УДК 517.9

В. Г. Палюткин

О единственности решения граничной задачи с интегральным условием для дифференциального уравнения в полосе

1. Пусть $C^l[0, T]$, $l \geqslant 0$, $\infty > T > 0$, — пространство всех комплекснозначных функций $f(t)$, $t \in [0, T]$, имеющих l непрерывных производных на $[0, T]$, снабженное нормой $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant l} \sup\limits_{t \in [0,T]} |f^{(j)}(t)|$. Обозначим через $C_0^{l,n}(\Pi)$ класс всех комплекснозначных функций $v(x, t)$, $(x, t) \in \Pi = \{(x, t): -\infty < x < \infty, t \in [0, T]\}$, n раз непрерывно дифференцируемых по x и таких, что $\forall x \in (-\infty, \infty)$ $v(x, t) \in C^l[0, T]$ и $v_t^{(j)}(x, 0) = v_t^{(j)}(x, T)$, $0 \leqslant j \leqslant l$.

В данной заметке под решением граничной задачи с интегральным условием понимается функция $u(x, t)$ из класса $C_0^{l,n}(\Pi)$, удовлетворяющая в полосе Π уравнению

$$a\partial u(x, t)/\partial t = Q(x, \partial/\partial x)\, u(x, t), \quad a \text{ — const}, \tag{1}$$

$$Q(x, d/dx) = d^n/dx^n + q_{n-1}(x)\, d^{n-1}/dx^{n-1} + \ldots + q_0(x), \quad n \geqslant 2, \tag{2}$$

и интегральному условию

$$\langle \varphi, u(x, t) \rangle = w(x), \tag{3}$$

где $\varphi: f \to \langle \varphi, f \rangle$ — непрерывный функционал на $C^l[0, T]$. Согласно [1, гл. II, § 4], такой функционал имеет представление

$$\langle \varphi, f \rangle = \sum_{j=0} b_j \int_0^T f^{(j)}(t)\, d\sigma_j(t), \tag{4}$$

где b_j — const, σ_j, $j = 0, \ldots, l$, — функции ограниченной вариации на $[0, T]$.

Теорема. *Пусть решение $u(x, t)$ уравнения (1) принадлежит $C_0^{l,n}(\Pi)$, удовлетворяет интегральному условию*

$$\langle \varphi, u(x, t) \rangle \equiv 0, \tag{5}$$

где φ — *непрерывный функционал на* $C^l[0, T]$, *и подчинено оценке*

$$|\partial^{\nu+\eta}u(x, t)/\partial t^\nu \partial x^\eta| \leqslant C\exp\{\Xi(|x|)|x|\}, \quad (x, t)\in\Pi;$$
$$0\leqslant\nu\leqslant l, \quad 0\leqslant\eta\leqslant n-1, \quad C>0, \tag{6}$$

в которой функция $\Xi(r)$ *положительна при* $r>0$, *монотонно растет при* $r\to\infty$ *и, кроме того,*

$$\Xi(r)\leqslant C\exp\{r^{1-\varepsilon}\}, \quad \varepsilon>0, \quad r>0, \quad C>0; \tag{7}$$
$$\int^\infty \hat{\Xi}(r)\, r^{-n}dr = \infty. \tag{8}$$

Здесь $\hat{\Xi}$ *функция, обратная* Ξ.

Пусть, далее, коэффициенты уравнения (1) *удовлетворяют следующим условиям:* 1) a — *такая комплексная константа, что*

$$\mathrm{Re}\, a\neq 0 \text{ при } n = 2(n'-1), \quad \mathrm{Re}\, a\neq 0, \quad \mathrm{Im}\, a\neq 0 \quad \text{при} \quad n = 2n'-1; \tag{9}$$

2) *каждый коэффициент* $q_k(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, — *комплекснозначная функция, имеющая* $n-k+1$ *непрерывных производных;* 3) *существует непрерывная положительная функция* $g(r)$, $r\geqslant r_0\geqslant 0$, *растущая монотонно и неограниченно при* $r\to\infty$ *и такая, что при некотором* $\varkappa: 0<\varkappa<1$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\left[\int_{-r}^{r}|q_k^{(k-l+1)}(x)|\,dx\right]^{n/(n-k)}\Big/\hat{g}(r)\right\} = 0, \quad l\leqslant k\leqslant n-1; \tag{10}$$

$$\lim_{r\to\infty}\{g(r)/\hat{\Xi}(\varkappa r^{1/n})\} = 0, \tag{11}$$

где $\hat{g}$ — *функция, обратная* g.

