УДК 517.5

Е. С. Синайский

О приближении резольвенты интегрального уравнения типа Вольтерра с рациональным ядром

1. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с многочленными коэффициентами, решениями которых служат основные элементарные и многие специальные функции, приводятся к интегральному уравнению типа Вольтерра [1]:

$$y(x) = \varphi(x)/\alpha(x) + \int_{x_0}^{x} Q(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены степеней $\leqslant l+1$ и $\leqslant m$ соответственно, $Q(x, \xi) = P(x, \xi)/\alpha(x)$,

$$P(x, \xi) = \sum_{i+j \leqslant l} a_{ij} x^i \xi^j = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{l-i} a_{ij} x^i \xi^j. \tag{2}$$

Приближенное решение уравнения (1) в многочленах на некотором сегменте $[x_0, x_0 + H]$ в предположении, что функция $\alpha(x)$ не имеет там нулей, эффективно осуществляется методом, изложенным в [1], посредством введения в (1) невязки в форме линейной комбинации полиномов Чебышева 1-го рода порядка $n + i$, $i = \overline{1, l+1}$, $n \in N$. Построенный этим методом многочлен $y_n = \sum_0^n c_j x^j$ при достаточно больших n аппроксимирует решение (1) с оценкой [1] $\| y(x) - y_n(x) \|_C \leqslant \mathrm{const} \cdot E_n(y)_C$, где

$$\| \psi(x) \|_C = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} | \psi(x) |, \quad E_n(y)_C = \min_{c_j} \left\| y(x) - \sum_0^n c_j x^j \right\|_C.$$

Высокая точность метода, достигаемая за счет повышения порядка полиномов Чебышева, на практике ограничивается трудностями, связанными с быстрым ростом коэффициентов этих полиномов. Поэтому для построения оптимального приближения могут оказаться целесообразными приемы, повышающие точность приближения без дальнейшего увеличения n. Представляет также интерес получить приближение решения уравнения (1) с функцией $\varphi(x)$, форма которой свободна от ограничений. Этим целям отвечает подход, основанный на разыскании вместо функции $y(x)$ резольвенты $R(x, \xi)$ уравнения (1), через которую искомая функция $y(x)$ выражается так:

$$y(x) = \frac{\varphi(x)}{\alpha(x)} + \int_{x_0}^{x} R(x, \xi) \frac{\varphi(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi. \tag{3}$$

Как известно [2], резольвента уравнения (1) зависит только от вида ядра $Q(x, \xi)$ и удовлетворяет уравнениям

$$R(x, \xi) = Q(x, \xi) + \int_{\xi}^{x} R(x, \eta)\, Q(\eta, \xi)\, d\eta, \tag{4}$$

$$R(x, a) = Q(x, a) + \int_{a}^{x} Q(x, \xi)\, R(\xi, a)\, d\xi. \tag{5}$$

Если ядро $Q(x, \xi)$ непрерывно в основном квадрате $x_0 \leqslant x$, $\xi \leqslant x_0 + H$ (ввиду (2) для этого достаточно полагать, что многочлен $\alpha(x)$ не обращается в нуль на отрезке $[x_0, x_0 + H]$), то резольвента $R(x, \xi)$ в указанном квадрате также будет функцией непрерывной [2]

В настоящей работе резольвента $R(x, a)$, найденная в результате решения уравнения (5) методом из [1] или методом коллокации по узлам полинома Чебышева, принимается в качестве начального приближения. Последнее затем уточняется путем привлечения уравнения (4). С использованием свойств полиномов Чебышева установлены асимптотические оценки полученного приближения.

2. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$z(x, a) = \psi(x, a) + \int_a^x Q(x, \xi) z(\xi, a) d\xi, \tag{6}$$

в котором $a \in [x_0, x_0 + H]$, $z(x, a)$ — неизвестная функция, а функкия $\psi(x, a)$ будет определена ниже. Примем пока лишь $\psi(a, a) = z(a, a) = 1$. Согласно (3) имеем

$$z(x, a) = \psi(x, a) + \int_a^x R(x, \xi) \psi(\xi, a) d\xi. \tag{7}$$

Так как $Q(x, \xi)$ и $R(x, \xi)$ не зависят от нижнего предела интегрирования в соотношениях (6) и (7), то, дифференцируя последние по параметру a, находим

$$\frac{\partial z(x, a)}{\partial a} = \frac{\partial \psi(x, a)}{\partial a} - Q(x, a) + \int_a^x Q(x, \xi) \frac{\partial z(\xi, a)}{\partial a} d\xi, \tag{8}$$

$$\frac{\partial z(x, a)}{\partial a} = \frac{\partial \psi(x, a)}{\partial a} - R(x, a) + \int_a^x R(x, \xi) \frac{\partial \psi(\xi, a)}{\partial a} d\xi. \tag{9}$$

