УДК 517.938

С. И. Трофимчук

Линейные расширения, удовлетворяющие условию трансверсальности

В этой заметке исследуется структура потока на базе пространства линейного расширения. При этом условие трансверсальности расширения считается выполненным. (По поводу понятий расширения и трансверсальности см. [1].) Полученная информация, в частности, упрощает доказательство достаточности условия трансверсальности для существования функции Грина линейного расширения (см. [1]).

Пусть (B, d) — компактное локально связное метрическое пространство, (X, p, B) — n-мерное векторное расслоение, (X, R, π) и (B, R, ρ) — динамические системы, $p:(X, R, \pi) \to (B, R, \rho)$ — линейное расширение.

Пусть $\Lambda_k(\pi) = \{b \in B: \dim X_b^s = k;\ X_b^u \oplus X_b^s = X_b\}$, $k = \overline{0, n}$; $X_b \equiv \equiv p^{-1}(b)$; здесь $X_b^{u(s)} = \{x \in X_b: \lim\limits_{t \to -(+)\infty} \| \pi^t(x) \| = 0\}$, $b \in B$. Известно [2], что множества $\Lambda_i(\pi)$ замкнуты, инвариантны и в наборе $\{\Lambda_0(\pi), \Lambda_1(\pi), \ldots \ldots, \Lambda_n(\pi)\}$ нет циклов. Основным орудием исследования является метод изолирующих блоков, распространенный на компактные метрические пространства в [3]. Оттуда, в частности, нам понадобится понятие изолированного инвариантного множества: инвариантное множество $S \subset B$ изолировано, если оно является максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности. Например, таковыми являются множества $\Lambda_i(\pi)$.

Введем следующее обозначение: $M_{ij}(\pi) = \{b \in B: \alpha(b, \rho) \subset \Lambda_i(\pi),\ \omega(b, \rho) \subset \Lambda_j(\pi);\ i < j\}$. Здесь, как обычно, α и ω обозначены α- и ω-предельные множества. Хорошо известно, что $B = \bigcup\limits_{i,j=0}^{n} \Lambda_i(\pi) \bigcup\limits_{i<j} M_{ij}(\pi)$—разложение B на непересекающиеся подмножества.

Теперь вплоть до теоремы зафиксируем индексы i, j: $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

Лемма 1. *Множество $M_{ij}(\pi)$ является открытым.*

Доказательство. Пусть $b_0 \in M_{ij}(\pi)$. Выберем такую окрестность $U_\varepsilon(b_0) = \{b \in B: d(b_0, b) < \varepsilon\}$, что $\overline{U_\varepsilon(b_0)} \cap \Lambda_k(\pi) = \varnothing$ — это можно сделать в силу свойств множеств $\Lambda_k(\pi)$, $k = \overline{0, n}$. Так как (B, d)—локально связное пространство, то, не ограничивая общности, будем считать все встречающиеся нам окрестности точки b_0 связными. Рассмотрим множество $W = U_\varepsilon(b_0) \cdot R \subset B$ (R — множество вещественных чисел, и если $A \subset B$, $I \subset R$, то $A \cdot I = \{b \in B:\ b = \rho(\theta, T),\ \theta \in A, T \in I\}$). Множество W является инвариантным; поэтому можно отдельно рассмотреть динамическую систему (W, ρ).