Тогда имеет место импликация

$$\tilde{\varphi}_m := \langle\varphi, \exp\{2\pi imt/T\}\rangle\neq 0 \Rightarrow \tilde{u}_m(x) := \int_0^T u(x, t)\exp\{2\pi imt/T\}\,dt \equiv 0,$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{12}$$

Замечание. Для $\varphi: \tilde{\varphi}_m\neq 0$, $m = 0, \pm 1, \ldots$ (например, $\varphi: f\to f(0)$, $f\in C^0[0, T]$), сформулированная теорема превращается в условие единственности решения $u(x, t)\in C_0^{0, n}(\Pi)$ задачи (1), (3), выраженное в терминах оценок по x (такого типа условия были установлены, например, в [2, 3], где рассматривалась задача Коши). Здесь не обсуждается вопрос о точности этих оценок применительно к рассматриваемой задаче (в случае задачи Коши подобный вопрос рассмотрен в [3]). Отметим, что при постоянных коэффициентах в (2) и $\varphi: f\to f(0)$ в (5) можно воспользоваться методом работы [4] для построения отличного от тождественного нуля решения задачи (1), (5), принадлежащего $C_0^{0, n}(\Pi)$ и удовлетворяющего при любом фиксированном $\varepsilon>0$ оценке (6), в которой $\Xi(r) = r^{n/(n-1)-\varepsilon}$. Например, для уравнения теплопроводности такое решение выразится формулой (1) из [4], если вовлеченные в нее функции $F(t)$, $F_1(t)$, $t\in[0, T]$, считать такими, что $F^{(j)}(0) = F^{(j)}(T) = 0$, $j = 0, 1, \ldots$ (то же и для F_1) (см. [5, гл. IV, 1,V]).

Всюду в дальнейшем буква C (возможно, с индексами) используется лишь для обозначения неопределенных положительных констант; λ^ρ ($\mathrm{Im}\,\rho = 0$, $-\pi<\arg\lambda\leqslant\pi$) означает ту ветвь степенной функции, которая положительна при $\lambda>0$, для указания любого элемента из неопределенного интервала $[C, \infty)$ используется блок-символ $r\gg 0$.

2. Доказательство теоремы. Достаточно доказать (12) в точке $x = 0$. Действительно, при любом $x'\in(-\infty, \infty)$ функция $u_{x'}(x, t) := u(x+x', t)$ является решением задачи с условием (5) для уравнения, получаемого из (1) заменой $Q(x, \partial/\partial x)$ на $Q(x+x', \partial/\partial x)$. Последнее выражение, равно как и функция $u_{x'}$, удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть Q^* — дифференциальное выражение, сопряженное Q (см. (2) по Лагранжу. Согласно [6], уравнение

$$Q^* y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad -\infty < x < \infty, \tag{13}$$

в условиях (10) имеет линейно независимую систему решений $\{y_k(x, \lambda)\}_{k=0}^{n-1}$, которые при любом $\alpha : 0 < \alpha < \pi$ в области

$$G_{\alpha,\rho} = \{(x, \lambda) : |x| \leqslant g(|\lambda|), \quad \alpha \leqslant |\arg \lambda| \leqslant \pi - \alpha, \quad |\lambda| > \rho\}, \ \rho > \rho_\alpha \geqslant 0, \tag{14}$$

где g — функция из (10), (11), представимы при каждом λ, допустимом условиями (14), в виде

$$y_k^{(p)}(x, \lambda) = (-\omega_k)^p \lambda^{p/h} \exp\left\{\int_0^x w_k(\xi, \lambda)\, d\xi\right\}(1 + o(1)), \tag{15}$$

$$w_k(x, \lambda) = \omega_k \lambda^{1/n}(1 + o(1)), \quad \omega_k = \exp\{2\pi i k/n\}, \tag{16}$$

причем модули o-слагаемых в равенствах (15), (16) произвольно малы во всех точках области (14), где значение $|\lambda|$ достаточно велико.

Обозначим через $c_k(\lambda)$, $k = 0, \ldots, n-1$, коэффициент при y_k (см. (15)) в разложении решения $y(x, \lambda) : y^{(p)}(0, \lambda) = \delta_{n-1}^p$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$, уравнения (13) по упомянутой системе.