Пусть решение $z(x, a)$ уравнения (6) известно для всех $a \in [x_0, x_0 + H]$ при некоторой функции $\psi(x)$, не зависящей от параметра a. Тогда из (9) резольвента $R(x, a)$ определяется так: $R(x, a) = -\partial z(x, a)/\partial a$. Не располагая в общем случае указанными данными, потребуем от функции $\psi(x, a)$, чтобы она, во-первых, позволяла достаточно просто находить решение уравнения (6) или (8), а во-вторых, делала бы величину интегрального члена в (9) по возможности малой. Исходя из этих соображений, примем, что

$$\frac{\partial \psi(x, a)}{\partial a} = \frac{\varepsilon(x, a)}{\alpha(x)}; \ \varepsilon(x, a) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_i T_{n+i}^0 \left(\frac{x-a}{h}\right), \tag{10}$$

где $h = x_0 + H - a$, τ_i — некоторые постоянные, $T_k^0(x)$ — смещенные полиномы Чебышева

$$T_k^0(x) = T_k(2x - 1) = \cos k \arccos(2x - 1). \tag{11}$$

Выбор функции $\partial\psi(x, a)/\partial a$ в форме (10) позволяет рассчитывать на решение уравнения (8) в многочленах. Полагая в (8)

$$\partial z(x, a)/\partial a = -R_n(x, a) = -\sum_{j=0}^{n} b_j(a)(x-a)^j, \tag{12}$$

приходим к равенству

$$\alpha(x) R_n(x, a) = P(x, a) + \int_a^x P(x, \xi) R_n(\xi, a) d\xi - \varepsilon(x, a). \tag{13}$$

Последнее можно получить также непосредственно из уравнения (5), разыскивая его решение в многочленах $R_n(x, a)$ и вводя с этой целью невязку вида (10) так, как это делалось в работе [1]. Метод неопределенных коэффициентов после интегрирования и разложения содержащихся в (13) многочленов по степеням $(x - a)$ приводит к линейной алгебраической системе $n + l + 2$ уравнений с неизвестными b_j, $j = \overline{0, n}$, и τ_i, $i = \overline{1, l+1}$. Доказательство разрешимости этой системы при достаточно больших n и различные оценки приближения решения уравнения (5) посредством многочленов $R_n(x, a)$ устанавливаются переформулировкой соответствующих результатов работы [1] на случай полиномов (11). В частности, при всяком фиксированном значении $a \in [x_0, x_0 + H]$ справедливы соотношения

$$\| R(x, a) - R_n(x, a) \|_{C^a} \leqslant A_1(a) E_n^a(R)_{C^a} \leqslant A_1(a) E_n^a(R)_C, \tag{14}$$

$$\| \tau \| = \left(\sum_{i=1}^{l+1} \tau_i^2 \right)^{1/2} \leqslant A_2(a) E_n^a(R)_{C^a} \leqslant A_2(a) E_n^a(R)_C, \tag{15}$$

где постоянные $A_1(a)$ и $A_2(a)$ не зависят от n,

$$\| f(x, a) \|_{C^a} = \max_{a \leqslant x \leqslant x_0 + H} | f(x, a) |, \quad \| f(x, a) \|_C = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} | f(x, a) |,$$

$$E_n^a(R)_{C^a} = \min_{c_j} \left\| R(x, a) - \sum_0^n c_j x^j \right\|_{C^a}, \quad E_n^a(R)_C = \min_{c_j} \left\| R(x, a) - \sum_0^n c_j x^j \right\|_C \tag{16}$$

В силу непрерывности резольвенты $R(x, a)$ в квадрате $x_0 \leqslant a,\ x \leqslant x_0 + H$ величина $E_n^a(R)_C$, как функция параметра a, также непрерывна [3]. Ее максимум $E_n^0(R)_C$ достигается на некотором значении $a_0 \in [x_0, x_0 + H]$ и обладает всеми свойствами $E_n^a(R)_C$. Заменяя постоянные $A_1(a)$, $A_2(a)$ их верхними гранями на отрезке $x_0 \leqslant a \leqslant x_0 + H$, получаем вместо (14) и (15) равномерные по a оценки

$$\| R(x, a) - R_n(x, a) \|_{C^a} \leqslant A_1 E_n^0(R)_C, \quad \| \tau \| \leqslant A_2 E_n^0(R)_C \quad \forall a \in [x_0, x_0 + H]. \tag{17}$$

