + \lambda^\tau$, получаем $\mathfrak{H}_G = \mathfrak{H}_{1+\lambda^\tau} = \mathfrak{H}_\tau$, $\mathfrak{H}'_G = \mathfrak{H}_{-\tau}$, где $\mathfrak{H}_\tau$, $-\infty < \tau < \infty$, — гильбертова шкала пространств, порожденная оператором A [2].

Через $\widehat{A}$ обозначим расширение оператора A на $\mathfrak{A}'(A^{\alpha_1})$ [4], где α_1 определено в (3).

Определение. *Вектор-функцию* $y(t)$ *назовем решением уравнения* (1) *внутри интервала* $(0, \infty)$, *если:* а) $y(t)$ n *раз сильно непрерывно дифференцируема в* $\mathfrak{H}$ *на* $(0, \infty)$; б) *при каждом* $t \in (0, \infty)$ $y^{(n-k)}(t) \in D(P_k(A))$ *и* $P_k(A) y^{(n-k)}(t)$ *непрерывна в* $\mathfrak{H}$ *на* $(0, \infty)$; *в)* $y(t)$ *удовлетворяет уравнению* (1) на $(0, \infty)$.

Лемма 1. *Если* $y(t)$ — *решение внутри* $(0, \infty)$ *уравнения* (1), *то почти везде на* $(0, \infty)$ $\forall i = 1, \dots n$ *и* $\forall k = 2, \dots, n$ $y^{(n-1)}(t) \in D(\omega_i(A))$, $y^{(n-k)}(t) \in D(\omega_i(A) \sigma_{k-1}^i(A))$.

Доказательство. Отметим, что $\omega_i(\lambda) \sigma_{k-1}^i(\lambda)$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция, которая при $\lambda \to +\infty$ растет не быстрее чем $\omega_1(\lambda) \dots \omega_k(\lambda)$, т. е. не быстрее чем $\lambda^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}$. Поэтому для доказательства достаточно показать, что $y^{(n-k)}(t) \in D(A^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k})$, $k = 1, \dots, n$, почти всюду на $(0, \infty)$.

Пусть

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_1} > \alpha_{n_1+1} = \dots = \alpha_{n_2} > \dots > \alpha_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} = \dots = \alpha_{n_1+\dots+n_m},$$
$$n_i \geqslant 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad n_1 + \dots + n_m = n. \tag{6}$$

Согласно формулам Виета для переменных $\omega_1(\lambda), \dots, \omega_n(\lambda)$

$$\sigma_1(\lambda) = -P_1(\lambda), \quad \sigma_2(\lambda) = P_2(\lambda), \dots, \sigma_n(\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda). \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_1} = \frac{p_{n_1}}{n_1}; \qquad \alpha_{n_1+1} = \dots = \alpha_{n_2} = \frac{p_{n_1+n_2} - p_{n_1}}{n_2}, \dots,$$

$$\alpha_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} = \dots = \alpha_{n_1+\dots+n_m} = \frac{p_{n_1+\dots+n_m} - p_{n_1+\dots+n_{m-1}}}{n_m}. \tag{8}$$

В свою очередь, $p_{n_1+\dots+n_r} = n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r$, $r = 1, \dots, m$, (понятно, что для $n_1 + \dots + n_{r-1} < k < n_1 + \dots + n_r : p_k \leqslant \alpha_1 + \dots + \alpha_k$). По условию $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, \dots, n$, и в силу (6) случай $\alpha_k = 0$ возможен лишь при $n_1 + \dots + n_{m-1} + 1 \leqslant k \leqslant n_1 + \dots + n_m$. При этом $p_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} = \dots p_{n_1+\dots+n_m}$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1+\dots+n_{m-1}} = p_{n_1+\dots+n_{m-1}} = p_k$. Поскольку $y(t)$ — решение уравнения (1) внутри $(0, \infty)$, то $y^{(n-k)}(t) \in D(P_k(A)) = D(A^{p_k}) = D(A^{\alpha_1+\dots+\alpha_k})$. $\forall t \in (0, \infty)$. Пусть $n_1 + \dots + n_{r-1} \leqslant k \leqslant n_1 + \dots + n_r$, $1 < r \leqslant m - 1$. По определению $y^{(n-(n_1+\dots+n_r))}(t) \in D(P_{n_1+\dots+n_r}(A)) = D \times (A^{p_{n_1+\dots+n_r}})$, $y^{(n-(n_1+\dots+n_{r-1}))}(t) \in D(P_{n_1+\dots+n_{r-1}}(A)) = D(A^{p_{n_1+\dots+n_{r-1}}})$. Очевидно, $p_{n_1+\dots+n_r} > p_{n_1+\dots+n_{r-1}}$. Если $n_r = 1$, то $k = n_1 + \dots + n_{r-1} + 1 = n_1 + \dots + n_2$, и в силу (8) $y^{(n-k)}(t) \in D(P_{n_1+\dots+n_r}(A)) = D(A^{p_{n_1+\dots+n_r}}) = D(A^{\alpha_1+\dots+\alpha_k})$. Если же $n_r \geqslant 2$, то из теоремы о промежуточных производных [6] получим, что для почти всех $t \in (0, \infty)$ $y^{(n-k)}(t) \in D(A^\alpha)$, где $\alpha = p_{n_1+\dots+n_r} + (k - (n_1 + \dots + n_{r-1}))(p_{n+\dots+n_r} - p_{n_1+\dots+n_{r-1}})/n_r = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. При $1 \leqslant k \leqslant n_1$ рассуждения аналогичны.

