УДК 517.94

К. Кенжебаев

К вопросу о решениях квазилинейных краевых задач с несвязанными краевыми условиями

В настоящей заметке развит предложенный в [2] подход к конструктивному анализу решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений. Основное внимание уделяется структуре вычислительного алгоритма, вопросам сходимости и оценкам.

Рассмотрим краевую задачу

$$dx/dt = P(t)\,x + Q(t)\,y + f(t, x, y), \qquad dy/dt = R(t)\,x + S(t)\,y + g(t, x, y), \quad (1)$$

$$x(0) = x(\omega), \qquad M_1 y(0) + M_2 y(\omega) = 0, \quad (2)$$

где P, Q, R, S — матрицы соответственно размерностей $(K \times K)$, $(K \times m)$, $(m \times K)$, $(m \times m)$; x, f — K-векторы, y, g — m-векторы; M_1, M_2 — вещественные постоянные $(m \times m)$-матрицы, причем $\det(M_1 + M_2) \neq 0$.

Пусть функции $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$, определены и непрерывны по совокупности переменных t, x, y в области $D = \{t, x, y : 0 \leqslant t \leqslant \omega, (x, y) \in R^k \times R^m\}$ и удовлетворяют относительно $(x, y) \in R^k \times R^m$ условию Липшица с постоянными L_f, L_g соответственно.

Решение задачи (1), (2) строим следующим итерационным методом:

$$dx_{k+1}/dt = P(t)\,x_k + Q(t)\,y_k + f(t, x_{k-1}, y_k), \qquad dy_{k+1}/dt = R(t)\,x_k + S(t)\,y_k + g(t, x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

В качестве начального приближения x_0, y_0 берем нулевые векторы; первое приближение x_1, y_1 ищем в виде $x_1 = \mathrm{const}$, $y_1 = 0$, где x_1 — решение уравнения

$$\int_0^\omega P(\tau)\,d\tau x_1 + \int_0^\omega f(\tau, 0, 0)\,d\tau = 0. \quad (3)$$

Пусть $\det \tilde{P}(\omega) \neq 0$. Тогда из уравнения (3) имеем $x_1 = -\tilde{P}^{-1}(\omega) \times \int_0^\omega f(\tau, 0, 0)\,d\tau$, где $\tilde{P}(\omega) = \int_0^\omega P(\tau)\,d\tau$.

Пусть приближения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ построены. Приближение x_{k+1}, y_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, определим как решение задачи

$$dx_{k+1}/dt = P(t)\,x_k + Q(t)\,y_k + f(t, x_{k-1}, y_k), \qquad dy_{k+1}/dt = R(t)\,x_k + S(t)\,y_k + g(t, x_k, y_k); \quad (4)$$

$$\int_0^\omega [P(t)\,x_{k+1}(\tau) + Q(\tau)\,y_{k+1}(\tau) + f(\tau, x_k(\tau), y_{k+1}(\tau))]\,d\tau = 0,$$

$$M_1 y_{k+1}(0) + M_2 y_{k+1}(\omega) = 0. \quad (5)$$

Используя соотношения

$$x_{k+1}(\tau) = x_{k+1}(t) + \int_t^\tau [P(\tau)\,x_k(\tau) + Q(\tau)\,y_k(\tau) + f(\tau, x_{k-1}(\tau), y_k(\tau))]\,d\tau,$$

$$y_{k+1}(0) = y_{k+1}(t) + \int_t^0 [R(\tau)\,x_k(\tau) + S(\tau)\,y_k(\tau) + g(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau))]\,d\tau,$$

$$y_{k+1}(\omega) = y_{k+1}(t) + \int_t^\omega [R(\tau)\,x_k(\tau) + S(\tau)\,y_k(\tau) + g(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau))]\,d\tau,$$

