УДК 517.521.8

А. П. Кохановский

Связь метода Абеля с некоторым подклассом методов суммирования рядов Вороного

Пусть $0 < p_0$, $0 \leqslant p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$. Последовательность s_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется суммируемой к числу s методом Вороного, или (W, p_n)-методом, если, полагая

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k / P_n, \tag{1}$$

имеем $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = s$.

Последовательность s_n суммируется к числу s методом Абеля (A-методом), если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ имеет единичный радиус сходимости и $\lim\limits_{x\to 1-0} F(x) = s$, где

$$F(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{2}$$

Далее будем рассматривать только такие (W, p_n)-методы, определяющая последовательность p_n которых удовлетворяет условиям:

$$p_n = \exp h_n, \quad 0 < \Delta h_k \to 0, \quad k\Delta h_k \to \infty, \quad k \to \infty; \tag{3}$$
$$\Delta^2 h_k < 0, \quad -\Delta^2 h_k \text{ не возрастает; } -k^2\Delta^2 h_k \text{ не убывает},$$

где $\Delta h_k = h_{k+1} - h_k$, $\Delta^2 h_k = \Delta h_{k+1} - \Delta h_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Условию (3) удовлетворяют, например, последовательности $h_n = n^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $h_n = \ln^\lambda (n+1)$, $\lambda > 1$.

Теорема. *Пусть $x_n = \exp(-\Delta h_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и p_n удовлетворяет условию (3). Тогда для любой последовательности s_n такой, что $s_n = o(n\Delta h_n)$, средние W_n метода Вороного и средние $F(x)$ метода Абеля связаны соотношением*

$$W_n - F(x_n) = o(1). \tag{4}$$

Следствие 1. *Пусть $p_n = \exp(cn^\alpha)$, $c > 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой последовательности s_n, удовлетворяющей условию $s_n = o(n^\alpha)$, справедливо соотношение $W_n - F(x_n) = o(1)$.*

Это следствие — частный случай теоремы.

Следствие 2. *Существует суммируемая методом Вороного последовательность, имеющая (c)-точку, отличную от (W, p_n)-предела.*

Доказательство. В работах [1, 2] введено понятие (c)-множества и доказано следующее предложение: если последовательность s_n суммируется к числу s методом Чезаро положительного порядка и если замкнутое выпуклое множество G является (c)-множеством последовательности s_n, то $s \in G$. В частности, все (c)-точки обязаны совпадать с числом s. В качестве простых следствий этого свойства получен целый ряд теорем тауберова типа, обобщающих известные классические результаты [1, теоремы 1—6; 3, теоремы 1—3].

Поскольку класс методов Чезаро является правильной частью методов суммирования Вороного, то, естественно, возникает задача о перенесении вышеупомянутого предложения из [1, 2] на весь класс методов Вороного. Оказывается, что такое перенесение невозможно для класса методов Вороного, удовлетворяющего условию (3).

Действительно, по теореме из [4] существует последовательность A_n такая, что: а) $A_n = o(n\Delta h_n)$; б) A_n суммируется к нулю методом Абеля; в) последовательность A_n имеет (c)-точку, равную единице. Согласно теореме, последовательность A_n суммируется к нулю и (W, p_n)-методом. Таким образом, существуют последовательности, (c)-точки которых не совпадают с их (W, p_n)-пределом.

Следствие 3. Если $s_n = o(n\Delta h_n)$, *то ядро средних* W_n *метода Вороного совпадает с ядром средних* $F(x)$ *метода Абеля.*

Доказательство. Пусть $K(W_n)$, $K(F(x_n))$, $K(F(x))$ — ядра соответственно последовательностей W_n, $F(x_n)$ и функции $F(x)$. Согласно преобразованию $F(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n W_n x^n / p(x)$, $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ [5, с. 90], и теореме Кноппа [5], справедливо включение $K(F(x)) \subset K(W_n)$. Применив к (4) теорему 6.3. II из [6], видим, что $K(W_n) = K(F(x_n))$. Поскольку множество значений $F(x_n)$ есть часть множества значений $F(x)$, то $K(F(x_n)) \subset \subset K(F(x))$. Итак, получена цепочка включений $K(F(x)) \subset K(W_n) = = K(F(x_n)) \subset K(F(x))$. Утверждение следствия 3 очевидно.

