УДК 519.95

Д. Б. Буй, А. В. Мавлянов

К теории программных алгебр

Предлагаемая работа основывается на композиционном подходе к проблеме формального описания семантики языков программирования [1—3] В силу этого подхода решение упомянутой проблемы сводится к рассмотрению программных алгебр, иерархия которых построена в [3].

Все неопределяемые ниже понятия и обозначения понимаются в смысле [4, 5].

1 Здесь под функциями (предикатами) будем понимать n-арные функции (предикаты), $n = 1, 2, \ldots$ Функции обозначим буквами $f, g, h, \ldots$, а предикаты — $p, q, \ldots$; если же не имеет значения, что имеется в виду— функция или предикат, то будем использовать буквы $\varphi, \psi, \ldots$. Арность φ будем обозначать через $\nu\varphi$. В множестве функций и предикатов введем следующие операции, следуя в основном [3].

Суперпозиция $S^{(m+1)}$, $m = 1, 2, \ldots$, понимается в обычном смысле (п. 2.1 из [4]); при этом допускается суперпозиция функций в предикат.

Ветвление $\Diamond : \langle p, \varphi_1, \varphi_2 \rangle \mapsto \psi$, где $\nu p = \nu\varphi_1 = \nu\varphi_2$, а φ_1, φ_2 одновременно функции или предикаты; причем $\psi(a_1, \ldots, a_r)$ есть $\varphi_1(a_1, \ldots, a_r)$, если $p(a_1, \ldots, a_r) =$ И, $\varphi_2(a_1, \ldots, a_r)$, если $p(a_1, \ldots, a_r) =$ Л и не определено иначе $(r = \nu p = \nu\varphi_1 = \nu\varphi_2 = \nu\psi)$.

Циклирование $* : \langle p, f \rangle \mapsto g$, где $\nu p = \nu f = \nu g$; причем $g(a_1, \ldots, a_m)$ равно первому элементу последовательности (если он существует) $l_0 \rightleftharpoons$

$\leftrightharpoons a_1,\ t_{i+1} \leftrightharpoons f(t_i, a_2, \ldots, a_m),\ i = 0, 1, 2, \ldots$, для которого (обозначим его через t_k) $p(t_k, a_2, \ldots, a_m) = Л$ в предположении, что все значения $p(t_j, a_2, \ldots, a_m)$ для $0 \leqslant j < k$ определены $(m = \nu p = \nu f = \nu g)$.

Определение. *Алгебру, носителем которой является некоторый класс функций и предикатов, а сигнатурой — совокупность* $\{\Diamond, *, S^{(m+1)} \mid m = 1, 2, \ldots\}$, *назовем примитивной программной алгеброй* (*ППА*).

В частности, ППА, носителем которой является множество всех арифметических функций (т. е. функций натуральных аргументов и значений) и предикатов, назовем арифметической ППА. Аналогично определяется целочисленная ППА и рациональная ППА (функции рациональных аргументов и значений).

Выделение ППА мотивируется их полнотой в основных классах вычислимых многоместных функций. В следующей теореме это утверждение конкретизируется для класса арифметических частично рекурсивных функций (чр-функций) и предикатов (чр-предикатов). Всюду далее будем рассматривать только арифметические функции и предикаты. Наконец, положим $\sigma_1 \leftrightharpoons \{0, s, +, \cdot, <, I_m^n \mid n = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant m \leqslant n\}$ (через $<$ обозначен предикат «строго меньше»).

Теорема 1. *Замыкание множества* σ_1 *в арифметической ППА в точности совпадает с классом арифметических чр-функций и чр-предикатов.*

С целью упрощения доказательства будем использовать термальную запись для функций и предикатов [4, п. 2.1], обозначая переменные через $x, y, z, \ldots$ (фиктивные переменные будем опускать). Кроме того, циклирование обозначим через $*_y$, подразумевая при этом циклирование по переменной y, а замыкание множества функций и предикатов Σ в арифметической ППА — через $[\Sigma]$.

Доказательство вытекает из ряда вспомогательных утверждений.

А. $f = Mg \Rightarrow f \in [\{g, 0, s, \neq, I_m^n\}]$.