Она вполне неустойчива (т. е. все ее точки— блуждающие). Поэтому, согласно [4, с. 337], для точки b_0 найдется такое $\delta > 0$, что инвариантное множество (бесконечная трубка) $\Phi = \overline{U_\delta(b_0)} \cdot R$ имеет компактное сечение. (Черта означает замыкание.) Понятно, что выбрав δ достаточно малым, можно добиться, чтобы это компактное сечение было связным множеством. (Достаточно выбрать $U_\delta(b_0)$ связным.) Замыкание $\overline{\Phi}$ множества Φ (уже в топологии (B, d)) можно представить в виде $\overline{\Phi} = \Phi \cup \Phi(\alpha) \cup \Phi(\omega)$. Здесь $\Phi(\alpha)$ — множество α-предельных точек потока $(\overline{\Phi}, R, \rho)$ и т. п. Пользуясь тем, что $\Phi \subset \bigcup\limits_{k<s} M_{ks}(\pi)$, легко доказать, что $\Phi \cap \Phi(\alpha) = \Phi \cap \Phi(\omega) = \Phi(\alpha) \cap \Phi(\omega) = \varnothing$. Далее, $\Phi(\alpha)$ и $\Phi(\omega)$ — изолированные множества. Согласно теореме 3.4 из [3], для множества $\Phi(\omega)$ имеется изолирующий блок K. В силу выбора трубки Φ множество $A^+ = \{b \in K: b \cdot [0, +\infty) \subset K\}$ совпадает с K и является связным. силу предложения 4.6 из [3], включение $i: \Phi(\omega) \to A^+$ индуцирует изоморфизм алгебры когомологий Александрова — Чеха $I^*: H^*(A^+) \to H^*(\Phi(\omega))$. Поэтому множество $\Phi(\omega)$ также

связно и, следовательно, $\Phi(\omega) \subset \Lambda_j(\pi)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\Phi(\alpha) \subset \Lambda_i(\pi)$. Итак, $U_\delta(b_0) \in M_{ij}(\pi)$ и лемма 1 доказана.

В любом локально связном пространстве открытое множество распадается на компоненты связности, которые являются областями (см. [5, с. 126]). Исследуем Γ — одну из таких компонент множества $M_{ij}(\pi)$.

Лемма 2. *Граничное множество $\partial\Gamma$ области Γ содержит две компоненты связности, являющиеся замкнутыми инвариантными множествами: $\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma(\omega)$. В динамической системе ($\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$, R, ρ) множество $\Gamma(\alpha)$ является репеллером, а множество $\Gamma(\omega)$ — аттрактором. При этом для произвольной точки $b \in \Gamma$*

$$\alpha(b, \rho) \subset \Gamma(\alpha), \quad \omega(b, \rho) \subset \Gamma(\omega). \tag{1}$$

Доказательство. Инвариантность и замкнутость компонент $\partial\Gamma$ очевидна. Кроме того, множество $\partial\Gamma$ распадается на объединение изолированных множеств, относящихся к различным $\Lambda_\sigma(\pi)$. Используя теорему 6.2 из [3], немедленно получаем, что $\sigma \in \{i, j\}$. Свойство (1) теперь будет выполняться, если вместо $\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma(\omega)$ взять соответственно $F_1 = \Lambda_i(\pi) \cap \partial\Gamma$ и $F_2 = \Lambda_j(\pi) \cap \partial\Gamma$. Докажем, например, что F_2 является аттрактором системы (Γ, R, ρ). Пусть $\varkappa$ — расстояние между множествами $\Lambda_i(\pi)$ и $\Lambda_j(\pi)$ (см. [5, с. 96]). Ясно, что $\varkappa > 0$. Выберем окрестность $V = U_{\varkappa/4}(F_2)$ множества F_2. Тогда $F_2 = \bigcap_{t>0} \overline{V \cdot (t, \infty)}$ и, следовательно, F_2 — аттрактор. Кроме того, множество V связно, а потому связно и множество $F_2 = \Gamma(\omega)$ (см. [5, с. 204]).

Аналогично рассмотрев случай F_1, получаем полное доказательство леммы 2.

Лемма 3. *$M_{ij}(\pi)$ содержит конечное число компонент.*

Доказательство. Лемма 3 следует из леммы 2. Действительно, в силу предыдущей леммы, в каждой компоненте Γ можно найти шар U радиуса $\varkappa/4$. Бесконечное число компонент поэтому противоречит компактности пространства (B, d). Лемма 3 доказана.

Множество $\Lambda_i(\pi)$ распадается на замкнутые (в B) компоненты связности.

Лемма 4. *Число компонент множества $\Lambda_i(\pi)$ конечно.*

Доказательство. Эта лемма следует из первой и третьей.

