УДК 519.41/47

В. С. Марач

Группы с условием N-инвариантности для нециклических подгрупп

В настоящей работе изучаются группы с условием N-инвариантности для нециклических подгрупп.

Определение. *Подгруппу H группы G будем называть N-инвариантной в G, если H имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G.*

Теорема 1. *В группе G, содержащей конечную нециклическую подгруппу, произвольная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда коммутант группы G конечен.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из результата работы [1].

Необходимость. Пусть группа G содержит конечную нециклическую подгруппу K и каждая нециклическая подгруппа группы G N-инвариантна. Тогда подгруппа K имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Пусть H/N — произвольная подгруппа фактор-группы G/N. Очевидно, подгруппа H нециклическая, поэтому ввиду условия N-инвариантности она имеет конечный индекс к некоторой инвариантной подгруппе N_1 группы G. Но тогда подгруппа H/N имеет конечный индекс в инвариантной подгруппе N_1/N фактор-группы G/N, т. е. в фактор-группе G/N каждая подгруппа N-инвариантна. Отсюда следует, что коммутант фактор-группы G/N конечен (см. [1]). Но тогда конечен и коммутант группы G, так как подгруппа N конечна. Теорема доказана.

Следствие 1. *В периодической группе G, содержащей бесконечную абелеву подгруппу, произвольная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда коммутант группы G конечен.*

Доказательства требует только необходимость. Пусть в периодической группе G, содержащей бесконечную абелеву подгруппу A, каждая нециклическая подгруппа N-инвариантна. Очевидно, произвольная бесконечная подгруппа группы G нециклическая, поэтому она N-инвариантна. Но тогда группа G либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением квазициклической группы (см. [2]). Покажем, что второй случай невозможен. Если это не так, то группа G, ввиду теоремы 1, не содержит конечных нециклических подгрупп. Но тогда каждая нециклическая подгруппа группы G имеет конечный индекс в G и при сделанных предположениях должна быть абелевой (см. [3]). Следствие доказано.

Следствие 2. *В смешанной группе G, содержащей конечную нетривиальную инвариантную подгруппу, произвольная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда* 1) *G имеет конечный коммутант*: 2) $G = (\langle t\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, *$\langle t, b\rangle$ — конечная циклическая группа, $\langle a\rangle$ — бесконечная циклическая группа, $G/\langle t\rangle$ — бесконечная диэдральная группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в смешанной группе G, содержащей конечную нетривиальную инвариантную подгруппу K, каждая нециклическая подгруппа N-инвариантна. Если H/K—произвольная бесконечная подгруппа фактор-группы G/K, то подгруппа H, очевидно, нециклическая, поэтому ввиду условия N-инвариантности она имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Но тогда подгруппа H/K имеет конечный индекс в инвариантной подгруппе N/K фактор-группы G/K, т. е. в фактор-группе G/K условию N-инвариантности удовлетворяет каждая бесконечная подгруппа. Как доказано в [2], в этом случае фактор-группа G/K либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением бесконечной циклической группы. Если коммутант фактор-группы G/K конечен, то конечен и коммутант группы G, так как подгруппа K конечная. Поэтому будем предполагать, что G/K—

конечное нецентральное расширение бесконечной циклической группы. Нетрудно показать, что в этом случае группа G также является конечным нецентральным расширением бесконечной циклической группы. Группа G не содержит конечных нециклических подгрупп, так как в противном случае, ввиду теоремы 1, она имела бы конечный коммутант. Поэтому каждая нециклическая подгруппа группы G бесконечна и, следовательно, она имеет конечный индекс в G. Но тогда при сделанных предположениях группа G является группой типа 2) (см. [3]). Необходимость доказана.

Достаточность. Если G — группа типа 1), то каждая подгруппа группы G N-инвариантна. Если G— группа типа 2), то каждая нециклическая подгруппа группы G имеет конечный индекс в G (см. [3]), и поэтому также N-инвариантна. Следствие доказано.