Действительно, по условию $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$ $(n = \nu f = \nu g)$. Положив $p(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightharpoons g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \neq x_n$ и $f_1(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightharpoons p(x_1, \ldots, x_n, y) *_y s(y)$, нетрудно проверить, что $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n, 0)$.

Б. $f = R(g, h) \Rightarrow f \in [\{g, h, 0, s, c, l, r, <, I_m^n\}]$.

Пусть $\nu f = m + 1$, тогда $f(x_1, \ldots, x_m, 0) = g(x_1, \ldots, x_m)$, $f(x_1, \ldots, x_m, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_m, y, f(x_1, \ldots, x_m, y))$. Положим $f_0(x_1, \ldots, x_m, z) \leftrightharpoons c(h(x_1, \ldots, x_m, r(z), l(z)), s(r(z)))$, $p(y, z) \leftrightharpoons r(z) < y$ и $f_1(x_1, \ldots, x_m, y, z) \leftrightharpoons p(y, z) *_z f_0(x_1, \ldots, x_m, z)$. Нетрудно проверить, что $f_1(x_1, \ldots, x_m, y, c(g(x_1, \ldots, x_m), 0)) = c(f(x_1, \ldots, x_m, y), y)$, т. е. $f(x_1, \ldots, x_m, y) = l(f_1(x_1, \ldots, x_m, y, c(g(x_1, \ldots, x_m), 0)))$.

В. $\neq, c, l, r \in [\sigma_1]$. При построении этих функций воспользуемся тем, что $p \vee q, \neg q \in [\sigma_1 \cup \{p, q\}]$; это нетрудно проверить.

Для построения предиката $\neq$ надо учесть, что $x_1 \neq x_2 = x_1 < x_2 \vee \vee x_2 < x_1$. Переходя же к нумерационным функциям, заметим, что они строятся из функций $0, s, +, \dot{-}, [\sqrt{x}], [x/2], \cdot$ и I_m^n суперпозициями [4, п. 3.3]. Следовательно, достаточно показать, что $\dot{-}, [\sqrt{x}], [x/2] \in [\sigma_1]$.

Для построения усеченной разности положим $g(z, x, y) \leftrightharpoons (y + z < < x) *_z s(z)$. Очевидно, что $x \dot{-} y = g(0, x, y)$.

Построим $[\sqrt{x}]$. По определению целой части $[\sqrt{a}] \leqslant \sqrt{a} < [\sqrt{a}] + + 1$, т. е. $[\sqrt{a}]^2 \leqslant a < ([\sqrt{a}] + 1)^2$, $a = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда $[\sqrt{x}] = f(x, 0)$, где $f(x, z) \leftrightharpoons ((z + 1)^2 \leqslant x) *_z s(z)$. Остается заметить, что $x_1 \leqslant x_2 = \neg(x_2 < < x_1)$. Функция $[x/2]$ строится аналогично.

Г. p-чр-предикат, f-чр-функция $\Rightarrow p * f$-чр-функция.

Положим $\nu p = \nu f = n$ и рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_n, y)$: $h(x_1, \ldots, x_n, 0) = x_1$, $h(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = f(h(x_1, \ldots, x_n, y), x_2, \ldots, x_n)$. Далее, обозначив частичную представляющую функцию предиката p через K_p, положим $h_1(x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \mu_y(K_p(h(x_1, \ldots, x_n, y), x_2, \ldots, x_n) = 1)$. Окончательно, $p * f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n, h_1(x_1, \ldots, x_n))$.

Таким образом, класс чр-функций и чр-предикатов замкнут относительно циклирования; аналогичное утверждение для ветвления вытекает из теоремы о существовании частично рекурсивных расширений функций [4, п. 6.3, теорема 4].

Итак, из А—Г вытекает утверждение теоремы 1 для функций; что же касается предикатов, то надо только учесть равенство $p = S^{(2)}(q, K_p)$, где q — такой унарный предикат, что $q(0) =$ И, $q(1) =$ Л (например, $q(x) = x < 1 = x < S(0(x))$). Теорема 1 доказана.