Уточним приближения резольвенты $R(x, a)$ используя для этого равенство (9), из которого с учетом (10) и (12) следует

$$R(x, a) = R_n(x, a) + \varepsilon(x, a)/\alpha(x) + \int_a^x R(x, \xi)(\varepsilon(\xi, a)/\alpha(\xi))\, d\xi. \tag{18}$$

Заменяя под интегралом величину $R(x, \xi)$ правой частью равенства (4), получаем

$$R(x, a) = R_n(x, a) + \varepsilon(x, a)/\alpha(x) + \int_a^x Q(x, \xi)(\varepsilon(\xi, a)/\alpha(\xi))\, d\xi + r_1(x, a). \tag{19}$$

Слагаемое $r_1(x, a)$ после интегрирования по частям принимает вид

$$r_1(x, a) = \int_a^x \left(\int_\xi^x R(x, \eta) \frac{Q(\eta, \xi)}{\alpha(\xi)}\, d\eta \right) \varepsilon(\xi, a)\, d\xi = -\frac{\varepsilon_1(a, a)}{\alpha(a)} \int_a^x R(x, \eta) \times$$

$$\times Q(\eta, a)\, d\eta + \int_a^x \varepsilon_1(\xi, a) \left\{ R(x, \xi) \frac{Q(\xi, \xi)}{\alpha(\xi)} - \int_\xi^x R(x, \eta) \left[\frac{Q(\eta, \xi)}{\alpha(\xi)} \right]_\xi' d\eta \right\} d\xi, \tag{20}$$

где с учетом (10)

$$\varepsilon_1(\xi, a) = \int \varepsilon(\xi, a)\, d\xi = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_i(a)\, \theta_{n+i}(\xi, a), \tag{21}$$

причем первообразные для полиномов Чебышева из (10) выбраны в форме

$$\theta_k(\xi, a) = \int T_k^0\left(\frac{\xi - a}{h}\right) d\xi = \frac{h}{4} \left[\frac{T_{k+1}^0((\xi - a)/h)}{k + 1} - \frac{T_{k-1}^0((\xi - a)/h)}{k - 1} \right]. \tag{22}$$

Первый интеграл справа в представлении (20) согласно (4) заменим разностью $R(x, a) - Q(x, a)$, во втором вместо функции $R(x, \xi)$ внесем правую часть формулы (4). Интегрируя затем по частям, из соотношений (19), (20) находим

$$R(x, a)\left[1+\frac{\varepsilon_1(a, a)}{\alpha(a)}\right]=R_n(x, a)+\frac{\varepsilon(x, a)}{\alpha(\xi)}+\int_a^x \frac{\varepsilon(\xi, a)}{\alpha(\xi)}Q(x, \xi)\,d\xi+$$

$$+\varepsilon_1(a, a)\frac{Q(x, a)}{\alpha(a)}+\int_a^x \varepsilon_1(\xi, a)\left\{Q(x, \xi)\frac{Q(\xi, \xi)}{\alpha(\xi)}-\right.$$

$$\left.-\int_\xi^x Q(x, \eta)\left[\frac{Q(\eta, \xi)}{\alpha(\xi)}\right]'_\xi d\eta\right\}d\xi+\int_a^x \varepsilon_2(\xi, a)\,Q(x, \xi)\frac{Q^2(\xi, \xi)}{\alpha(\xi)}\,d\xi+r_2(x, a). \quad (23)$$

