УДК 517.925.6

А. З. Мохонько

О мероморфных и алгеброидных решениях функциональных уравнений

Используем стандартные обозначения теории мероморфных функций [1]. Пусть M_∞ — поле мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. В [2—4] получены априорные оценки роста мероморфных решений уравнения

$$Q(z, f(q(z))) = R(z, f(p(z))), \tag{1}$$

$Q(z, w)$, $R(z, w)$ — рациональные функции по w и мероморфные по z; $q(z)$, $p(z)$ — многочлены. данной работе изучается рост мероморфных и алгеброидных решений уравнения

$$\Phi(z, f(q(z)), f(p(z))) = \sum_{j=0}^{m} f^j(q(z)) R_j(z, f(p(z))) = 0, \tag{2}$$

где

$$R_j = \sum_{i=0}^{d_j} a_{ij}(z) f^i(p(z)); \ \ a_{ij}(z) \in M_\infty; \ \ d = \max d_j, \ \ q(z) = c_q z^q + \ldots + c_1 z + c_0,$$

$$p(z) = b_p z^p + \ldots + b_0, \ \ c_i, \ b_j \in \mathbb{C}; \quad n = q/p, \ |c_q| = \mu, \ |b_p| = \nu,$$

$$\sigma = \mu/\nu, \quad \varkappa = d/m. \tag{3}$$

Существуют простые функции, удовлетворяющие уравнениям вида (2): $f(w) = \exp w$ — решение уравнения $f(2z^2+1) = f^2(z^2)\cdot e$. Пусть $T(r, a) = \Sigma T(r, a_{ij})$ — сумма неванлинновских характеристик коэффициентов a_{ij}, входящих в (2). Через E обозначим любое множество на $[0, +\infty)$ такое, что $\operatorname{mes} E < \infty$, c — различные константы.

Теорема 1. *Пусть $f \in M_\infty$ — решение уравнения* (2), *в котором многочлен $\Phi(z, u, w)$ неприводим, как многочлен от u и w над полем M_∞. Пусть*

$$T(r, a) = o(T(r, f)), \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E. \tag{4}$$

Если $n \neq 1$, $\ln \varkappa/\ln n \geqslant 1$, то

$$\ln T(r, f) \sim \ln \varkappa \ln \ln r/\ln n. \tag{5}$$

Если $n \neq 1$, $\varkappa = 1$, $\sigma \neq 1$, то f имеет нулевой порядок. Если $n = 1$, $\ln \varkappa/\ln \sigma > 0$, то

$$\ln T(r, f) \sim \ln \varkappa \ln r/\ln \sigma. \tag{6}$$

Когда в (2) $n = 1$, $\ln \varkappa/\ln n < 1$, *или* $n = 1$, $\ln \varkappa/\ln \sigma < 0$, *то не существуют мероморфные решения уравнения* (2), *удовлетворяющие* (4).

Замечание 1. Уравнение (1) — частный случай уравнения (2). Когда в (3) $q = P$, всюду предполагаем, что $\mu \neq \nu$. Если $q = p = 1$, предполагаем, что $\max(\mu, \nu) > 1$. Случай, когда $q = p = \mu = \nu = 1$, рассмотрен в [4]. В [5] изучались решения уравнения $f(az + b) = R(z, f(z))$; a, $b = \text{const}$; $|a| > 1$; $R(q, W)$ — рациональная функция по z и w. Частные случаи уравнения (1) изучались в [6, 7] и др. (библиогр. см. в [6]).

Если в (2) отказаться от требования неприводимости многочлена $\Phi(z, u, w)$ (нам неизвестны эффективные результаты, позволяющие в общем случае судить о приводимости многочлена от двух переменных над полем M_∞ [8, с. 122]) и ослабить ограничения на рост f, то верна такая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f \in M_\infty$ — решение уравнения* (2) *такое, что*

$$T(r, a) = O(T(r, f)), \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E. \tag{7}$$

Если $n \neq 1$, то $\ln T(r, f) < c \ln \ln r$; если $n = 1$, $\max(\mu, \nu) > 1$, то $\ln T(r, f) < c \ln r$.

Если не накладывать ограничений на рост f, верна следующая теорема (соответствующий результат можно сформулировать и для приводимого уравнения (2)).