Следствие 3. *В смешанной группе G с нетривиальным центром произвольная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда коммутант группы G' конечен.*

Доказательства требует только необходимость. Пусть в смешанной группе G с нетривиальным центром Z каждая нециклическая подгруппа N-инвариантна. Если Z содержит элементы конечного порядка, то доказательство завершается непосредственным применением следствия 2. Поэтому будем предполагать, что центр Z не имеет кручения. Пусть a — произвольный элемент из Z и K — произвольная конечная нетривиальная подгруппа группы G. Подгруппа $K\langle a\rangle$ нециклическая, поэтому ввиду условия N-инвариантности она имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Подгруппа N является FC-группой как группа, конечная над центром, поэтому элементы конечного порядка из N порождают в ней конечную характеристическую подгруппу T (см., напр., [4, следствие 3.11]). Так как $N \lhd G$ и T — характеристическая подгруппа в N, то и $T \lhd G$. Доказательство можно завершить, применяя следствие 2.

Теорема 2. *Пусть группа G содержит бесконечную абелеву подгруппу и конечную нетривиальную инвариантную подгруппу. В группе G произвольная бесконечная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда группа G либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением бесконечной циклической или квазициклической группы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа, содержащая бесконечную абелеву подгруппу A, конечную нетривиальную инвариантную подгруппу K и обладающая свойством, указанным в теореме. Если H/K — произвольная бесконечная подгруппа фактор-группы G/K, то, очевидно, H — бесконечная нециклическая подгруппа группы G. Поэтому ввиду условия N-инвариантности подгруппа H имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Но тогда подгруппа H/K имеет конечный индекс в инвариантной подгруппе N/K фактор-группы G/K. Следовательно, каждая бесконечная подгруппа фактор-группы G/K N-инвариантна. Как доказано в [2], тогда фактор-группа G/K либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением бесконечной циклической или квазициклической группы. Если коммутант фактор-группы G/K конечен, то конечен и коммутант группы G, так как подгруппа K конечная. Если G/K есть конечное нецентральное расширение бесконечной циклической группы, то группа G содержит, очевидно, бесконечные циклические подгруппы, причем каждая такая подгруппа имеет конечный индекс в G. В этом случае группа G есть конечное расширение некоторой своей бесконечной циклической подгруппы. Очевидно, это расширение также нецентральное. Если G/K — конечное нецентральное расширение квазициклической группы, то в этом случае группа G сама является конечным нецентральным расширением квазициклической группы (см. [4, лемма 1.6]). Необходимость доказана.

Достаточность. Если группа G имеет конечный коммутант, то в этом случае произвольная подгруппа группы G N-инвариантна (см. [1]). Если же группа G есть конечное нецентральное расширение бесконечной циклической или квазициклической группы, то нетрудно показать, что в этом случае каждая бесконечная подгруппа группы G имеет конечный индекс в G, и поэтому N-инвариантна. Теорема доказана.

Следствие 4. *В периодической группе G, содержащей бесконечную абелеву подгруппу, произвольная бесконечная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда группа G либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением квазициклической группы.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2 доказательства требует только необходимость. Пусть G — периодическая группа, содержащая бесконечную абелеву подгруппу A и удовлетворяющая условию, указанному в следствии. Так как группа G не содержит бесконечных циклических подгрупп, то в ней каждая бесконечная подгруппа N-инвариантна. Но тогда группа G либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением квазициклической группы. Следствие доказано.

Следствие 5. *В смешанной группе G с нетривиальным центром произвольная бесконечная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда группа G либо имеет конечный коммутант, либо является конечным нецентральным расширением бесконечной циклической группы.*

Доказательства требует только необходимость. Пусть G — смешанная группа с нетривиальным центром, обладающая свойством, указанным в следствии. Если центр Z группы G содержит нетривиальную конечную подгруппу, то доказательство завершается непосредственным применением теоремы 2. Поэтому будем предполагать, что центр Z не имеет кручения. Пусть a — некоторый элемент из Z. Так как группа G смешанная, то она содержит нетривиальную конечную подгруппу K. Тогда подгруппа $K\langle a\rangle$ является бесконечной нециклической подгруппой в G, поэтому ввиду условия N-инвариантности она имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Подгруппа N является FC-группой как группа, конечная над центром, поэтому элементы конечного порядка из N составляют конечную характеристическую в N подгруппу T (см. [4, следствие 3.11]). Так как $N \lhd G$, то и $T \lhd G$. И в этом случае доказательство завершается применением теоремы 2.