Переходя к полноте ППА в других классах функций, построим множества σ_2 и σ_3: расширим все элементы из σ_1 на множество целых чисел и добавим функцию $-x$ — получим σ_2; расширим все элементы из σ_2 на множество рациональных чисел и добавим функцию $1/x$ — получим σ_3.

Теорема 2. *Замыкание множества σ_2 (σ_3) в целочисленной ППА (в рациональной ППА) в точности совпадает с классом целочисленных (рациональных) частично рекурсивных функций и предикатов.*

Доказательство требует более глубокого развития теории ППА, поэтому мы его опустим.

В заключение отметим, что, рассматривая специальные ограничения циклирования, можно задать классы общерекурсивных и примитивно рекурсивных функций во введенных выше ППА. Кроме того, можно показать взаимную непроизводность основных операций в рассматривавшихся ППА. Что касается арифметической ППА, то в ней операции примитивной рекурсии и минимизации не являются производными; она имеет континуум максимальных подалгебр; наконец, можно доказать аналог теоремы Клини о нормальной форме.

Эти и другие результаты, а также доказательство теоремы 2 будут изложены в последующих работах.

2. Рассмотрим элементарные программные алгебры (ЭПА). Особенностью таких алгебр, в отличие от ППА, является то, что их носитель есть некоторый класс так называемых именных функций, а не n-арных.

Элементами областей определения и областей значений именных функций являются именные данные — множества определенной структуры. Уточним понятие именных данных.

Пусть V, Σ — произвольные фиксированные множества, понимаемые как множества имен и значений соответственно. Дадим индуктивное определение множества именных данных, следуя в основном [2]. Положим $D_0 = V \cup \Sigma$; предположим, что $D_0, D_1, \ldots, D_m$, $m \geqslant 0$, построены и построим $D_{m+1} \leftrightharpoons D_m \cup \mathfrak{B}_m$, где $\mathfrak{B}_m$ — множество, состоящее из элементов трех типов: 1) любое подмножество D_m; 2) любое бинарное отношение на D_m, в частности любая (унарная) функция; 3) любое конечное функциональное отношение на паре множеств V, D_m.

Множество $D \leftrightharpoons \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} D_i$ назовем множеством именных данных.

В качестве примера именного данного рассмотрим массивы — именные данные вида $\{\langle v, \{\langle v_1, \omega_1\rangle, \ldots, \langle v_n, \omega_n\rangle\}\rangle\}$, где $v, v_1, \ldots, v_n \in V$, $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Sigma$. Нетрудно проверить, что массивы принадлежат множеству D_2.

Определение. *Именной функцией назовем унарную, вообще говоря, частичную операцию на множестве именных данных D.*

Именные функции будем обозначать буквами φ, ψ, ... В качестве примера именных функций рассмотрим ординарные функции, т. е. такие, область определения которых есть подмножество множества $\{\{\langle 1, \omega_1\rangle, \ldots, \langle n, \omega_n\rangle\} \mid \omega_1, \ldots, \omega_n \in \Sigma\}$, а область значений есть подмножество множества Σ. Здесь предполагается, что множество натуральных чисел включается в множество имен V и, кроме того, параметр $n = 1, 2, \ldots$ фиксирован для каждой такой функции; n назовем рангом ординарной функции. Именные данные вида $\{\langle 1, \omega_1\rangle, \ldots, \langle n, \omega_n\rangle\}$ далее будем обозначать $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, а значение ординарной функции φ (ранга n) на именном данном $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — $\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Рассмотрим следующие операции (композиции) в множестве именных функций (всюду далее будем рассматривать только такие функции, если не оговорено противное).

Под умножением понимается бинарная операция $\circ$, которая любой паре функций $\langle \varphi, \psi \rangle$ ставит в соответствие новую функцию, значение которой на произвольном именном данном d полагается равным $\psi(\varphi(d))$.