Теорема 3. *Пусть $f \in M_\infty$ — решение неприводимого уравнения* (2). Если $n \neq 1$, $\tau = \ln \varkappa/\ln n$, то

$$T(r, f) < \begin{cases} cT(r, a), & \tau < 0, \quad r \overline{\in} E, \\ (\ln r)^{\tau+\varepsilon} T(r, a), & \tau \geqslant 0, \quad r > r_0, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если $n = 1$, $s = \ln \varkappa/\ln \sigma$, то

$$T(r, f) < \begin{cases} cT(r, a), & s < 0, \quad r \overline{\in} E, \\ r^{s_1+\varepsilon} T(r, a), & s \geqslant 0, \quad r > r_0, \end{cases} \tag{9}$$

где $s_1 = s$, если $q > 1$ (или $q = 1$, $\mu \geqslant 1$, $\nu \geqslant 1$); $s_1 = \ln \varkappa/\ln(1/\nu)$, когда $q = 1$, $\mu < 1$; $s_1 = \ln \varkappa/\ln \mu$, когда $q = 1$, $\nu < 1$.

Замечание 2. Если в (2) все a_{ij} — полиномы, $n \neq 1$, $\ln \varkappa/\ln n < 1$ (соответственно $n = 1$, $\ln \varkappa/\ln \sigma < 0$), то из теоремы 1 следует, что всякое мероморфное решение (2) — рациональная функция.

Замечание 3. В [7] показано, что если $f \in M_\infty$, $f \not\equiv \mathrm{const}$,— решение уравнения $f(q(z)) = f(p(z))$; $q(z)$, $p(z)$ — полиномы, то $\deg p = \deg q$. Это утверждение следует из теоремы 3: в уравнении все $a_{ij}(z) \equiv 1$, $T(r, a) = O(1)$, $m = d = \varkappa = 1$. Если $p \neq q$, то $n \neq 1$, $\tau = \ln \varkappa / \ln n = 0$. Из (8) следует $T(r, f) \leqslant (\ln r)^\varepsilon T(r, a) < c(\ln r)^\varepsilon$, т. е $f \equiv \mathrm{const}$. В [6] показано, что если $f \in M_\infty$ — решение уравнения $f(q(z)) = g(z) \times f(p(z))$; $q(z)$, $P(z)$ — полиномы, $\deg p(z) \neq \deg q(z)$; $g(z)$ — рациональная функция, то f — рациональная функция. Это утверждение следует из замечания 2, так как $\ln \varkappa / \ln n = 0 < 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(z, u, w) = \sum_{j=0}^{m} u^j R_j(z, w) = 0, \tag{10}$$

$$R_j(z, w) = \sum_{i=0}^{d_j} a_{ij}(z)\,[w(z)]^i; \qquad w(z), \quad a_{ij}(z) \in M_\infty, \tag{11}$$

$0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant i \leqslant d_j$; $d = \max d_j$. Решение $u = u(z)$ уравнения (10) есть m-значная алгеброидная функция (а. ф.). Пусть $L = \{c_\mu\}$ — множество точек ветвления а. ф. $u(z)$. В некоторой окрестности каждой точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus L$ существуют m однозначных аналитических функций $u_1(z), \ldots, u_m(z)$, удовлетворяющих уравнению (10). Из точек $c_\mu \in L$ в плоскости $\mathbb{C}$ проведем разрезы по лучам так, чтобы получилась односвязная область Δ. Функцию $u_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, можно аналитически продолжить на Δ и получить однозначную ветвь а. ф. u, обозначаемую, как и исходный элемент, через $u_j(z)$. Пусть $n(r, u_j)$ — число полюсов ветви $u_j(z)$ в круге $\{|z| \leqslant r\}$ (см. [9]). Положим

$$\tilde{N}(r, u_j) = \int^{r} [n(t, u_j) - n(0, u_j)]\, t^{-1} dt + n(0, u_j) \ln r, \quad \tilde{m}(r, u_j) =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |u_j(re^{i\theta})|\, d\theta, \qquad \tilde{T}(r, u_j) = \tilde{m}(r; u_j) + \tilde{N}(r, u_j),$$

$$T(r, u) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{T}(r, u_j). \tag{12}$$

Если $u^*(z) \in M_\infty$ и $u = u^*(z)$ — решение уравнения (10), то $u^*(z)$ является одной из ветвей а. ф. $u(z)$, определяемой уравнением (10): $u^*(z) = u_j(z)$ для некоторого j. Из (12) следует, что характеристика $T(r, u^*)$ мероморфной функции u^* [1] равна характеристике $\tilde{T}(r, u^*)$ (см. (12)), если u^* рассматривать как ветвь а. ф. $u(z)$. Определение (12) характеристики а. ф. отличается от определения в [9, 10] постоянным множителем m. С помощью алгоритма Евклида всегда можно добиться, чтобы в (10) наибольший общий делитель многочленов $R_0, R_1, \ldots, R_m$, как многочленов от w над полем M_∞, был равен единице.

