УДК 517.5

А. К. Кушпель

Об одном методе приближения периодических функций

Следуя [1], обозначим через W_β^ψ множество суммируемых 2π-периодических функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos(kt + \beta\pi/2)\, dt,$$

где $\psi(k)$ — некоторая функция натурального аргумента, $\beta \in (-\infty, \infty)$ и $\operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leqslant 1$.

Представляет интерес изучение асимптотического поведения величины

$$\mathcal{E}_n^*(W_\beta^\psi, x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in W_\beta^\psi} |f(x) - \widetilde{S}_n^*(f, x)|, \quad n \to \infty,$$

где $\widetilde{S}_n^*(f; x)$ — интерполяционный тригонометрический полином n-го порядка, совпадающий с функцией $f(x)$ в узлах интерполяции $x_k^{(n)} = kh$, $h = \pi/n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и выражающийся формулой

$$\widetilde{S}_n^*(f; x) = n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} \mathcal{D}_n^*(x - x_k^{(n)}) f(x_k^{(n)}),$$

где

$$\mathcal{D}_n^*(t) = \mathcal{D}_n(t) - (\cos nt)/2 = \sin(nt)\operatorname{ctg}(t/2)/2 \tag{1}$$

— модифицированное ядро Дирихле порядка n, а $\mathcal{D}_n(t) = 1/2 + \sum_{p=1}^{n} \cos pt = (\sin(n+1/2)t)/2\sin(t/2)$ — ядро Дирихле порядка n.

Уклонение $\mathcal{E}_n^*(W_\beta^\psi, x)$ выразим через

$$E_n(W_\beta^\psi) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in W_\beta^\psi} \inf_{T_{n-1}} \| f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot) \|_C,$$

т. е. точную верхнюю грань наилучших приближений функций $f(x)$ класса W_β^ψ тригонометрическими полиномами T_{n-1} порядка $n-1$ в метрике C.

В случае, когда $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta = r$, $r = 1, 2, \ldots$, в [2] установлено, что

$$\mathcal{E}_n(W^r, x) = \sup_{f \in W^r} |f(x) - \widetilde{S}_n(f; x)| = 2\pi^{-1} E_n(W^r) \ln n\, |\sin(n+1/2)x| +$$
$$+ O(E_n(W^r)) = 8\pi^{-2} \mathcal{K}_r n^{-r} \ln n\, |\sin(n+1/2)x| + O(n^{-r}), \quad n \to \infty,$$

где $\tilde{S}_n(f; x) = 2(2n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{2n} \mathcal{D}_n(x - x_k^{(n)}) f(x_k^{(n)})$ — интерполяционный полином Фурье, а $\mathcal{K}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(r-1)} (2\nu+1)^{-(r+1)}$ — известные константы Фавара.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть известно, что*

$$E_n(W_\beta^\psi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} \sin(nt - \alpha) \cos(kt + \beta\pi/2)\, dt, \tag{2}$$

$\alpha = \text{const}$. *Тогда* $\mathcal{E}_n^*(W_\beta^\psi, x) = 4\pi^{-1} E_n(W_\beta^\psi) \ln n |\sin nx| + O(E_n(W_\beta^\psi))$.

Для доказательства теоремы потребуется лемма.

Лемма. *Для нормы оператора* $\tilde{S}_n^*$ $M^*(x) \overset{\text{def}}{=} n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |\mathcal{D}_n^*(x - x_k^{(n)})|$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$M^*(x) = 2\pi^{-1} \ln n |\sin nx| + O(1). \tag{3}$$

Доказательство. Легко видеть, что функция $M^*(x)$ имеет период π/n, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $0 \leqslant x \leqslant \pi/n$.

Замечая, что при $t \in [-\pi; \pi]$ $\sin(nt) \operatorname{ctg}(t/2) - (\sin nt)/t = O(1)$, с учетом представления (1) имеем

$$M^*(x) = n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |\sin n(x - x_k^{(n)}) \operatorname{ctg}(x - x_k^{(n)})/2|/2 = n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |\sin n(x - x_k^{(n)})/$$

$$/(x - x_k^{(n)})| + O(1) = n^{-1} |\sin nx| \sum_{k=-n}^{n-1} |x - x_k^{(n)}|^{-1} + O(1) = \sigma_1(x) +$$

$$+ \sigma_2(x) + O(1), \tag{4}$$

где принято $\sigma_1(x) \overset{\text{def}}{=} n^{-1} |\sin nx| \sum_{k=0}^{n-1} |x - x_k^{(n)}|$, $\sigma_2(x) \overset{\text{def}}{=} n^{-1} |\sin nx| \times \sum_{k=-n}^{-1} |x - x_k^{(n)}|$. Так как $x_{-k}^{(n)} = -x_k^{(n)}$, то

$$\sigma_2(x) = \sum_{k=-n}^{-1} |x - x_k^{(n)}|^{-1} |\sin nx| n^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (x + x_k^{(n)})^{-1} |\sin nx| n^{-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x + k\pi/n)^{-1} |\sin nx| n^{-1} = \pi^{-1} \ln n |\sin nx| + O(1). \tag{5}$$