Доказательство теоремы разделим на несколько пунктов.

1. Последовательность h_k обладает свойствами: a) $\Delta^2 h_m/\Delta^2 h_n \to 1$ при $1 < m/n \to 1$, $n \to \infty$; b) $-\Delta^2 h_n < \Delta h_n/n$, $n = 1, 2, \ldots$; c) последовательность $n\Delta h_{n+1}$ возрастает, $n = 1, 2, \ldots$; d) $1 > \Delta h_{n+1}/\Delta h_n > 1 - 1/n$, $n = 2, 3, \ldots$.

Действительно, если $n < m$, то $1 \geqslant -\Delta^2 h_m/(-\Delta^2 h_n) = (-m^2\Delta^2 h_m n^2)/ /(-n^2\Delta^2 h_n m^2) \geqslant n^2/m^2$. Свойство a) доказано. Далее,

$$\Delta h_n = \sum_{k=n}^{\infty}(-\Delta^2 h_k) = \sum_{k=n}^{\infty} - k^2\Delta^2 h_k/k^2 \geqslant - n^2\Delta^2 h_n \sum_{k=n}^{\infty} k^{-2} >$$

$$> - n^2\Delta^2 h_n \sum_{k=n}^{\infty}(k^{-1} - (k+1)^{-1}) = - n\Delta^2 h_n.$$

Этим установлено свойство b). Свойство c) следует из равенства $(n+1) \times \times \Delta h_{n+2} - n\Delta h_{n+1} = (n+1)\Delta^2 h_{n+1} + \Delta h_{n+1} > 0$. Свойство d) доказывается аналогично a).

2. Справедливо предельное равенство

$$R_n(x_n) = (1 - x_n)\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x_n^k = o(1), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Действительно, если $\varepsilon_n = \max_{n \leqslant k < \infty} |s_k|/k\Delta h_k$, то

$$|R_n(x_n)| \leqslant \varepsilon_n (1 - x_n)\sum_{k=n+1}^{\infty} k\Delta h_k x_n^k \leqslant \varepsilon_n \Delta h_n (1 - x_n) x_n^{n+1} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)x_n^{k-(n+1)} + n\sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^{k-(n+1)}\right) \leqslant \varepsilon_n \Delta h_n x_n^n((1 - x_n)^{-1} + n) =$$

$$= \varepsilon_n \exp(-n\Delta h_n)(\Delta h_n/(1 - x_n) + n\Delta h_n) = o(1).$$

3. Для всех достаточно больших n справедливы неравенства

$$p_n(1 - x_n)^{-1}(1 - \alpha_n/n\Delta h_n) < P_n < p_n(1 - x_n)^{-1}, \tag{6}$$

где $\alpha_n \to 2$, $n \to \infty$.

Воспользуемся тождеством

$$h_{n-k} = h_n - k\Delta h_n + k\Delta^2 h_{n-1} + (k-1)\Delta^2 h_{n-2} + \ldots + \Delta^2 h_{n-k},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой. Учитывая, что $\Delta^2 h_n$ отрицательна и не убывает, получаем двойное неравенство

$$p_n x_n^k \exp(k(k+1)\Delta^2 h_{n-k}/2) \leqslant p_{n-k} \leqslant p_n x_n^k. \tag{7}$$

Оценка P_n сверху получается просто: $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \leqslant p_n \sum_{k=0}^{n} x_n^k < p_n/(1-x_n)$. Для оценки P_n снизу возьмем число m_n, которое является целой частью выражения $(\ln n\Delta h_n)/\Delta h_n$. Заметим, что $m_n/n \leqslant (\ln n\Delta h_n)/n\Delta h_n \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому для всех достаточно больших n, $n > m_n$, будем иметь

$$P_n > \sum_{k=0}^{m_n} p_{n-k} \geqslant p_n \sum_{k=0}^{m_n} x_n^k \exp(k(k+1)\Delta^2 h_{n-k}/2) \geqslant p_n(1 - x_n^{m_n})/(1-x_n) +$$