Теорема 4. *Пусть а. ф. $u(z)$ определяется уравнением* (10) (*которое может быть приводимым*). *Тогда* ($r \to \infty$)

$$T(r, u) = dT(r, w) + O(\Sigma T(r, a_{ij})). \tag{13}$$

Пусть $u^*(z) \in M_\infty$ и $u = u^*(z)$ — решение (10), *причем $\Phi(z, u, w)$ — неприводимый многочлен от u и w над полем M_∞. Тогда*

$$T(r, u^*) = (d/m + o(1))\, T(r, w) + O(\Sigma T(r, a_{ij})), \quad r \overline{\in} E. \tag{14}$$

Формула (13) доказана в [11], формула (14) — в [12]. Из (13) следует такая теорема из [11].

Теорема 5. *Пусть $u^*(z) \in M_\infty$ и $u = u^*(z)$ — решение уравнения* (10) (*которое может быть приводимым*). *Тогда*

$$m^{-1}(T(r, w) - \Sigma T(r, a_{ij})) \leqslant T(r, u^*) + O(1) \leqslant dT(r, w) + \Sigma T(r, a_{ij}). \tag{15}$$

Теорема 6. *Пусть* $f(z) \in M_\infty$, $q(z) = c_q z^q + \ldots + c_0$, $c_i \in \mathbb{C}$, $\mu_1 = |c_q| + \varepsilon$, $\mu_2 = |c_q| - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. *Тогда* $(r > r_0)$

$$T(\mu_2 r^q, f(z)) < T(r, f(q(z))) + O(1) < T(\mu_1 r^q, f(z)). \tag{16}$$

Если f — *целая функция, то*

$$M(\mu_2 r^q, f(z)) < M(r, f(q(z))) < M(\mu_1 r^q, f(r)). \tag{17}$$

Теорема 7. *Пусть* $E \subset [0, \infty)$, $\operatorname{mes} E = \mu < \infty$. *Пусть* $\varphi(x) \nearrow \infty$; $x \geqslant 0$, $\varphi(1) - \varphi(0) = \mu + p$, $p > 0$. *Предположим, что* $\forall\, x_1, x_2, x_1 < x_2$ *и* $\forall k \in \mathbb{N}$ *выполняется* $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2 + k) - \varphi(x_1 + k)$. *Существует такое* x_0, *что* $\varphi(x_0 + k) \overline{\in} E$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 1. Применив к (2) равенство (14), получим

$$T(r, f(q(z))) = (dm^{-1} + o(1))\, T(r, f(p(z))) + O(T(r, a)), \tag{18}$$

$r \overline{\in} E$, или, учитывая (3), (4),

$$T(r, f(q(z))) = (\varkappa + o(1))\, T(r, f(p(z))), \quad r \overline{\in} E. \tag{19}$$

Положим

$$\mu_1 = \mu + \varepsilon, \quad \mu_2 = \mu - \varepsilon, \quad \nu_1 = \nu + \varepsilon, \quad \nu_2 = \nu - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Обозначим

$$T(r, f) = T(r). \tag{21}$$

Из (19), (16), (20), (3) следует $(r > r_0,\ r \overline{\in} E)$

$$T(\mu_2 r^q) < (\varkappa + \varepsilon)\, T(\nu_1 r^p); \quad T(\mu_1 r^q) > (\varkappa - \varepsilon)\, T(\nu_2 r^p). \tag{22}$$

Если $n = 1$ $(q = p)$, то из (22) получаем

$$T(\mu_2 r^q) < (\varkappa + \varepsilon)\, T(\nu_1 r^q), \tag{23}$$

$$T(\mu_1 r^q) > (\varkappa - \varepsilon)\, T(\nu_2 r^q), \quad r \overline{\in} E. \tag{24}$$