Под выбором понимается $(n+1)$-арная параметрическая операция $C^{v_1, \dots, v_n}$ $(n = 2, 3, \dots;\ v_1, \dots, v_n \in V$ и попарно различны), которая любому кортежу функций $\langle \varphi, \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ ставит в соответствие новую функцию, значение которой на произвольном именном данном d полагается равным $\psi_k(d)$, если $\varphi(d) = v_k$. Если же значение $\varphi(d)$ или $\psi_k(d)$ не определено или значение $\varphi(d)$ определено, но не принадлежит множеству $\{v_1, \dots, v_n\}$, то значение новой функции полагается неопределенным.

Под суперпозицией по значению понимается $(n+1)$-арная параметрическая операция $Z^{v_1, \dots, v_n}$ $(n = 1, 2, \dots;\ v_1, \dots, v_n \in V$ и попарно различны), которая любому кортежу функций $\langle \varphi, \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ ставит в соответствие новую функцию, значение которой на произвольном именном данном d задается выражением $\varphi(d \bigtriangledown \{\langle v_1, \psi_1(d) \rangle, \dots, \langle v_n, \psi_n(d) \rangle\})$; здесь через $\bigtriangledown$ обозначена бинарная операция на множестве именных данных, которая по двум именным данным d_1 и d_2 строит третье именное данное, получаемое присоединением к d_2 тех элементов из d_1, имена которых отличны от имен, фигурирующих в d_2 (т. е. $d_1 \bigtriangledown d_2 = d_2 \cup \{\langle v, \omega \rangle \mid \langle v, \omega \rangle \in d_1 \,\&\, v \notin pr_1 d_2\}$.

Под редукцией будем понимать унарную операцию, которая каждой ординарной функции φ ранга 2 ставит в соответствие новую функцию $\varphi/$, значение которой на произвольном массиве $d = \{\langle v, \{\langle v_1, \omega_1 \rangle, \dots, \langle v_n, \omega_n \rangle\}\rangle\}$ полагается равным $\varphi(\omega_1, \dots, \varphi(\omega_{m-2}, \varphi(\omega_{m-1}, \omega_m)) \dots)$.

Введем на множестве имен V произвольную инъективную бинарную операцию $\cdot$ (таким образом, $\langle V, \cdot \rangle$ есть группоид).

Под внешним произведением будем понимать унарную операцию, которая любой ординарной функции φ ранга 2 ставит в соответствие новую функцию, значение которой на произвольном именном данном вида (d_1, d_2), где $d_1 = \{\langle v, \{\langle v_1, \omega_1 \rangle, \dots, \langle v_n, \omega_n \rangle\}\rangle\}$, $v, v_i \in V$, $\omega_k \in \Sigma$, и $d_2 = \{\langle u, \{\langle u_1, t_1 \rangle, \dots, \langle u_m, t_m \rangle\}\rangle\}$, $u, u_j \in V$, $t_r \in \Sigma$, полагается равным следующему именному данному: $\{\langle v_i \cdot u_j, \varphi(\omega_i, t_j) \rangle \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$.

Определение. *Алгебру, носителем которой является некоторый класс именных функций, а основными операциями — умножение, выбор, суперпозиция по значению, редукция и внешнее произведение, назовем элементарной программной алгеброй (ЭПА).*

Теорема 3. *Ни одна из основных операций ЭПА не является производной от остальных.*

Доказательство проводится стандартным образом — путем выделения характеристических свойств композиций.

Выделение ЭПА мотивируется их удобствами для задания семантики алгебраических (функциональных) языков программирования (например, ЛИСП, АПЛ). При этом структуры данных уточняются как именные данные, семантика программ — как именные функции, а средства построения сложных программ из более простых — как композиции. В связи с этим представляет интерес выделение различных подалгебр ЭПА, поиск систем образующих (базисов) этих подалгебр, рассмотрение различных обеднений ЭПА.

1. *Редько В. Н.* Композиции программ и композиционное программирование.— Программирование, 1978, № 5, с. 3—24.
2. *Редько В. Н.* Семантические структуры программ.— Программирование, 1981, № 1, с. 3—19.
3. *Редько В. Н.* Универсальные программные логики и их применение. — В кн.: Труды Всесоюзного симпозиума по теоретическому и системному программированию. Кишинев, 1983, с. 310—326.
4. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции.— М. : Наука, 1965.— 391 с.
5. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М. : Наука, 1970.— 392 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила 01.06.84