Здесь

$$\varepsilon_2(\xi, a)=\int \varepsilon_1(\xi, a)\,d\xi=\frac{h}{4}\sum_{i=1}^{l+1}\tau_i(a)\left[\frac{\theta_{n+i+1}(\xi, a)}{n+i+1}-\frac{\theta_{n+i-1}(\xi, a)}{n+i-1}\right], \quad (24)$$

$$r_2(x, a)=\varepsilon_2(a, a)\left\{\frac{Q(a, a)}{\alpha(a)}[Q(x, a)-R(x, a)]+\int_a^x [R(x, \eta)-Q(x, \eta)]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{Q(\eta, a)}{\alpha(a)}\right]'_a d\eta\right\}+\int_a^x \varepsilon_2(\xi, a)\left\{[R(x, \xi)-Q(x, \xi)]\times\right.$$

$$\times\left[\frac{Q^2(\xi, \xi)}{\alpha(\xi)}-\left(\frac{Q(\eta, \xi)}{\alpha(\xi)}\right)'_\xi\Bigg|_{\eta=\xi}\right]-\int_\xi^x R(x, \eta)\left[\frac{Q(\xi, \xi)}{\alpha(\xi)}Q(\eta, \xi)\right]'_\xi d\eta+$$

$$\left.+\int_\xi^x [R(x, \eta)-Q(x, \eta)]\left[\frac{Q(\eta, \xi)}{\alpha(\xi)}\right]''_{\xi\xi} d\eta\right\}d\xi. \quad (25)$$

Считая $R_n(x, a)$ нулевым приближением функции $R(x, a)$ можно рассматривать приближения, доставляемые равенствами (19) и (23) после отбрасывания величин $r_1(x, a)$ и $r_2(x, a)$, соответственно как приближения 1-го и 2-го порядков. Оценка остаточных членов r_1 и r_2 согласно формулам (20) и (25) позволит судить о качестве такого приближения.

Интегрированием по частям с использованием соотношения (22) нетрудно убедиться в истинности следующего утверждения.

Лемма 1. *Для всякой функции $f(x, \xi)$ непрерывной вместе со своей производной $f''_{\xi\xi}(x, \xi)$, при фиксированном натуральном $n \geqslant 2$ и $x \in [a, a+h]$ справедливо*

$$I=\int_a^x T^0_{n+1}\left(\frac{\xi-a}{h}\right)f(x, \xi)\,d\xi=f(x, x)\,\theta_{n+1}(x, a)+(-1)^n\frac{hf(x, a)}{2n(n+2)}-$$

$$-\frac{3}{4}(-1)^n\frac{h^2 f'_\xi(x, a)}{n(n-1)(n+2)(n+3)}-\frac{h}{4}f'_\xi(x, x)\left[\frac{\theta_{n+2}(x, a)}{n+2}-\frac{\theta_n(x, a)}{n}\right]+$$

$$+\frac{h}{4}\int_a^x\left[\frac{\theta_{n+2}(\xi, a)}{n+2}-\frac{\theta_n(\xi, a)}{n}\right]f''_{\xi\xi}(x, \xi)\,d\xi. \quad (26)$$

Отсюда с учетом (22) и (11) получаем, что при $n\to\infty$ $I=O(n^{-1-\sigma})$, где $\sigma=0$, если $f(x, x)\neq 0$, $\sigma=1$, если $f(x, x)=0$. Последнее заключение непосредственно распространяется на случай, когда под интегралом в

(26) содержится линейная комбинация полиномов $T^0_{n+i}((\xi - a)/h)$, $i = \overline{1, l+1}$, что ввиду (21), (22) и (24) приводит к оценкам

$$I_1 = \left| \int_a^x \varepsilon_1(\xi, a) f(x, \xi)\, d\xi \right| \leqslant \sum_{i=1}^{l+1} |\tau_i| \left| \int_a^x \theta_{n+i}(\xi, a) f(x, \xi)\, d\xi \right| \leqslant \|\tau\| \beta_1(n),$$

$$I_2 = \left| \int_a^x \varepsilon_2(\xi, a) f(x, \xi)\, d\xi \right| \leqslant \frac{h}{4} \sum_{i=1}^{l+1} |\tau_i| \times$$

$$\times \left| \int_a^x \left[\frac{\theta_{n+i+1}(\xi, a)}{n+i+1} - \frac{\theta_{n+i-1}(\xi, a)}{n+i-1} \right] f(x, \xi)\, d\xi \right| \leqslant \|\tau\| \beta_2(n), \qquad (27)$$

причем $\beta_1(n) = O(n^{-2-\sigma})$, $\beta_2(n) = O(n^{-3-\sigma})$. Согласно (11) и (22) имеем также

$$|\varepsilon_1(a, a)| \leqslant \sum_{i=1}^{l+1} |\tau_i| |\theta_{n+i}(a, a)| \leqslant \|\tau\| \operatorname{const}/n^2,$$

$$|\varepsilon_2(a, a)| \leqslant \frac{h}{4} \sum_{i=1}^{l+1} |\tau_i| \left| \frac{\theta_{n+i-1}(a, a)}{n+i+1} - \frac{\theta_{n+i-1}(a, a)}{n+i-1} \right| \leqslant \|\tau\| \frac{\operatorname{const}}{n^4}. \quad (28)$$