Пусть $\ln \varkappa / \ln \sigma \geqslant 0$. Если $\varkappa \leqslant 1$, $\sigma < 1$, сделаем в (23) замену $\mu_2 r^q = t$, а в (24) — замену $\mu_1 r^q = \rho$. Тогда в (23) $\nu_1 r^q = t\nu_1/\mu_2$, а в (24) $\nu_2 r^q = \rho \nu_2/\mu_1$. Так как $\mu < \nu$, то согласно (20) $\nu_1/\mu_2 = \omega_1 > 1$, $\nu_2/\mu_1 = \omega_2 > 1$ (если ε достаточно мало), и из (23), (24) следует

$$T(\omega_1 t) > \alpha_1 T(t), \quad \alpha_1 = 1/(\varkappa + \varepsilon); \quad \omega_1 > 1, \tag{25}$$

$$T(\omega_2 \rho) < \alpha_2 T(\rho), \quad \alpha_2 = 1/(\varkappa - \varepsilon) > 1; \quad \omega_2 > 1. \tag{26}$$

Можно выбрать такое ρ_*, что функция $(\omega_2^x \rho_* \nu_2^{-1})^{1/q}$ удовлетворяет условиям теоремы 7. Поэтому существует такое x_0, что $\omega_2^{x_0 + k} \rho_* = \omega_2^k \rho_0 \overline{\in} E$, $k \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $\rho_0 = \omega_2^{x_0} \rho_* > 1$. Поэтому, учитывая (26),

$$T(\omega_2^k \rho_0) < \alpha_2 T(\omega_2^{k-1} \rho_0) < \ldots < \alpha_2^k T(\rho_0). \tag{27}$$

Пусть $\omega_2^{k-1} \rho_0 < \rho < \omega_2^k \rho_0$. Тогда $k < \ln \rho / \ln \omega_2$, $\alpha_2^k < \rho^{\ln \alpha_2 / \ln \omega_2}$. Так как $\alpha_2 = 1/(\varkappa - \varepsilon)$, $\omega_2 = \nu_2/\mu_1$, $\sigma = \mu/\nu$, то $\ln \alpha_2 / \ln \omega_2 = \ln(\varkappa - \varepsilon)/\ln(\mu_1/\nu_2) = \ln(\varkappa - \varepsilon)/\ln \sigma_1$, где $\sigma_1 = (\mu + \varepsilon)/(\nu - \varepsilon)$, $\sigma_1 \to \sigma$, когда $\varepsilon \to 0$. Поэтому $\alpha_2^k < \rho^{\ln(\varkappa - \varepsilon)/\ln \sigma_1}$, и, учитывая (27),

$$T(\rho) < \rho^{\ln(\varkappa - \varepsilon)/\ln \sigma_1} T(\rho_0), \ \sigma_1 = \sigma + \varepsilon_1 \quad (\rho > \rho_0). \tag{28}$$

Из (28), (21) следует, что f имеет нулевой порядок, если $\varkappa = 1$. Пусть далее $\varkappa < 1$, $\sigma < 1$. Из (25), как и при доказательстве (28), получаем $T(t) > t^{\ln(\varkappa + \varepsilon)/\ln \sigma_2} T(t_0)$, $\sigma_2 = (\mu - \varepsilon)/(\nu + \varepsilon)$, $t > t_0$. Отсюда и из (28) следует (6). Случай, когда $\varkappa \geqslant 1$, $\sigma > 1$ рассматривается аналогично предыдущему. Пусть $\ln \varkappa / \ln \sigma < 0$. Если $\varkappa > 1$, $\sigma < 1$ $(\mu < \nu)$, то (24) противоречиво, когда $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Если $\varkappa < 1$, $\sigma > 1$ $(\mu > \nu)$, то (23) противоречиво. Но (23), (24) получены при условии (4). Поэтому, если $\ln \varkappa / \ln \sigma < 0$, то не существуют мероморфные решения уравнения (2), удовлетворяющие

(4). Неравенства (22) совпадают с неравенствами (11) и из [3]. Поэтому доказательство соотношения (5) и исследование случая, когда $\ln \varkappa/\ln n<1$, повторяет доказательство из [3, с. 224]. При этом, чтобы избежать исключительного множества E, используется теорема 7, как это было показано выше.

