УДК 519.21

Т. А. Скороход

Интегральное представление мультипликативных мартингальных полугрупп

Пусть $X\ (s,\ t),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$,— случайная функция со значениями в $E + \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство операторов Гильберта — Шмидта над вещественным сепарабельным гильбертовым пространством H, E — единичный оператор. Такая функция называется мультипликативной стохастической полугруппой, если выполнены следующие условия:

1) $X(s,\ u)\, X(u,\ t) = X(s,\ t),\quad X(s,\ s) = E \pmod{\mathbf{P}},\ 0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant T$;

2) $X(t_{k-1},\ t_k),\quad k = \overline{1, n}$, независимы в совокупности, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$;

3) $\mathbf{M}\sigma^2(X(s,\ t) - E) = \mathfrak{F}(s,\ t),\quad \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T} \mathfrak{F}(s,\ t) < \infty$, где $\sigma^2(X) = spX^*X$; $X \in \mathfrak{H}$;

4) $X(s,\ t)$ предполагается непрерывной справа или слева в каждой точке в норме $d(\cdot)$, где $d(X) = (\mathbf{M}\sigma^2(X))^{1/2}$, X — случайный элемент в $\mathfrak{H}$.

Это норма $|\cdot|_4$ в вещественном гильбертовом пространстве $\sigma_2\ (H,\ \Omega)$ (см. [1, с. 49]).

Назовем стохастическую полугруппу $X\ (s,\ t)$ мартингальной, если $\mathbf{M}X\ (s,\ t) = E$. Заметим, что для мартингальной полугруппы $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T} \mathfrak{F}(s,\ t) = \mathfrak{F}(0,\ T)$.

Это следует, например, из неравенства (см. [2])

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\sigma^2(X_k) \leqslant \mathbf{M}\sigma^2\left(\prod_{k=1}^{n}(E + X_k) - E\right), \tag{1}$$

где X_k случайные независимые элементы в $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}X_k = 0$.

Теорема 1. *Пусть $X\ (s,\ t)$ — мартингальная стохастическая полугруппа. Тогда существует такой процесс с независимыми приращениями Y принимающий значения в $\mathfrak{H}$*

$$Y(s,\ t) = Y(t) - Y(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (X(t_{k-1},\ t_k) - E), \tag{2}$$

где $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, предел в норме $d(\cdot)$ при $\max(t_k - t_{k-1}) \to 0$ и

$$X(s,\ t) = E + \int_s^t X(s,\ u-)\, Y(du). \tag{3}$$

Доказательство. Будем говорить, что $X(s,\ t)$ имеет в точке t фиксированный скачок больше (меньше) c, если $d(X(t-0,\ t+0) - E) > (<)\, c$. Разобьем множество всех фиксированных скачков $X(s,\ t)$ на подмножества таким способом: $A_1 = \{t_i^1\}_{i=1}^{m_1}$ — множество скачков больше 1, $A_2 = \{t_i^2\}_{i=1}^{m_2}$ — множество скачков больше 1/2, меньше или равных 1, ..., $A_n = \{t_i^n\}_{i=1}^{m_n}$ — множество скачков больше $1/n$, меньше или равных $1/(n-1)$. Очевидно для каждого n число скачков конечно и множества A_n не пересекаются. Определим стохастические полугруппы

$$X_n^-(s,\ t) = \prod_{\{t_i^n \in (s,\ t]\}} X(t_i^n - 0,\ t_i^n);\qquad X_n^+(s,\ t) = \prod_{\{t_i^n \in [s,\ t)\}} X(t_i^n,\ t_i^n + 0);$$

$$X_n(s,\ t) = X_n^-(s,\ t) \boxtimes X_n^+(s,\ t) = \lim_{\alpha \to 0} \Pi X_n^-(t_{k-1},\ t_k)\, X_n^+(t_{k-1},\ t_k) =$$

$$= \Pi X(t_i^n - 0,\ t)\, X(t_i^n,\ t_i^n + 0),\quad s = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t,$$

$$\alpha = \max(t_k - t_{k-1}) \to 0,$$

где $X(t_i^n - 0,\ t_i^n) = E$, если $t_i^n \overline{\in} (s, t]$; $X(t_i^n,\ t_i^n + 0) = E$, если $t_i^n \in \overline{[}s,\ t)$, а также аддитивные полугруппы

$$Y_n^-(s, t) = \sum_{\{t_i^n \in (s,t]\}} (X(t_i^n - 0,\ t_i^n) - E);\quad Y_n^+(s, t) = \sum_{\{t_i^n \in [s,t)\}} (X(t_i^n,\ t_i^n + 0) - E);$$

$$Y_n(s, t) = Y_n^-(s, t) + Y_n^+(s, t).$$

Операция $\boxtimes$ называется смешанным произведением (см. [2, 3]) и определяется так:

$$X_1(s, t) \boxtimes X_2(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{n} X_1(t_{k-1}, t_k)\, X_2(t_{k-1}, t_k),\quad s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t;$$