Положим

$$L^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\lambda) \int_0^{\xi_k(\lambda)} u(x, t)\, y_k(x, \lambda)\, dx, \tag{17}$$

где при любом комплексном λ компоненты $\xi_k(\lambda)$ вектора $\bar{\xi}(\lambda) = (\xi_0(\lambda), \ldots$ $\ldots, \xi_{n-1}(\lambda))$ — пока произвольные вещественные числа. Если продифференцировать обе части (17) по t и принять во внимание, что каждая из подынтегральных функций — решение одного из уравнений (1), (13), то после очевидных преобразований с использованием формулы Лагранжа получим

$$dL^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda)/dt = \lambda L^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda) + (-1)^n u(0, t) + R^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda). \tag{18}$$

Второе и третье слагаемые справа в (18) — суммы внеинтегральных членов в формуле Лагранжа, отвечающие соответственно нижнему и верхнему пределам интегрирования. Вид второго слагаемого — следствие выбора коэффициентов $c_k(\lambda)$. Третье слагаемое далее будет удобно рассматривать представленным следующим образом:

$$R^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\lambda)\, R(\xi_k(\lambda); \bar{u}, \bar{y}_k), \tag{19}$$

где $R(x; \bar{u}, \bar{y}_k)$ — значение некоторой билинейной формы $R(x; \cdot, \cdot)$ на векторах $\bar{u} = \bar{u}(x, t) = (u(x, t), u_x(x, t), \ldots, u_x^{(n-1)}(x, t))$, $\bar{y}_k \equiv \bar{y}_k(x, \lambda) = (y_k(x, \lambda),$ $y_{kx}(x, \lambda), \ldots, y_{kx}^{(n-1)}(x, \lambda))$. Отметим, что коэффициенты упомянутой формы — линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций вида $q_k^{(n-l)}(x)$, $k \leqslant l \leqslant n-1$.

В силу (18) справедливо представление

$$L^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda) = e^{t\lambda/a} L^{\bar{\xi}(\lambda)}(0, \lambda) + \tilde{u}(t, \lambda) + \tilde{R}^{\bar{\xi}(\lambda)}(t, \lambda), \tag{20}$$

где второе и третье слагаемые справа — результат применения к соответствующим слагаемым правой части (18) преобразования

$$h(t) \to \int_0^t h(\zeta) \exp\{(t - \zeta)\lambda/a\}\, d\zeta. \tag{21}$$

3. До сих пор вектор $\bar{\xi}(\lambda)$ в (17)—(20) был произволен. Выберем теперь его некоторым специальным образом для λ, лежащих на луче

$$l = \{\lambda : \arg\{\lambda/a\} = \pi/2\}. \tag{22}$$

Обозначим $\varphi_l = \arg\lambda : \lambda \in l$ и определим сначала модули компонент вектора $\bar{\xi}(\lambda)$, полагая

$$|\xi_k(\lambda)| \equiv |\xi(\lambda)| := \hat{\Xi}(\varkappa|\lambda|^{1/n} m(\varphi_l)), \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{23}$$

где $m(\varphi_l) = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant n-1} |\cos\{(\varphi + 2\pi j)/n\}|$, $\varkappa$ — константа из (11). Заметим, что в силу (9) $m(\varphi_l) \neq 0$.

Из (11) и (23) следует, что при $\lambda \in l$, $|\lambda| \gg 0$,

$$|\xi_k(\lambda)| \equiv |\xi(\lambda)| \leqslant g(|\lambda|), \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{24}$$

Это неравенство вместе с условием (9) позволяет на основании асимптотики (16) утверждать, что в точках $(x, \lambda) : |x| \leqslant |\xi_k(\lambda)|$, $\lambda \in l$, $|\lambda| \gg 0$, каждая из функций $\operatorname{sign} \operatorname{Re} w_k(x, \lambda)$, $k = 0, \dots, n-1$, сохраняет постоянное значение. Обозначим его через s_k и положим $\xi_k(\lambda) = -s_k|\xi_k(\lambda)| = -s_k|\xi(\lambda)|$, $k = 0, \dots, n-1$.

