УДК 517:519.4

С. И. Безуглый

Некоторые условия аппроксимируемости групп автоморфизмов пространства с мерой

1. Счетная группа G автоморфизмов пространства Лебега (X, μ) называется аппроксимируемой, если существует автоморфизм T пространства (X, μ), траектории которого совпадают с траекториями группы G. В настоящей заметке приводятся некоторые достаточные условия аппроксимируемости групп автоморфизмов.

С группой G можно связать новую группу автоморфизмов пространства $(X \times \mathbb{R}, \mu \times \lambda)$ (λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$), которую назовем двойственной группой и обозначим через $\tilde{G}$. Ее элементы действуют по формуле:

$$\tilde{g}(x, u) = \left(gx, u + \log \frac{dg^{-1}\mu}{d\mu}(x)\right), \quad g \in G.$$

В ряде случаев о группе автоморфизмов G типа III (т. е. не имеющей инвариантной меры, эквивалентной μ) можно судить по характеру траекторий двойственной группы $\tilde{G}$ [1—3]. В частности, если G — аппроксимируемая группа, то, как показано в [1], $\tilde{G}$ также аппроксимируема. В [1] сформулирован такой вопрос: следует ли из аппроксимируемости $\tilde{G}$ аппроксимируемость G? В настоящей работе дается утвердительный ответ для групп типов III_0, III_s, $0 < s < 1$, и для одного класса групп типа III_1. (Определение типа группы автоморфизмов можно найти в [3].) Для этого найден общий вид произвольной группы типа III_0, совпадающий для аппроксимируемых групп с конструкцией Кригера [3].

2. Пусть G — счетная эргодическая группа автоморфизмов типа III_0, действующая на пространстве Лебега (X, μ). Для меры $\nu \sim \mu$ положим

$$\Lambda(G, \nu)(x) = \left\{\log \frac{dg\nu}{d\nu}(x) : g \in G\right\}.$$

Мера ν называется лакунарной для группы G, если существует число $\eta > 0$ такое, что $\psi_\nu(x) = \inf(\Lambda(G, \nu)(x) \cap (0, \infty)) > \eta$ для почти всех (п. в.) $x \in X$.

Придерживаясь схемы доказательства Кригера [3], удается установить, что справедлива такая теорема.

Теорема 1. *Для любой счетной эргодической группы автоморфизмов типа* III_0 *существует лакунарная мера.*

Положим для группы G и лакунарной меры ν

$$S(\nu) = \left\{g \in [G] : \log \frac{dg\nu}{d\nu}(x) = 0 \quad \text{п. в. } x \in X\right\}.$$

Легко видеть, что $S(\nu)$ не пустое множество и представляет собой консервативную группу типа II.

Пусть $[G]$ обозначает множество автоморфизмов (X, μ), траектории которых лежат в траекториях группы G. Через $N[G]$ обозначим множество тех автоморфизмов R пространства (X, μ), которые G-траекторию точки x переводят в G-траекторию точки Rx.

Лемма. *Для эргодической группы автоморфизмов G пространства (X, μ) типа III_0 можно указать лакунарную меру ν и автоморфизм $V \in [G]$ такие что:*

1) *любое $S(\nu)$-инвариантное множество имеет бесконечную меру;*

2) $\log \frac{dV^{-1}\nu}{d\nu}(x) = \psi_\nu(x)$.

Теорема 2. *В условиях леммы $V \in N[S(\nu)]$ и $Gx = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V^n \{S(\nu)x\}$.*

Замечание. Из теоремы 2 видно, что для неаппроксимируемой группы G группа S также неаппроксимируема. А если окажется, что для некоторого ν группа $S(\nu)$ аппроксимируема, то в силу теоремы 2.7 из [4] G также будет аппроксимируема.

3. Теорема 3. *Пусть G — эргодическая группа автоморфизмов типа III_0 или III_s, $0 < s < 1$. Если двойственная группа $\tilde{G}$ аппроксимируема в $(X \times \mathbb{R}, \mu \times \lambda)$, то и группа G — аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть G типа III_0 и μ — лакунарная мера для G. Применяя лемму и теорему 2, находим $S(\mu) \subset [G]$, V такие, что $V \in N[S(\mu)]$, $S(\mu)\mu = \mu$ и группа G порождена V и $S(\mu)$. Из аппроксимируемости $\tilde{G}$ следует аппроксимируемость $\tilde{S}(\mu) \subset [\tilde{G}]$. Но так как $\tilde{S}(\mu) = S$, то и действие S аппроксимируемо. Из замечания следует, что G аппроксимируема. Случай III_s рассматривается аналогично.

Теорема 4. *Пусть G — эргодическая группа автоморфизмов типа III_1 пространства (X, μ) и множество $\Lambda = \{\Lambda(G, \nu)(x) : x \in X\}$ счетно. Тогда аппроксимируемость $\tilde{G}$ влечет аппроксимируемость G.*

Поскольку для группы типа III_1 лакунарной меры не существует, доказательство этой теоремы требует иных методов и опирается на результаты [4].