предел в норме $d(\cdot)$ при $\max\,(t_k - t_{k-1}) \to 0$, $n \to \infty$. Для доказательства (3) выделим все фиксированные скачки у $X(s, t)$. Останется непрерывная (в норме $d(\cdot)$) полугруппа $X_0(s, t)$, а для нее имеет место интегральное представление (см. [2]). Рассмотрим стохастическую полугруппу $Z_1(s, t) = X_0(s, t) \boxtimes X_1(s, t)$. Проверим, что $Z_1(s, t) = E + \int_s^t Z_1(s,\ u-)(Y_0(du) + Y_1(du))$, где Y_0 — аддитивный процесс, соответствующий $X_0(s, t)$. До первого скачка в точке t_1^1 $Z_1(s, t)$ и $X_0(s, t)$ совпадают и $Y_1 = 0$, $Z_1(s, t_1^1 - 0) = E + \int Z_1(s, u)\, Y_0(du)$. Умножим это уравнение на $Z_1(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0) = X(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0)$:

$$Z_1(s,\ t_1^1 + 0) = X(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0) + \int_s^{t_1 - 0} Z_1(s, u)\, Y_0(du)\, X(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0) =$$

$$= X(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0) + (Z_1(s,\ t_1^1 - 0) - E)(X(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0) - E + E) =$$

$$= Z_1(s,\ t_1^1 - 0)(X(t_1^1 - 0,\ t_1^1 + 0) - E) + Z_1(s,\ t_1^1 - 0) = E + \int_s^{t_1 - 0} Z_1(s, u) \times$$

$$\times Y_0(du) + \int_s^{t_1 + 0} Z_1(s, u-)\, Y_1(du) = E + \int_s^{t_1 + 0} Z_1(s, u-)(Y_0(du) + Y_1(du)).$$

Аналогично получим:

$$Z_1(t_i^1 + 0,\ t_{i+1}^1 + 0) = E + \int_{t_i^1 + 0}^{t_{i+1}^1 + 0} Z_1(t_i^1 + 0,\ u-)(Y_0(du) + Y_1(du)),$$

$$i = \overline{1, m_1 - 1},\quad Z_1(t_{m_1}^1 + 0,\ t) = E + \int_{t_{m_1}^1 + 0}^{t} Z_1(t_{m_1}^1 + 0,\ u-)(Y_0(du) + Y_1(du)).$$

Используя полугрупповое свойство, получим, что $Z_1(s, t) = E + \int_s^t Z_1(s, u-) \times (Y_0(du) + Y_1(du))$. Дальше рассмотрим стохастическую полугруппу $Z_2(s, t) = Z_1(s, t) \boxtimes X_2(s, t)$. Повторяя процедуру, описанную выше, получаем $Z_2(s, t) = E + \int_s^t Z_2(s, u-)(Y_0(du) + Y_1(du) + Y_2(du))$ и т. д., $Z_k(s, t) = E + \int_s^t Z_k(s, u-)(Y_0(du) + Y_1(du) + \ldots + Y_k(du))$, где

$$Z_k(s, t) = X_0(s, t) \boxtimes X_1(s, t) \boxtimes \ldots \boxtimes X_k(s, t). \tag{4}$$

Легко видеть, что в правой части (4) можно произвольным образом расставлять скобки.

Обозначим $W_k(u)=\sum_{i=0}^{k} Y_i(u)$, тогда $Z_k(s,t)=E+\int_s^t Z(s,u-)\,W_k(du)$. Покажем, что W_k сходится при $k\to\infty$. Пусть $m>k$, $\mathbf{M}\sigma^2(W_m(s,t)-W_k(s,t))=\sum_{i=k+1}^{m}\mathbf{M}\sigma^2(Y_i(s,t))\underset{m,k\to\infty}{\to}0$, так как $\sum_i \mathbf{M}\sigma^2(Y_i(s,t))=\sum_{i,j}\mathbf{M}\times\sigma^2(X(t_i^j-0,\ t_i^j+0)-E)\leqslant\mathbf{M}\sigma^2(X(0,\ T)-E)<\infty$. Это следует из (2). Теперь покажем, что $Z_k(s,t)$ сходится при $k\to\infty$:

$$d(Z_k(s,t)-Z_m(s,t))=d\left(\int_s^t Z_k(s,u-)W_k(du)-\int_s^t Z_m(s,u-)\,W_m(du)\right)=$$

$$=d\left(\int_s^t Z_k(s,u-)\,W_k(du)-\int_s^t Z_k(s,u-)\,W_m(du)+\int_s^t Z_k(s,u-)\,W_m(du)+\right.$$

$$\left.+\int_s^t Z_m(s,u-)\,W_m(du)\right)\leqslant d\left(\int_s^t Z_k(s,u-)\,(W_k(du)-W_m(du)\right)+$$

$$+d\left(\int_s^t (Z_k(s,u-)-Z_m(s,u))\,W_m(du)\right)\leqslant\sup_{s\leqslant u\leqslant}(\mathbf{M}(\|Z_k(s,u)\|^2)^{1/2}\times$$

$$\times d(W_k(s,t)-W_m(s,t))+\left(\int_s^t \mathbf{M}\sigma^2(Z_k(s,u-)-Z_m(s,u-))\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{M}\sigma^2(W_m(du))\right)^{1/2}.$$

Так как $(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$, то

$$\mathbf{M}\sigma^2(Z_k-Z_m)\leqslant 2\sup\mathbf{M}\|Z_k(s,u)\|^2\,\mathbf{M}\sigma^2(W_k(s,t)-W_m(s,t))+$$

$$+2\int_s^t \mathbf{M}\sigma^2(Z_k(s,u-)-Z_m(s,u))\,\mathbf{M}\sigma^2(W_m(du)). \tag{5}$$

Введем обозначения: $\mathbf{M}\sigma^2(Z_k(s,u-)-Z_m(s,u-))=\varphi_s(u)$, $\mathbf{M}\sigma^2(W_m(du))=df(u)$, $2\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\|Z_k(s,u)\|^2\,\mathbf{M}\sigma^2(W_k(s,t)-W_m(s,t)=\alpha_s(t)$. В этих обозначениях (5) перепишется так: $\varphi_s(t)\leqslant\alpha_s(t)+2\int_s^t\varphi_s(u)\,df(u)$. Продолжая неравенство, получим

$$\varphi_s(t)\leqslant\alpha_s(t)+2\int_s^t\left(\alpha_s(u)+2\int_s^t\varphi_s(v)\,df(v)\right)df(u)=\alpha_s(t)+2\int_s^t\alpha_s(u)\,df(u)+$$

$$+4\int_s^t\int_s^u\varphi_s(v)\,df(v)\,df(u)=\alpha_s(t)+2\int_s^t\alpha_s(u)\,df(u)+4\int_s^t\int_v^t df(u)\,\varphi_s(v)\,df(v)=$$

$$=\alpha_s(t)+2\int_s^t\alpha_s(u)\,df(u)+4\int_s^t(f(t)-f(v))\,\varphi_s(v)\,df(v)\leqslant\alpha_s(t)+$$

$$+2\int_s^t\alpha_s(u)\,df(u)+4\int_s^t(f(t)-f(v))\,\alpha_s(v)\,df(v)+2^3\int_s^t\int_s^v(f(t)-f(v))\times$$

$$\times\varphi_s(u)\,df(u)\,df(v)=\alpha_s(t)+2\int_s^t\alpha_s(u)\,df(u)+4\int_s^t(f(t)-f(u))\,\alpha_s(u)\,df(u)+$$

$$+8\int_s^t((f(t)-f(u))^2/2)\alpha_s(u)\,df(u)\leqslant\alpha_s(t)+2\int_s^t\sum_{k=0}^{\infty}(2^k(f(t)-f(u))^k/k!)\,\alpha_s(u)\,df(u)=$$

$$=\alpha_s(t)+2\int_s^t\exp\{2(f(t)-f(u))\}\,\alpha_s(u)\,df(u).$$

В первоначальных обозначениях, имеем

$$\mathbf{M}\sigma^2 (Z_k(s, t) - Z_m(s, t)) \leqslant C\left(\mathbf{M}\sigma^2\left(\sum_{i=k+1}^{m} Y_i(s, t)\right) + \right.$$

$$+ 2\int_s^t \exp\left\{2\mathbf{M}\sigma^2\left(\sum_{i=k+1}^{m} Y_i(v, t)\right)\right\}\mathbf{M}\sigma^2\left(\sum_{i=k+1}^{m} Y_i(s, v)\right) \times$$

$$\times \mathbf{M}\sigma^2\left(\sum_{i=k+1}^{m} Y_i(du)\right) \to 0, \qquad k, m \to \infty.$$

Здесь не учитывается возможность $X(t-0, t) \neq E$. В этом случае $\mathbf{M} \times \sigma^2 (Z_k(s, t) - Z_m(s, t)) \leqslant K\varphi_s(t) \to 0$, $k, m \to \infty$, где K — некоторая константа.