Рассмотрим $\sigma_2(x)$. В силу того, что $|\sin nx|/nx = O(1)$ и $|\sin nx|/ /n(x - \pi/n) = O(1)$, имеем

$$\sigma_1(x) = n^{-1} |\sin nx| \sum_{k=2}^{n-1} (x_k^{(n)} - x)^{-1} + O(1) = \pi^{-1} \ln n |\sin nx| + O(1). \tag{6}$$

Сопоставление соотношений (4), (5) и (6) доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Заметим прежде всего, что величина $\mathcal{E}_n^*(W_\beta^\psi, x)$ имеет период π/n, и так как для $x = 0$ утверждение теоремы очевидно, то достаточно рассмотреть случай $0 < x < \pi/n$.

Получим оценку сверху для $\mathscr{E}_n^*(W_\beta^\psi, x)$. С учетом того, что $\tilde{S}_n^*(T_{n-1}, x) = T_{n-1}(x)$, для произвольной функции $f(x) \in W_\beta^\psi$ имеем:

$$|f(x) - \tilde{S}_n^*(f; x)| = |f(x) - T_{n-1}^* + T_{n-1}^* - \tilde{S}_n^*(f; x)| = |f(x) - T_{n-1}^* - \\ - \tilde{S}_n^*(f - T_{n-1}^*, x)| \leqslant (1 + M^*(x)) E_n(W_\beta^\psi), \qquad (7)$$

где T_{n-1}^* — полином наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике C. Из соотношения (7) для величины $\mathscr{E}_n^*(W_\beta^\psi, x)$ получаем неравенство

$$\mathscr{E}_n^*(W_\beta^\psi, x) \leqslant (1 + M\ (x)) E_n(W_\beta^\psi). \qquad (8)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно построить функцию $f(x) \in W_\beta^\psi$, реализующую знак равенства в (8). Положим

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} \sin(n(x - t) + \alpha) \cos(kt + \beta\pi/2)\, dt. \qquad (9)$$

Воспользовавшись известным разложением (см., напр., [3]) $\operatorname{sign} \sin t = = 4\pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-1} \sin(2k+1)t$, получим следующее представление для функции $f_n(x)$:

$$f_n(x) = 4\pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \psi(n(2k+1))(2k+1)^{-1} \sin((2k+1)(nx+\alpha) + \beta\pi/2). \qquad (10)$$

Из условия теоремы, а также гредставлений (9) и (10), следует, что $f_n \in W_\beta^\psi$, принимает в точках $x_k^{(n)}$ значения $\pm E_n(W_\beta^\psi)$ со знаками, совпадающими соответственно со знаками $\operatorname{sign} \mathscr{D}_n^*(x - x_k^{(n)})$ и $|f_n(x)| \leqslant E_n(W_\beta^\psi)$. Значит,

$$|f_n(x) - \tilde{S}_n^*(f_n, x)| = M^*(x) E_n(W_\beta^\psi) + O(E_n(W_\beta^\psi)). \qquad (11)$$

Сопоставление соотношений (3), (8) и (11) доказывает теорему.

Отметим, что в ряде конкретных случаев величины $E_n(W_\beta^\psi)$ найдены. При $\psi(k) = k^{-s}$, $\beta \in (-\infty, \infty)$ значение $E_n(W_\beta^\psi)$ получено в [4], при $\psi(k) = = \rho^k$, $\beta = 0$ — в [5], при $\psi(k) = (\operatorname{ch} kh)^{-1}$, $h > 0$, $\beta = 0$ — в [6]. Го всех перечисленных случаях доказанная теорема справедлива, так как величина $E_n(W_\beta^\psi)$ представима в виде (2).

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 51 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83—10).
2. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами.— Докл. АН СССР, 1941, **31**, № 3, с. 215—218.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Т. 2.— М. : Физматгиз, 1968.— 393 с.
4. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер.— Мат. заметки, 1974, **16**, вып. 5, с. 691—701.
5. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций.— Докл. АН СССР, 1938, **18**, № 4—5, с. 245—251.
6. *Ахиезер Н. И.* О наилучших приближениях аналитических функций.— Докл. АН СССР, 1938, **18**, № 4—5, с. 241—244.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 23.06.83