Доказательство теоремы 2. Применив к (2) соотношение (15), получим $m^{-1}T(r, f(p(z))) \leqslant T(r, f(q(z)))+O(\Sigma T(r, a_{ij})) \leqslant dT(r, f(p(z)))$, или, учитывая (16), (3), (20),

$$T(\nu_2 r^p, f) < mT(\mu_1 r^q, f) + O(T(r, a)), \tag{29}$$

$$T(\mu_2 r^q, f) < dT(\nu_1 r^p, f) + O(T(r, a)). \tag{30}$$

Пусть $n = q/p \neq 1$. Если $p > q$, то из (29), (7) следует $T(\nu_2 r^p, f) < mT \times \times (\mu_1 r^q, f) + cT(r, f) < c_1 T(\mu_1' r^q, f)$, $c_1 = m + c$, $\mu_1' = \max(1, \mu_1)$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2 из [3], следует $T(r, f) < (c \ln r)^{\ln c_1/\ln n} T(r_0, f)$, или $\ln T(r, f) < c \ln \ln r$, $c = \text{const}$. Если $q > p$, рассматривают неравенство (30). Если $n = q/p = 1$, $\max(\mu, \nu) > 1$, то аналогично показывается, что $\ln T(r, f) < c \ln r$.

Доказательство теоремы 3. Из (18), (16), (20), (3) следует

$$T(\mu_2 r^q, f) < (\varkappa + \varepsilon)\, T(\nu_1 r^p, f) + cT(r, a), \quad r \overline{\in} E, \tag{31}$$

$$T(\mu_1 r^q, f) > (\varkappa - \varepsilon)\, T(\nu_2 r^p, f) - cT(r, a), \quad r \overline{\in} E. \tag{32}$$

Пусть $n = 1$ $(q = p)$. Из (31), (32) получаем

$$T(\mu_2 r^q) < (\varkappa + \varepsilon)\, T(\nu_1 r^q) + cT(r, a), \tag{33}$$

$$T(\mu_1 r^q) > (\varkappa - \varepsilon)\, T(\nu_2 r^q) - cT(r, a), \quad r \overline{\in} E. \tag{34}$$

Пусть $s = \ln \varkappa/\ln \sigma < 0$. Если $\varkappa < 1$, $\sigma > 1$ $(\mu > \nu)$, то из (33) следует (учитываем, что $\max(\mu, \nu) > 1$, когда $p = q = 1$): $cT(r, a) > (1 - \varkappa - \varepsilon)\, T(\mu_2 r^q)$, или $T(r) < cT(r, a)$. Если $\varkappa > 1$, $\sigma < 1$ $(\mu < \nu)$, то из (34) следует $cT(r, a) > (\varkappa - \varepsilon - 1)\, T(\nu^2 r^q)$. Итак, (9) доказано для $s < 0$. Пусть $s = \ln \varkappa/\ln \sigma \geqslant 0$. Если $\varkappa \leqslant 1$, $\sigma < 1$ $(\mu < \nu)$, в (34) сделаем замену: положим $\rho = \mu_1 r^q$, когда $q > 1$ (или $q = 1$, $\mu \geqslant 1$); когда $q = 1$, $\mu < 1$, положим $\rho = r$. Получим

$$T(\omega\rho) < \alpha T(\rho) + c_1 T(\rho, a), \quad \alpha = 1/(\varkappa - \varepsilon) > 1, \tag{35}$$

где $\omega = \nu_2/\mu_1 > 1$, если $q > 1$ или $q = 1$, $\mu \geqslant 1$; если же $q = 1$, $\mu < 1$, то $\omega = \nu_2 > 1$ $(\max(\mu, \nu) > 1)$. По теореме 7 существует такое ρ_0, что $\omega^k \rho_0 \overline{\in} E$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому из (35) следует $T(\omega^k \rho_0) < \alpha T(\omega^{k-1}\rho_0) + cT(\omega^{k-1}\rho_0, a)$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2 из [2], следует (9). Пусть теперь $\varkappa \geqslant 1$, $\sigma > 1$ $(\mu > \nu)$. Сделаем в (33) замену: $\nu_1 r^q = \rho$, если $q > 1$ (или $q = 1$, $\nu \geqslant 1$); если $q = 1$, $\nu < 1$, положим $r = \rho$. Получим

$$T(\omega\rho) < \alpha T(\rho) + cT(\rho, a), \quad \alpha = \varkappa + \varepsilon > 1, \quad \rho \overline{\in} E, \tag{36}$$