$$+ p_n \Delta^2 h_n \gamma_n (1-x_n)^{-3} \geqslant p_n(1 - \exp(\theta_n \Delta h_n)/n\Delta h_n - \gamma_n \Delta h_n n^{-1}(\tau_n \Delta h_n)^{-2})/$$

$$/(1-x_n) = p_n(1 - \alpha_n/n\Delta h_n)/(1-x_n),$$

где

$$\theta_n = (\ln n\Delta h_n)/\Delta h_n - m_n, \quad \tau_n = (1-x_n)/\Delta h_n \to 1, \; \gamma_n = \Delta^2 h_{n-m_n}/\Delta^2 h_n \to 1,$$

$$\alpha_n = \gamma_n/\tau_n^2 + \exp \theta_n \Delta h_n \to 2, \quad n \to \infty.$$

Неравенство (6) доказано.

4. Возьмем последовательность $i_n \to \infty$ натуральных чисел такую, что $i_n \Delta h_n \to 0$, $n \to \infty$. Очевидно, $i_n/n \to 0$, $n \to \infty$. Обозначим $F_n(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} s_k x^k$, $W_n^* = (1-x_n)\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k/p_n$, $t_n = \max_{i_n \leqslant k \leqslant n} |s_k|/k\Delta h_k$. Покажем, что справедливо равенство

$$F_n(x_n) - W_n^* = o(1). \tag{8}$$

Действительно,

$$|F_n(x_n) - W_n^*| \leqslant (1-x_n)\left(\sum_{k=0}^{i_n} + \sum_{k=i_n+1}\right)(|s_k|(x_n^k - p_{n-k}/p_n)) =$$

$$= A_n^{(1)} + A_n^{(2)}; \qquad A_n^{(1)} = O(1)(1-x_n) n\Delta h_n \sum_{k=0}^{i_n} x_n^k(-k(k+1)\Delta^2 h_{n-k}/2) =$$

$$= O(1)(1-x_n) n\Delta h_n(-\Delta^2 h_n) i_n^2/(1-x_n) = O(1)(i_n \Delta h_n)^2 = o(1);$$

$$A_n^{(2)} = O(1) t_n (1-x_n) n\Delta h((1-x_n)^{-1} - (1-x_n)^{-1}(1 - \alpha_n/n\Delta h_n)) =$$

$$= O(1) t_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что

$$W_n - W_n^* = o(1). \tag{9}$$

Действительно,

$$W_n - W_n^* = \left(\sum_{k=0}^{i_n} + \sum_{k=i_n+1}^{n}\right) p_{n-k} s_k (1/P_n - (1-x_n)/p_n) = B_n^{(1)} + B_n^{(2)}.$$

Используя неравенство (6), получаем

$$B_n^{(1)} = O(1) n\Delta h_n i_n p_n((1-x_n)(1-\alpha_n/n\Delta h_n)^{-1}/p_n - (1-x_n)/p_n) =$$

$$= O(1) n\Delta h_n i_n p_n(\alpha_n n\Delta h_n)(1-x_n)/p_n = O(1) i_n \Delta h_n = o(1),$$

$$B_n^{(2)} = (1 - P_n(1-x_n)/p_n) \sum_{k=i_n+1} p_{n-k} s_k/P_n = O(1) n\Delta h_n t_n(\alpha_n/n\Delta h_n) = o(1).$$

Таким образом, мы показали, что

$$|W_n - F(x_n)| \leqslant |W_n - W_n^*| + |W_n^* - F_n(x_n)| + |R_n(x_n)| = o(1), \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

1. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов.— Мат. сб., 1956, 38, № 4, с. 509—524.
2. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве одного класса интегралов Стильтьеса.— Мат. сб., 1959, **48**, № 4, с. 429—446.
3. *Давыдов Н. А.* (*c*)-свойства методов Чезаро и Абеля — Пуассона и теоремы тауберова типа.— Мат. сб., 1963, **60**, № 2, с. 185—206.
4. *Мельник В. И.* О суммировании рядов методами Чезаро и Абеля — Пуассона.— Мат. сб., 1965, **67**, № 4, с. 535—540.
5. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
6. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.— М. : Физматгиз, 1960.— 471 с.

Черкас. пед. ин-т

Поступила 12.10.83