Итак, вектор $\bar{\xi}(\lambda)$ при $\lambda \in l$ определен. Заметим, что такое определение вектора $\bar{\xi}(\lambda)$ мотивировано желанием получить нужную в дальнейшем оценку последнего слагаемого справа в (20). Переходя к этой оценке, отметим, что согласно асимптотике (16) и неравенству (24) при любом $\varepsilon > 0$ в точках

$$(x, \lambda) : 0 \leqslant -s_k x \leqslant |\xi_k(\lambda)| \equiv |\xi(\lambda)|, \quad \lambda \in l, \quad |\lambda| > \rho_\varepsilon \geqslant 0 \tag{25}$$

справедливы неравенства

$$\int_0^x \operatorname{Re} w_k(\zeta, \lambda)\, d\zeta = -\int_0^{|x|} |\operatorname{Re} w_k(-s_k\zeta, \lambda)|\, d\zeta \leqslant (\varepsilon - 1)|\lambda|^{1/n}|x|\, m(\varphi_l).$$

Используя их вместе с (6) и (15), получим при любом $\varepsilon > 0$ в точках (25) оценку

$$|\partial^{\nu+\eta} u(x, t)/\partial t^\nu \partial x^\eta|\,|\partial^p y_k(x, t)/\partial x^p| \leqslant C_\varepsilon |\lambda|^{p/n} \exp\{(\Xi(|x|) -$$
$$-(1-\varepsilon)|\lambda|^{1/n} m(\varphi_l))|x|\}; \quad \nu = 0, \dots, l; \quad p, \eta = 0, \dots, n-1. \tag{26}$$

Так как $m(\varphi_l) \neq 0$, то при ε: $\varepsilon - 1 + \varkappa < -\varkappa_0$, где $\varkappa_0 > 0$, и $x : |x| = |\xi(\lambda)|$ (см. (11) и (23)), правая часть (26) имеет мажоранту $C \exp\{\varkappa_0 \times m(\varphi_l)|\xi(\lambda)|\,|\lambda|^{1/n}\} = E(\lambda)$. Поэтому, принимая во внимание сказанное выше о коэффициентах билинейных форм, вовлеченных в равенство (19), заключаем, что модуль каждого слагаемого справа в (19), равно как и его ν-й, $\nu = 0, \dots, l$, производной, мажорируется функцией $E(\lambda)|c_k(\lambda)|\, B(|\xi(\lambda)|)$, где $B(r) := \max\limits_{k, l : l \leqslant k \leqslant n-1} \sup\limits_{|x| \leqslant r} (|q_k^{(n-l)}(x)|^{n/(n-k)})$. На основании установленной мажорации, а также равенств (23), (19) и оценок

$$B(r) \leqslant C \exp\{r^{1-\varepsilon'}\}, \ \varepsilon' > 0, \ r \gg 0; \ |c_k(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{(1-n)/n}, \ \lambda \in l, \ |\lambda| \gg 0,$$
$$k = 0, \dots, n-1,$$

первая из которых следует из условий (10), (11), (7), а вторая легко выводится стандартным способом с привлечением (15), получаем

$$|R_l^{(\nu)}(t, \lambda)| \leqslant C \exp\{-K\hat{\Xi}(\varkappa|\lambda|^{1/n})|\lambda|^{1/n}\}, \quad \lambda \in l, \quad |\lambda| \gg 0, \quad \varepsilon > 0,$$
$$t \in [0, T], \quad 0 < K < m(\varphi_l)\varkappa_0, \quad \nu = 0, \dots, l, \tag{27}$$

где $R(t, \lambda)$ — последнее слагаемое правой части (18) без верхнего индекса.

Условимся не писать этот индекс и во всех других символах равенств (18) и (20).

4. Оценка (27) и равенство (20) позволяют свести доказательство импликации (12) при $x = 0$ к хорошо известной теореме теории аналитических функций (см., напр., теорему 3.5.2 из [7]) следующим образом.

В силу (5) и (20) в точках $\lambda : \langle\varphi, e^{t\lambda/a}\rangle \neq 0$ имеет место равенство

$$L(0, \lambda) = (\langle\varphi, \tilde{u}(t, \lambda)\rangle + \langle\varphi, \tilde{R}(t, \lambda)\rangle)/\langle\varphi, e^{t\lambda/a}\rangle. \tag{28}$$

Поскольку $u(x, t) \in C_0^{l,n}(\Pi)$, то $L(0, \lambda) = L(0, T)$, что вместе с (20) (при $t = T$) приводит к тождеству (по всем комплексным λ)

$$(e^{T\lambda/a} - 1) L(0, \lambda) + \tilde{u}(T, \lambda) + \tilde{R}(t, \lambda). \tag{29}$$