Таким образом, существует предел $\lim Z_k(s, t) = \prod_{k=0}^{\infty} \boxtimes X_k(s, t)$. Покажем, что этот предел — исходная полугруппа $X(s, t)$. Рассмотрим бесконечное смешанное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \boxtimes X_k(s, t)$ и бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} X_k(s, t)$. Как следует из [2], второе произведение сходится, если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} d^2(Y_k(s, t))$, причем сходимость произведения абсолютная. Значит, сходится смешанное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \boxtimes X_k(s, t) = \hat{X}(s, t)$ и $\hat{X}(s, t)$ — стохастическая полугруппа, представляющая собой произведение всех фиксированных скачков $X(s, t)$. Следовательно $\lim Z_k(s, t) = X_0 \boxtimes \hat{X} = X(s, t)$ и $X(s, t) = E + \int_s^t X(s, u-) Y(du)$, где $Y(du) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(du)$. Последнее соотношение следует из того, что

$$d\left(\int_s^t Z_k(s, u-) W_k(du) - \int_s^t X(s, u-) Y(du)\right) \leqslant$$

$$\leqslant d\left(\int_s^t (Z_k(s, u-) - X(s, u-)) W_k(du)\right) + d\left(\int_s^t X(s, u-) \times \right.$$

$$\left. \times (W_k(du) - Y(du)\right) \leqslant \left(\int_s^t d^2(Z_k(s, u-) - X(s, u-))\, d^2(W_k(du))\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_s^t d^2(X(s, u-)\, d^2(W_k(du) - Y(du))\right)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Формула (2) доказывается в следствии 2. ■

Пусть $\mathfrak{F}(s, t)$ — двупараметрическое семейство σ-алгебр, обладающее следующими свойствами: 1) $\mathfrak{F}(0, s)$ и $\mathfrak{F}(s, t)$ независимы; 2) $\mathfrak{F}(s, u) \cup \mathfrak{F}(u, t) = \mathfrak{F}(s, t)$, $s < u < t$.

Пусть мультипликативные стохастические полугруппы $X_k(s, t)$ измеримы относительно потока $\mathfrak{F}(s, t)$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $X_k(s, t)$ — последовательность мультипликативных стохастических полугрупп, $Y_k(s, t)$ — соответствующие им аддитивные полугруппы. Тогда если существует предел в норме $d(\cdot)$ $\lim Y_k(s, t)$, то существует предел $\lim X_k(u, v)$, $s \leqslant u \leqslant v \leqslant t$.*

Доказательство. Предположим, что существует предел $\lim Y_k(s, t)$ Для $X_k(s, t)$ справедливо интегральное представление $X_k(s, t) = E + \int_s^t X_k(s, u-) Y_k(du)$. Для разности $X_k(s, t) - X_m(s, t)$ справедливо соотношение

$$X_k(s, t) - X_m(s, t) = \int_s^t X_k(s, u-)(Y_k(du) - Y_m(du)) + \\ + \int_s^t (X_k(s, u-) - X_m(s, u-)) Y_m(du).$$

Оценивая норму разности $X_k(s, t) - X_m(s, t)$ так же, как в теореме 1, получим

$$d^2(X_k(s, t) - X_m(s, t)) \leqslant c d^2(Y_k(s, t) - Y_m(s, t)) + \\ + 2\int_s^t \exp\{2M\sigma^2(Y_k(u, t) - Y_m(u, t))\} d^2(Y_k(s, u) - Y_m(s, u)) \times \\ \times d^2(Y_k(du) - Y_m(du)) \to 0, \quad k, m \to \infty,$$

где c — константа. Следовательно, существует $\lim X(s, t)$. Аналогично доказывается, что существует $\lim X(u, v)$, $s \leqslant u \leqslant v \leqslant t$. ■