Лемма доказана.

Теорема 1. *В предположениях* (I) *и* (II) *вектор-функция* $y(t)$ *является решением уравнения* (1) *внутри* $(0, \infty)$ *тогда и только тогда, когда она допускает представление*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \exp(\omega_i(\widehat{A}) t) f_i, \tag{9}$$

где $f_i \in \mathfrak{A}'(A^{\beta_i})$, *если* $\beta_i > 0$, $d_i < 0$; $f_i \in \mathfrak{Z}(A^{\beta_i})$, *если* $\beta_i > 0$, $d_i > 0$; $f_i \in \mathfrak{H}_{\tau_i}(A)$, *если* $\beta_i \leqslant 0$, $\tau_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1} + (n - i + 1)\alpha_i \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение (1) внутри $(0, \infty)$. Поскольку оператор A имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$, то в пространстве $\mathfrak{H}$ существует полная ортонормированная система собственных векторов $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$. Легко видеть, что всякое решение уравнения (1) допускает представление в виде $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) e_k$, где $y_k(t) = (y(t), e_k)$ — решение соответствующего скалярного уравнения

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda_k) y^{(n-i)}(t) = 0, \tag{10}$$

$k = 1, 2, \ldots$, такое что $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t)|^2 < \infty$. Но всякое решение уравнения (10) представимо в виде $y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \exp(\omega_i(\lambda_k) t) f_{ik}$, где f_{ik} — некоторые постоянные.

По лемме 1 почти всюду на $(0, \infty)$ определено

$$\omega_i(A) y^{(n-1)}(t) + \omega_i(A) \sigma_1^i(A) y^{(n-2)}(t) + \ldots + \omega_i(A) \sigma_{n-1}^i(A) y(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_i(\lambda_k) y_k^{(n-1)}(t) + \omega_i(\lambda_k) \sigma_1^i(\lambda_k) y_k^{(n-2)}(t) + \ldots + \omega_i(\lambda_k) \sigma_{n-1}^i(\lambda_k) y_k(t)) e_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_i(\lambda_k) \pi_i(\lambda_k) \exp(\omega_i(\lambda_k) t)) e_k,$$

где $\pi_i(\lambda_k) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (\omega_i(\lambda_k) - \omega_j(\lambda_k))$.

В силу равенства Парсеваля, почти всюду на $(0, \infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_i(\lambda_k) \pi_i(\lambda_k) \exp(\mathrm{Re}\, \omega_i(\lambda_k)) t f_{ik}|^2 < \infty. \tag{11}$$

Учитывая, что $\exp(at)$ есть монотонная по t функция, получаем выполнение условия (11) внутри $(0, \infty)$. Нетрудно видеть, что при $\lambda \to +\infty$

$$\omega_i(\lambda) \pi_i(\lambda) \sim \lambda^{\tau_i}, \tag{12}$$

где $\tau_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + (n - i + 1) \alpha_i \geqslant \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p_n \geqslant 0$.

В случае $\beta_i > 0$, $d_i < 0$, с учетом (12), из (11) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\exp(-\delta_i \lambda_k^{\beta_i} t) f_{ik}|^2 < \infty \tag{13}$$

внутри $(0, \infty)$, $\delta_i > 0$.

Пусть задано произвольное $\delta > 0$. Тогда существует $t_\delta \in (0, \infty)$ такое, что $\delta_i t_\delta = \delta$. Следовательно из (13) получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\exp(-\delta \lambda_k^{\beta_i}) f_{ik}|^2 < \infty$ для произвольного $\delta > 0$. Положим $\exp(-\delta \lambda_k^{\beta_i}) f_{ik} = g_{ik}$. Получаем $\sum_{k=1}^{\infty} |g_{ik}|^2 < \infty$, т. е. вектор $g_i = \sum_{k=1}^{\infty} g_{ik} e_k \in \mathfrak{H}$. Поскольку $f_{ik} = \exp(\delta \lambda_k^{\beta_i}) g_{ik}$, то $f_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} l_k = \exp(\delta A^{\beta_i}) g_i \in \mathfrak{H}_{G_{\delta, \beta_i}}$, где $G_{\delta, \beta_i}(\lambda) = \exp(\delta \lambda^{\beta_i})$. В силу произвольности $\delta > 0$ $f_i \in \mathfrak{A}'(A^{\beta_i}) = \lim_{\delta \to 0} \mathrm{pr}\, \mathfrak{H}_{G_{\delta, \beta_i}}$.