задачу (4), (5) нетрудно свести эквивалентным образом к системе

$$x_{k+1}(t) = \tilde{P}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^\omega P(\tau)\,d\tau \int_\tau^t [P(\sigma)\,x_k(\sigma) + Q(\sigma)\,y_k(\sigma) + f(\sigma, x_{k-1}(\sigma), y_k(\sigma))] \times d\sigma - \int_0^\omega Q(\tau)\,y_{k+1}(\tau)\,d\tau - \int_0^\omega f(\tau, x_k(\tau), y_{k+1}(\tau))\,d\tau \right\},$$

$$y_{k+1}(t) = (M_1 + M_2)^{-1} \left\{ M_1 \int_0^t [R(\tau)\,x_k(\tau) + S(\tau)\,y_k(\tau) + g(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau))] \times d\tau - M_2 \int_t^\omega [R(\tau)\,x_k(\tau) + S(\tau)\,y_k(\tau) + g(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau))]\,d\tau \right\}. \quad (6)$$

Для алгоритма (6) имеют место оценки

$$\| x_{k+2} - x_{k+1} \|_C \leqslant P_1 \| x_{k+1} - x_k \|_C + P_2 \| y_{k+1} - y_k \|_C + P_3 \| x_k - x_{k-1} \|_C,$$

$$\| y_{k+2} - y_{k+1} \| \leqslant q_1 \| x_{k+1} - x_k \|_C + q_2 \| y_{k+1} - y_k \|_C, \tag{7}$$

где

$$P_1 = \gamma_1 a^2 \omega^2/2 + \gamma_1 L_f \omega + \gamma_1 \gamma_2 m \omega^2 (b + L_f)(\alpha + L_g), \quad P_2 = \gamma_1 a \omega^2 (b + L_f)/2 +$$

$$+ \gamma_1 \gamma_2 m \omega^2 (b + L_f)(\beta + L_g), \qquad P_3 = \gamma_1 a L_f \omega^2/2, \qquad q_1 = \gamma_2 m \omega (\alpha + L_g),$$

$$q_2 = \gamma_2 m \omega (\beta + L_g).$$

Здесь через a, b, α, β обозначены соответственно максимальные значения функций $\| P(t) \|$, $\| Q(t) \|$, $\| R(t) \|$, $\| S(t) \|$; приняты также следующие обозначения: $\gamma_1 = \| \tilde{P}^{-1}(\omega) \|$, $\gamma_2 = \| (M_1 + M_2)^{-1} \|$, $\quad m = \max \{ \| M_1 \|, \| M_2 \| \}$, $\| z \|_C \overset{\text{def}}{=} \max \| z(t) \|$, $z \in R^l$, где $\| \cdot \|$ — согласованная норма в R^l.

Оценки (7) запишем в векторно-матричном виде

$$\delta_{k+1} \leqslant Q_1 \delta_k + Q_2 \delta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} P_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta_i = \begin{pmatrix} \| x_{i+1} - x_i \|_C \\ \| y_{i+1} - y_i \|_C \end{pmatrix},$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть спектр положительной матрицы $Q = Q_1 + Q_2$ лежит внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. Можно показать, что последовательности $\{x_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, $\{y_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ равномерно сходятся к единственному решению $x^*(t)$, $y^*(t)$ задачи (1), (2); скорость сходимости характеризуется неравенством

$$R_k \leqslant (E - Q)^{-1} (\delta_k + Q_2 \delta_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где $R_k = \begin{pmatrix} \| x - x_k \|_C \\ \| y - y_k \|_C \end{pmatrix}$.

Таким образом, при выполнении условий: 1) $\det \tilde{P}(\omega) \neq 0$, $\det (M_1 + M_2) \neq 0$; 2) спектр матрицы Q лежит внутри единичного круга — решение задачи (1), (2) существует и единственно; это решение строится с помощью алгоритма (6), скорость сходимости которого характеризуется неравенством (9).

З а м е ч а н и е. В случае, когда одна (или обе) из матриц $\tilde{P}(\omega)$, $M_1 + M_2$ особенная, то при выводе алгоритмов применяем соответствующие приемы из работы [2].

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкан С. Э.* Теория колебаний.— М. : Наука, 1981.— 568 с.
2. *Лаптинский В. Н.* К вопросу о построении периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1983, 19, № 8, с. 1335—1344.

Киев. гос. ун-т Поступила 10.06.84