Следствие 6. *В смешанной группе G, содержащей бесконечную абелеву периодическую подгруппу, произвольная бесконечная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда коммутант группы G конечен.*

Доказательства требует только необходимость. Пусть G — смешанная группа, содержащая бесконечную абелеву периодическую подгруппу H и удовлетворяющая условию следствия. Возможны два случая.

1. Подгруппа H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Так как H — бесконечная нециклическая подгруппа группы G, то ввиду условия N-инвариантности H имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Подгруппа N локально конечна и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, поэтому она черниковская, т. е. является конечным расширением подгруппы R, разлагающейся в прямое произведение конечного числа квазициклических групп. Очевидно, подгруппа R характеристическая в N. Так как $N \lhd G$, то и $R \lhd G$. Нетрудно видеть, что подгруппа R слойно конечна, т. е. множество элементов любого фиксированного порядка из R конечно и порождает в R конечную характеристическую подгруппу. Так как $R \lhd G$, то эта характеристическая подгруппа также инвариантна в G. Доказательство в этом случае завершается применением теоремы 2.

2. Подгруппа H не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Тогда H содержит бесконечную абелеву подгруппу B, разлагающуюся в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков: $B = \prod_{n=0}^{\infty} \langle a_n\rangle$. Обозначим $A = \prod_{n=1}^{\infty} \langle a_n\rangle$. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — множество всех различ-

ных бесконечных подгрупп группы A. Очевидно, подгруппа $B_i = \langle a_0 \rangle A_i$ является бесконечной нециклической подгруппой группы G для произвольного $i \in I$. Поэтому ввиду условия N-инвариантности для каждого $i \in I$ подгруппа B_i имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N_i группы G. Обозначим $N_0 = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$, $B_0 = \bigcap\limits_{i \in I} B_i$. Очевидно, $B_0 = \langle a_0 \rangle$, $N_0 \lhd G$ и $\langle a_0 \rangle \leqslant N_0$. Предположим, что подгруппа N_0 бесконечна. Для некоторого $i_0 \in I$ $A_{i_0} = A$. Так как $N_0 A \leqslant N_{i_0}$ и $|N_0 : N_0 \cap A| = |N_0 A : A| < \infty$, то $N_0 \cap A$ — бесконечная подгуппа группы A. Очевидно, подгруппа $N_0 \cap A$ разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков: $N_0 \cap A = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \langle b_j \rangle$. Обозначим $F = \prod\limits_{j=1, l=2j}^{\infty} \langle b_l \rangle$. Очевидно, F — бесконечная подгруппа из A, поэтому найдется такое $f \in I$, что $|N_f : F| < \infty$. Имеем $|N_f : F| = |N_f : N_0| \cdot |N_0 : F| \geqslant |N_f : N_0| \cdot |N_0 \cap A : F|$.

Так как $|N_0 \cap A : F| = \infty$, то и $|N_f : F| = \infty$. Полученное противоречие показывает, что подгруппа N_0 конечна. Доказательство завершается применением теоремы 2.

Из следствия 6 непосредственно получаем такое следствие.

Следствие 7. *В смешанной группе G, содержащей бесконечную абелеву периодическую подгруппу, произвольная нециклическая подгруппа тогда и только тогда N-инвариантна, когда коммутант группы G конечен.*

1. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subrgoups.— Math. Z., 1955, 63, p. 76—96.
2. *Марач В. С.* IY-группы.— В кн.: Исследование групп с заданными свойствами системы подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 71—79.
3. *Курдаченко Л. А., Пылаев В. В.* Группы с нециклическими подгруппами конечного индекса.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 4, с. 435—440.
4. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
5. *Марач В. С.* Группы с плотной системой конечных инвариантных скачков.— Киев, 1981.— 28 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 81.34)
6. *Марач В. С.* О некоторых группах, определяемых свойствами циклических подгрупп.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 6, с. 776—779.

Ровен. гос. пед. ин-т

Поступила 11.10.83