Следствие 1. *Если $X_n(s, t)$, $n \geqslant 1$, согласованы с $\mathfrak{F}(s, t)$ и $\lim Y_n(s, t)$ существует в норме $d(\cdot)$, то $\lim Y_n(s, t) = Y(s, t)$, $\lim X_n(s, t) = X(s, t)$ — стохастическая полугруппа и для нее справедливо соотношение $X(s, t) = E + \int_s^t X(s, u-) Y(du)$.*

Следствие 2. *Для стохастической полугруппы $X(s, t)$, $0 \leqslant s \leqslant \leqslant t \leqslant T$, справедливо соотношение*

$$Y(s, t) = \lim \sum_{k=1}^n X(t_{k-1}, t_k) - E), \qquad s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t, \tag{6}$$
$$\max(t_k - t_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В стохастически непрерывном случае формула (6) доказана в [2]. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $\{\tau_i, i = \overline{1, m}\}$ моменты фиксированных скачков, для которых $d(X(\tau_k - 0, \tau_k + 0) - E) > \varepsilon$. Пусть стохастическая полугруппа $X_\varepsilon(s, t)$ получается из $X(s, t)$ выбрасыванием скачков больше ε, а $Y_\varepsilon(s, t)$ — соответствующая аддитивная полугруппа. Пусть Σ_1 обозначает суммирование по тем k, для которых интервал $[t_{k-1}, t_k]$ содержит τ_i. Считаем разбиение настолько мелким, что каждый интервал содержит не более одной точки τ_i. При совпадении τ_i с точкой разбиения будем относить его к правому интервалу, если в точке τ_i полугруппа $X(s, t)$ непрерывна слева, и к левому, если она непрерывна справа. Используя интегральное представление, получим

$$d\left(Y(s, t) - \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, t_k) - E)\right) = d\left(\sum_{k=1}^n Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E\right) \leqslant \\ \leqslant \Sigma_1 d(Y_\varepsilon(t_{k-1}, t_k) - X_\varepsilon(t_{k-1}, t_k) + E) + \Sigma_1 d(Y(t_{k-1}, t_k) - \\ - X(t_{k-1}, t_k) + E) + d(\Sigma(Y_\varepsilon(t_{k-1}, t_k) - X_\varepsilon(t_{k-1}, t_k) + E)).$$

Заметим, что первые два слагаемых — конечные суммы, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$. Оценим третье слагаемое:

$$M\sigma^2\left(\sum_{k=1}^n (Y_\varepsilon(t_{k-1}, t_k) - X_\varepsilon(t_{k-1}, t_k) + E)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M\sigma^2 \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (X_\varepsilon (t_{k-1}, u-) - E) Y_\varepsilon (du) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} M\sigma^2 (X_\varepsilon (t_{k-1}, u-) - E)\, M\sigma^2 (Y_\varepsilon (du)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M\sigma^2 (X_\varepsilon (t_{k-1}, t_k-) - E)\, M\sigma^2 (Y_\varepsilon (t_{k-1}, t_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} M\sigma^2 (X_\varepsilon (t_{k-1}, t_k-) - E)\, M\sigma^2 (Y (s, t)).$$

Отсюда получим

$$\lim d \left(Y(s, t) - \sum_{k=1}^{n} (X (t_{k-1}, t_k) - E) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} d (X_\varepsilon (t_{k-1}, t_k-) - E)\, d (Y (s, t)) \leqslant \varepsilon d (Y (s, t)).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим (6).

Следствие 3. *Каждая мартингальная мультипликативная полугруппа $X(s, t)$ представима в виде $X(s, t) = X_0(s, t) \boxtimes \hat{X}(s, t)$, где $X_0(s, t)$— непрерывная в норме $d(\cdot)$ полугруппа, а $\hat{X}(s, t)$ — скачкообразная полугруппа со счетным числом фиксированных скачков. При этом соответствующая аддитивная полугруппа имеет аналогичное представление $Y(s, t) = Y_0(s, t) + \hat{Y}(s, t)$, где $Y_0(s, t)$ — непрерывная, а $Y(s, t)$ — скачкообразная полугруппы.*

Следствие 4. *Бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (E + X_k)$ $(MX_k = 0$, X_k — независимы) сходится абсолютно в норме $d(\cdot)$ и с вероятностью* 1, *если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d^2(X_k)$.*

1. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 216 с.
2. *Скороход Т. А.* О сходимости бесконечных произведений независимых случайных линейных операторов в гильбертовом пространстве.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, **24**, № 4, с. 808—813.
3. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 4, с. 437—443.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 31.12.82, после доработки — 14.05.84