где $\omega = \mu_2/\nu_1 > 1$, если $q > 1$ (или $q = 1$, $\nu \geqslant 1$); если же $q = 1$, $\nu < 1$, то $\omega = \mu_2 > 1$. Дальнейшее доказательство повторяет предыдущее. Пусть $n \neq 1$, $\tau = \ln \varkappa/\ln n < 0$. Если $\varkappa < 1$, $n > 1$ $(q > p)$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то из (31) следует $cT(r, a) > (1 - \varkappa - \varepsilon)\, T(\mu_2 r^q)$, т. е. $T(r) = O(T(r, a))$, $r \overline{\in} E$. Если $\varkappa > 1$, $n < 1$ $(q < p)$, то из (32) следует $cT(r, a) > (\varkappa - 1 - \varepsilon)\, T(\nu_2 r^p)$, т. е. $T(r) = O(T(r, a))$, $r \overline{\in} E$. Если $\tau < 0$, теорема доказана. Пусть $\tau = \ln \varkappa/\ln n \geqslant 0$. Предположим, что $\varkappa \leqslant 1$, $n < 1$ $(q < p)$. Если $p > q > 1$ (или $p > q = 1$, $\mu \geqslant 1$), сделаем в (32) замену $\rho = \mu_1 r^q$; если $p > q = 1$, $\mu < 1$, положим $\rho = r$. Получим $\rho \overline{\in} E$)

$$T(\omega\rho^m) < \alpha T(\rho) + c_1 T(\rho, a), \quad \alpha = (\varkappa - \varepsilon)^{-1}, \quad m = n^{-1}, \tag{37}$$

где $\omega = \nu_2/\mu_1^{p/q}$, если $p > q > 1$ (или $p > q = 1$, $\mu \geqslant 1$); $\omega = \nu_2$, если $p > q = 1$, $\mu < 1$. Неравенство (37) аналогично неравенству (18) из [3]. Из

(37), как и при доказательстве теоремы 3 из [3], следует (8). При этом, чтобы избежать исключительного множества E, дополнительно используется теорема 7, как это было показано выше.

Замечание 4. В основе доказательств теорем 1—3 лежат теоремы 4 и 5. Известно, что эти теоремы обобщаются на а. ф. Это позволяет сформулировать теоремы 1—3 для случая, когда в (2) решение f и все коэффициенты a_{ij} — а. ф. Функция $f(z) = \sin \sqrt{z}$ — решение уравнения $f^2(4z) = 4f^2(z) - 4f^4(z)$, т. е. существуют а. ф., удовлетворяющие уравнению вида (2).

Доказательство теоремы 6. Пусть $|f(q(0))| = a$, $|f(0)| = b$. Положим $\psi(z) = f(z)/[2(a+b+1)]$. Тогда $\psi(q(z)) = f(q(z))/[2(a+b+1)]$; $|\psi(0)| < 1/2$; $|\psi(q(0))| < 1/2$. Поэтому

$$n(0, e^{i\theta}, \psi(z)) = 0, \quad n(0, e^{i\theta}, \psi(q(z))) = 0. \tag{38}$$

Существует $r_0 > 0$ такое, что для всех $a \in \mathbb{C}$ и $r > r_0$ выполняется

$$qn(\mu_2 r^q, a, \psi) \leqslant (r, a, \psi(q)) \leqslant qn(\mu_1 r^q, a, \psi). \tag{39}$$

Из (38), (39) следует

$$N(r, e^{i\theta}, \psi(q)) - N(r_0, e^{i\theta}, \psi(q)) = \int_{r_0}^{r} n(t, e^{i\theta}, \psi(q))\, t^{-1} dt \geqslant$$

$$\geqslant \int^{r} qn(\mu_2 r', e^{i\theta}, \psi)\, t^{-1} dt = \int_{\mu_2 r_0^q}^{\mu_2 r^q} n(\tau, e^{i\theta}, \psi)\, \tau^{-1} d\tau = N(\mu_2 r^q, e^{i\theta}, \psi) -$$

$$- N(\mu_2 r_0^q, e^{i\theta}, \psi). \tag{40}$$

По теореме Картана [1]

$$T(r, f) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, f)\, d\theta + c(f), \quad c(f) = \text{const}, \tag{41}$$