Теорема (о структуре потока (B, R, ρ)). *Пространство (B, d) можно отобразить на конечный ориентированный граф G, сопоставляя каждой компоненте множества $\Lambda_i(\pi)$ вершину, а каждой компоненте Γ множества $M_{ij}(\pi)$ — упорядоченную пару ($\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\omega)$). Граф G не содержит нетривиальных замкнутых маршрутов. Если рассмотреть график графа G в эвклидовом пространстве и наделить его структурой потока, согласованного с ориентацией, так, что вершины графа и только они являются особыми точками динамической системы (G, R, φ), то упомянутое отображение можно выбрать так, что оно будет непрерывным эпиморфизмом потоков (B, R, ρ) и (G, R, φ).*

Доказательство. Все утверждения теоремы, не касающиеся построения эпиморфизма, следуют из предыдущих лемм. Эпиморфизм μ строится следующим образом: каждой компоненте $\Lambda_i(\pi)$ соответствует особая точка — вершина графа, каждой компоненте множества $M_{ij}(\pi)$ — ребро графа с произвольным градиентным потоком от вершины (i) к вершине (j).

Воспользовавшись тем фактом, что в каждой компоненте Γ множества $M_{ij}(\pi)$ можно построить глобальное сечение L (см., напр., 8-й раздел из [7]), каждой точке этого сечения соотнесем фиксированную точку a ребра ($\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\omega)$).

Тогда на Γ отображение μ задается следующим образом: если $b \in L \cdot s \subset \Gamma$, $s \in R$, то $\mu(b) = \mu(L)\, s = as \in (\Gamma(\alpha), \Gamma(\omega))$. (Ясно, что $L \cdot R = \Gamma$.)

Несложно проверить, что определенное таким образом отображение μ действительно является непрерывным эпиморфизмом потоков. Теорема доказана.

Замечания. А. Связность графа равна связности пространства B, а эпиморфизм $\mu : B \to C$ индуцирует эпиморфизм одномерных групп гомологий $\mu_1^*: H_1(B) \to H_1(G)$. Получаем, в частности, что граф, соответствующий двумерной сфере, является деревом, граф (неориентированный), соответствующий двумерному тору, содержит не более двух циклов.

Б. Пусть B — n-мерное многообразие, $n > 1$, (B, R, ρ) — транзитивная динамическая система. Тогда, если расширение p трансверсально, то оно гиперболично.

В. Любая компонента связности множества $\bigcup_{i=0}^{n} \Lambda_i(\pi)$ является множеством Морса (см., напр. [7]).

Г. Доказанная теорема упрощает доказательство следующего предложения из работы [1]: условие трансверсальности линейного расширения p является необходимым и достаточным условием существования функции Грина.

Действительно, доказательство необходимости хорошо известно (см. [1, 8]), а при доказательстве достаточности общий случай легко сводится к случаю, когда $(B, R, \rho) = (\bar{\Gamma}, R, \rho)$, где Γ — единственная компонента связности $\bigcup_{i<j} M_{ij}(\pi)$. (Заметим, что это структура хорошо изученных линейных систем дифференциальных уравнений с ограниченной и равномерно непрерывной матрицей коэффициентов.)

1. *Бронштейн И. У.* Слабая регулярность и функции Грина линейных расширений динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 12, с. 2031—2039.
2. *Бронштейн И. У.* Трансверсальность влечет структурную устойчивость.— Дифференц. уравнения, 1982, **18**, № 10, с. 1659—1665.
3. *Churchill R. C.* Isolated invariant sets in compact metric spaces.— J. Differential Eq., 1972, **12**, N 2, p. 330—352.
4. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л. : ОГИЗ, 1947.— 448 с.
5. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М. : Наука, 1977.— 367 с.
6. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.— М. : Мир, 1975.— 304 с.
7. *Selgrade J. F.* Isolated invariant sets for flows on vector bundles.—Trans. of the Americ. Math. Soc., 1975, **203**, N 476, p. 359—390.
8. *Трофимчук С. И.* Необходимое условие существования инвариантного многообразия линейного расширения динамической системы на компактном многообразии. — Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 3, с. 390—393.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 16.02.84