Пусть T — неэргодический автоморфизм $(X \times \mathbb{R}, \mu \times \lambda)$ такой, что поток $\{T_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ $(T_s(x, u) = (x, u + s))$ лежит в $N[T]$. Если ξ — разбиение на траектории T, то его можно спроектировать на X, где также возникнет разбиение ξ_0. Применяя результаты [5], получим, что на (X, μ) действует группа автоморфизмов G, разбиение на траектории которой совпадает с ξ_0. Для любого $g \in G$ и $x \in X$ существует $n(x, g) \in X$ такое, что $T^{n(x,g)}(x, 0) \in \{gx\} \times \mathbb{R}$.

Положим $T^{n(x,g)}(x, 0) = (gx, p(x, g))$. Измеримость функций $n(x, g)$ и $p(x, g)$ очевидна. Кроме того, $p(x, g)$ есть коцикл.

Теорема 5. *Если существует функция $f(x)$ такая, что $p(x, g) = f(gx) + \log \frac{dg^{-1}\mu}{d\mu}(x) - f(x)$, т. е. коциклы $p(x, g)$ и $\log \frac{dg^{-1}\mu}{d\mu}(x)$ когомологичны, то в $[T]$ найдется автоморфизм α такой, что αT коммутирует с потоком $\{T_s\}$.*

Доказательство можно вывести из теоремы 3.

4. Пусть G — локально компактная группа и хаусдорфово пространство. Предположим, что G действует на стандартном борелевском пространстве (X, B) борелевскими автоморфизмами. Борелевское множество $E \subset X$ называется лакунарным сечением, если $GE = X$ и каждая траектория Gx пересекается с E не более, чем в счетном числе точек.

Группа автоморфизмов G называется аппроксимируемой, если возникающие на лакунарном сечении E (которое всегда существует — см. [6]) счетная группа автоморфизмов аппроксимируема в обычном смысле.

Теорема 6. *Пусть G — произвольная локально компактная группа. Существует пространство с мерой (Y, ν), на котором группа G действует аппроксимируемо.*

Доказательство. Пусть T — автоморфизм пространства (X, μ) и функция $\varphi : X \to G$ такая, что $\varphi(x) = g_0$ для п. в. $x \in X$. Рассмотрим пространство $(X \times G, \mu \times \sigma)$, где σ — мера Хаара на G и автоморфизм $\tilde{T}$ этого пространства. $\tilde{T}(x, g) = (Tx, g\varphi(x)) = (Tx, gg_0)$.

Разбиение ξ на траектории автоморфизма T измеримо. Пусть B — борелевское подмножество G, пересекающее каждый левый класс смежности группы $G_0 = \{g_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ровно в одной точке. Тогда положим $Y = X \times B$, и так как Y можно отождествить с $(X \times G)|_\xi$, то мера ν на Y будет индуцироваться мерой μ_ξ на $(X \times G)|_\xi$.

На $X \times G$ определим действие группы G: $(x, g)\,h = (x, h^{-1}g)$, $h \in G$. Тогда $\tilde{T}$ коммутирует с таким действием группы G, и поэтому на (Y, ν) возникает действие G, которое обозначим через $\overline{G}$. Докажем, что группа автоморфизмов $\overline{G}$ аппроксимируема.

Пусть $p: X \times G \to X \times B$, где $p(x, g)$ — точка пересечения траектории $\{\tilde{T}^i(x, g)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ с множеством B. Считаем, что $p(X \times \{e\}) = X \times \{e\}$ (e—единица G). Элемент $\overline{g} \in \overline{G}$ действует по формуле $p(x, h)\,\overline{g} = p(x, g^{-1}h)$. Легко проверить, что $X \times \{e\}$ есть лакунарное сечение для $\overline{G}$ и на $X \times \{e\}$ группа $\overline{G}$ действует как группа $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

1. *Голодец В. Я.* О структуре алгебр фон Неймана, двойственных к алгебрам, построенным по динамическим системам.— Функцион. анализ и его прил., 1975, 9, вып. 3, с. 87—88.
2. *Hamachi T., Oka Yu., Osikawa M.* Flows associated with ergodic non-singular transformation groups. — Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1975, 11, p. 31—50.
3. *Krieger W.* On ergodic flows and the isomorphism of factors.— Math. Ann., 1976, 223, N 1, p. 19—70.
4. *Connes A., Krieger W.* Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups and approximate finiteness.— J. Funct. Analysis, 1976, 24, N 3, p. 336—352.
5. *Feldman J., Moore C. C.* Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 234, N 2, p. 289—324.
6. *Feldman J., Hahn P., Moore C. C.* Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups.— Adv. Math., 1978. 28, N 3, p. 186—230.

Физ.-техн. ин-т низких температур, Харьков
Поступила 02.04.80