Аналогичные рассуждения при $\beta_i > 0$, $d_i > 0$ приводят к тому, что $f_i \in \mathfrak{Z}(A^{\beta_i}) = \lim\limits_{\delta\to\infty} \mathrm{pr}\, \mathfrak{H}_{a_{\delta,\beta_i}}$. В случае же $\beta_i \leqslant 0$ из (11) получаем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{\tau_i} f_{ik}|^2 < \infty$, т. е. $f_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{ik} l_k \in \mathfrak{H}_{\tau_i}$. Необходимость доказана.

Достаточность. В случае $\beta_i > 0$, $d_i < 0$ $(d_i > 0)$ f_i берется из пространства $\mathfrak{A}'(A^{\beta_i})\,(\mathfrak{Z}(A^{\beta_i}))$, вектор-функция $y_i(t) = \exp(\omega_i(\hat{A})\,t)\,f_i$ бесконечно дифференцируема в $\mathfrak{H}$ внутри $(0, \infty)$ и вместе со всеми своими производными принимает значения в $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Поскольку $\omega_i(\lambda)$ — корень характеристического уравнения, то непосредственной проверкой убеждаемся, что $y_i(t)$ удовлетворяет (1) внутри $(0, \infty)$.

Пусть $\beta_i \leqslant 0$. Тогда $f_i \in \mathfrak{H}_{\tau_i} \subseteq \mathfrak{H}_{n\alpha_i}$. Следовательно, вектор-функция $y_i(t) = \exp(\omega_i(A)\,t)\,f_i$ n раз непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{H}$ на $(0, \infty)$.

Покажем, что $y_i(t) \in D(A^{p_k}) = D(P_k(A))$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Поскольку при каждом $t \in (0, \infty)$ оператор $\exp(\omega_i(A)\,t)$ ограничен в $\mathfrak{H}$, то достаточно показать, что $[\omega_i(A)]^{n-k} f_i \in D(A^{p_k})$, или, что то же самое, $A^{(n-k)\alpha_i} f_i \in D(A^{p_k})$. Покажем, что $p_k + (n-k)\alpha_i \leqslant \tau_i$. По определению $\tau_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-1} + (n-i+1)\,\alpha_i$. Возможны два случая.

1. $n - k \leqslant i - 1$. Поскольку $\alpha_{n-k+1}, \ldots, \alpha_{i-1} \geqslant \alpha_i$, то $\tau_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1} + \ldots + \alpha_{i-1} + (n-i+1)\,\alpha_i \geqslant \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + (n-k)\alpha_i \geqslant p_k + (n-k)\,\alpha_i$.

2. $n - k \geqslant i$. Поскольку $\alpha_i \geqslant \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n-k}$, то $\tau_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + (n-i+1)\,\alpha_i \geqslant p_k + (n-k)\,\alpha_i$.

Таким образом, из того, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{\tau_i} f_{ik}|^2 < \infty$, следует $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{p_k + (n-k)\alpha_i} f_{ik}|^2 < \infty$. Последнее означает, что $A^{(n-k)\alpha_i} f_i \in D(A^{p_k})$. Достаточность доказана.

Из доказательства теоремы 1 непосредственно получаем следствия.

Следствие 1. *Если при условиях теоремы* 1 $\beta_i > 0$, *то всякое решение внутри* $(0, \infty)$ *уравнения* (1) *бесконечно дифференцируемо на* $(0, \infty)$.

Под решением, ограниченным на бесконечности, будем понимать вектор-функцию $y(t,)$ являющуюся решением уравнения (1) внутри $(0, \infty)$, для которой существует $c = \mathrm{const}$ такое, что при $t \to +\infty$ $\|y(t)\| \leqslant c$.

Следствие 2. *Вектор-функция* $y(t)$ *является решением уравнения* (1) *внутри* $(0, \infty)$, *ограниченным на бесконечности, тогда и только тогда, когда она допускает представление* (9) *с* $\beta_i > 0$, $d_i < 0$ *и* $\beta_i \leqslant 0$.

1. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М., Л. : ГИТТЛ, 1948.— 395 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: Функциональный анализ.— М. : Мир, 1977.— 358 с.
4. *Горбачук В. И.* О пространствах бесконечно дифференцируемых векторов неотрицательного самосопряженного оператора.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 5, с. 617—621.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений. — Мат. сб., 1977, **102**, № 1, с. 124—150.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 24.05.84