Подставляя (28) в (29), получаем

$$(e^{T\lambda/a} - 1) \langle \varphi, \tilde{u}(t, \lambda) \rangle + \tilde{u}(T, \lambda) \langle \varphi, e^{t\lambda/a} \rangle = (1 - e^{T\lambda/a}) \langle \varphi, \tilde{R}(t, \lambda) \rangle + \\ + \tilde{R}(T, \lambda) \langle \varphi, e^{t\lambda/a} \rangle, \ \lambda : \langle \varphi, e^{t\lambda/a} \rangle \neq 0. \tag{30}$$

Обозначим левую часть равенства (30) через $F(\lambda)$. Как следует из (21) и (4), $F(\lambda)$ — целая функция, ограниченная в полуплоскости $P_a = \{\lambda : : \pi \geqslant |\arg\{\lambda/a\}| \geqslant \pi/2\}$.

Покажем, что $F(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{l \cup l_-} \ln |F(\lambda)| (1 + |\lambda|^2)^{-1} d|\lambda| = -\infty, \tag{31}$$

где l — луч (22) и $l_- = \{\lambda : -\lambda \in l\}$. Это условие вместе с ограниченностью $|F(\lambda)|$ на P_a и аналитичностью $F(\lambda)$ во всей комплексной плоскости влечет, согласно [7, гл. III, теорема 3.5.2], тождество $F(\lambda) \equiv 0$, из которого при $\lambda = 2\pi ima/T$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, следует (12) для $x = 0$.

Итак, остается доказать (31). На луче l функция $|F(\lambda)|$ мажорируется правой частью неравенства (27) (возможно, с другой константой C). Это легко проверить, приняв во внимание, что аналогичная мажорация имеет место на луче l для функций $|\tilde{R}_t^{(\nu)}(t, \lambda)|$, $\nu = 0, \ldots, l$ (как модулей производных образов функций $R(t, \lambda)$ при преобразовании (21)), а следовательно, благодаря виду (4) функционала φ, для модуля каждого слагаемого правой части (30).

Этот вывод относительно мажорации функции $|F(\lambda)|$ справедлив не только на луче l, но и на $l_- = \{\lambda : -\lambda \in l\}$. В этом можно убедиться, если повторить всю предыдущую часть доказательства теоремы с заменой l на l_- и учесть, что при этом левая часть равенства (30) (в отличие от правой) не изменится, а для правой на луче l_- будут справедливы упомянутые выше оценки функций $|\tilde{R}_t^{(\nu)}(t, \lambda)|$, $\nu = 0, \ldots, l$.

Из доказанной для $|F(\lambda)|$ мажорации на прямой $l \cup l_-$ вместе с условием (8) следует (31). Таким образом, импликацию (12) можно считать установленной для $x = 0$, а следовательно, и для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Теорема доказана.

5. В заключение отметим, что ограничение (9) на коэффициент a в (1) становится излишним, если $\Xi(r) = Cr^{n/(n-1)-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, в оценке (6). В самом деле, при любом a все изложенное выше вплоть до равенства (30) имеет смысл применительно к любому лучу на комплексной плоскости, исходящему из нуля и отличному от действительных и мнимых полуосей. При этом оценка (27), соответствующая фиксированному лучу l из числа названных, в новых предположениях на Ξ обеспечивает убывание к нулю при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in l$, модуля правой части равенства (30), соответствующего тому же лучу l. Но поскольку левая часть равенства (30), т. е. функция $F(\lambda)$, от выбора луча l не зависит, то $|F(\lambda)| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ вдоль всех лучей с началом в нуле, исключая действительные и мнимые полуоси. Так как $F(\lambda)$ — целая функция и ее порядок, как легко видеть, не превышает единицы, то по теореме Фрагмена — Линделефа $F(\lambda) \equiv 0$, откуда следует тот же вывод, что и в предыдущем пункте.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространство основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
2. *Чаус Н. Н.* Классы единственности решения задачи Коши и представления положительно определенных ядер.—В кн.: Труды семинара по функциональному анализу. Вып. 1. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1968, с. 176—270.

3. *Житомирский Я. И.* Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1967, **31**, № 4, с. 763—782.
4. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности.— Мат. сб., 1935, **42**, вып. 2, с. 199—216.
5. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 267 с.
6. *Житомирский Я. И.* Об асимптотике решений систем линейных уравнений в расширяющихся областях.— Дифференц. уравн., 1976, **12**, № 8, с. 1427—1433.
7. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции.— М. : Наука, 1979,— 320 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев Поступила 30.08.83