$c(f)$ не зависит от r. Применяя (41) к (40), получим $T(r, \psi(q)) - T(r_0, \psi(q)) \geqslant T(\mu_2 r^q, \psi) - T(\mu_2 r_0^q, \psi) + O(1)$, $r > r_0$, или $T(r, \psi(q(z))) \geqslant T(\mu_2 r^q, \psi(z)) + O(1)$. Аналогично $T(r, \psi(q(z)) \leqslant T(\mu_1 r^q, \psi(z)) + O(1)$. Формула (17) очевидна.

Доказательство теоремы 7. Предположим, что $\forall x_0 \in [0, 1]$ найдется такой номер $k_0 = k(x_0)$, что $\varphi(x_0 + k_0) \in E$. Множество E можно покрыть счетной системой замкнутых отрезков $\{\Delta\}$ с суммой длин этих отрезков меньшей, чем $\mu + p/2$. Можно считать, что точки $\varphi(k)$, $k = 0, 1, \ldots$ не являются внутренними точками отрезков из $\{\Delta\}$. Для каждого $k = 0, 1, \ldots$ отрезок $[\varphi(k), \varphi(k+1)]$ взаимно однозначно отображается на отрезок $[\varphi(0), \varphi(1)]$ при помощи отображения $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(x + k)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Возьмем x_0, $0 < x_0 < 1$. По предположению существует целое $k_0 = k(x_0)$ такое, что $\varphi(x_0 + k_0) \in E$. В множестве $\{\Delta\}$ выберем отрезок J_0, $\varphi(x_0 + k_0) \in J_0$. По предположению $J_0 \subset [\varphi(k_0), \varphi(k_0 + 1)]$. Пусть $\varphi(x_1 + k_0)$ — начало, $\psi(x_2 + k_0)$ — конец отрезка J_0. Отрезку J_0 при помощи отображения $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(x + k_0)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, соответствует отрезок J_*, $\varphi(x_0) \in J_*$; $\varphi(x_1)$ — начало, $\varphi(x_2)$ — конец отрезка J_*. Тогда $\varphi(x_2 + k_0) - \varphi(x_1 + k_0)$ — длина J_0; $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ — длина J_*. По условию $\varphi(x_2 + k_0) - \varphi(x_1 + k_0) \geqslant \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ — длина J_0 не меньше длины J_*. Отобразим так все отрезки Δ, $\Delta \in \{\Delta\}$, на $[\varphi(0), \varphi(1)]$ с помощью отображений $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(x + k)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots$. Согласно предположению, образы отрезков Δ, $\Delta \subset [\varphi(0), \infty)$, полностью покроют отрезок $[\varphi(0), \varphi(1)]$. Сумма длин этих отрезков не меньше, чем $\varphi(1) - \varphi(0) = \mu + p$, а потому и сумма длин отрезков из $\{\Delta\}$ не меньше чем $\mu + p$. Получили противоречие.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Мохонько А. З.* О дифференциальных и функциональных уравнениях с множителями.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 9, с. 1713—1715.
3. *Мохонько В. Д.* О мероморфных решениях одного класса функциональных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 2, с. 222—225.
4. *Мохонько А. З.* Об одном классе дифференциальных и функциональных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 3, с. 414—419.
5. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М. : Физматгиз, 1957.— 235 с.
6. *Goldstein R.* On meromorphic solutions of certain functional equations.— Aequat. math., 1978, **18**, p. 112—157.
7. *Baker J. N., Gross F.* On factorizing entire functions.— Proc. London Math. Soc., 1968,3 N 18, p. 69—76.
8. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М. : Наука, 1976.— 648 с.
9. *Мохонько А. З.* Неванлинновские характеристики композиции рациональных и алгеброидных функций.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 388—396.
10. *Selberg H. L.* Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen.— Math. Zeitschrift, 1930, **31**, S. 709—728.
11. *Мохонько А. З.* О неванлинновских характеристиках для одного класса мероморфных кривых.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1976, вып. 25, с. 95—105.
12. *Еременко А. Э.* Мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук., 1982, **37**, вып. 4 (226), с. 53—82.

Львов. политехн. ин-т Поступила 13.08.83