Равенства (19) и (23) вместе с оценками (27), (28), (17), приложенными к формулам (20) и (25), позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Соотношения* (19) *и* (23), *в которых многочлен* $R_n(x, a)$ (12) *при всяком фиксированном* $a \in [x_0, x_0 + H]$ *является решением уравнения* (13), *в области* $x_0 \leqslant a \leqslant x \leqslant x_0 + H$ *приближают резольвенту* $R\ (x,a)$ *уравнения* (1) *с точностью до слагаемых* r_1 *и* r_2, *характеризуемых равномерными по* x *и* a *оценками*

$$|r_i(x, a)| \leqslant \gamma_i(n) E^0_n(R)_C, \quad \gamma_i(n) = O(n^{-2i}), \quad i = 1, 2, \quad n \to \infty. \quad (29)$$

3. Используя тождество [4] $T^0_{k+1}(x) = (4x - 2) T^0_k(x) - T^0_{k-1}(x)$, величину $\varepsilon(x, a)$ (10) можно преобразовать к виду

$$\varepsilon(x, a) = T^0_{n+1}\left(\frac{x-a}{h}\right) \sum_{j=0}^{l} \tau^*_j (x-a)^j + T^0_n\left(\frac{x-a}{h}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \tau^{**}_j (x-a)^j, \quad (30)$$

где постоянные τ^*_j и τ^{**}_j известным образом выражаются через коэффициенты τ_i из (10). Соображения, определившие выбор функции $\partial\psi(x, a)/\partial a$ в форме (10), с тем же основанием позволяют сохранить в (30) лишь первую группу слагаемых, т. е. положить

$$\frac{\partial\psi(x, a)}{\partial a} = \frac{\varepsilon^*(x, a)}{\alpha(x)} = \frac{\tau^*(x)}{\alpha(x)} T^0_{n+1}\left(\frac{x-a}{h}\right), \quad \tau^*(x) = \sum_{j=0}^{l} \tau^*_j (x-a)^j. \quad (31)$$

Разыскивая, как и прежде, решение уравнения (13) с $\varepsilon^*(x, a)$ вместо $\varepsilon(x, a)$ в виде многочленов (12), необходимые соотношения для определения коэффициентов b_j можно образовать, требуя выполнения равенства (13) в узлах полинома Чебышева, входящего в (31). Очевидно, построенный так полином (12) совпадает с тем, который реализует решение задачи коллокации для уравнения (5) по указанной системе узлов. Существование и единственность такого решения при достаточно больших n, а также его оценка, выраженная через величину наилучшего приближения для искомой функции, установлены в работе [5]. В обозначениях данной статьи доказанная в [5] теорема, в частности, утверждает; что если ядро $K(x, \xi)$ уравнения

$$R(x) = f(x) + \int_a^{a+h} K(x, \xi) R(\xi)\, d\xi, \quad a \leqslant x \leqslant a + h, \qquad (32)$$

при некотором числе $p > 1$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{x\in[a,a+h]} \int_a^{a+h} |K(x,\xi)|^p d\xi < \infty, \tag{33}$$

$$\lim_{x_2\to x_1} \int_a^{a+h} |K(x_2,\xi) - K(x_1,\xi)|^p d\xi = 0, \quad a \leqslant x_1 \leqslant a+h, \tag{34}$$

то при всех достаточно больших n существует единственное решение задачи коллокации для уравнения (32) в форме (12) по системе узлов полинома $T_{n+1}^0((x-a)/h)$ с оценкой

$$\|R - R_n\|_{C^a} \leqslant (d_1 + g_1 \ln n)\, E_n^a(R)_{C^a}, \tag{35}$$

где положительные числа d_1 и g_1 не зависят от n и f.

Уравнение (5), рассматриваемое в нашем случае, приводится к виду (32) с ядром $K(x,\xi) = Q(x,\xi)$ при $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant a+h$ и $K(x,\xi) = 0$ при $a \leqslant x < \xi \leqslant a+h$. Очевидно, ядро $K(x,\xi)$ ограничено в основном квадрате ($|K(x,\xi)| \leqslant Q_0 = \mathrm{const}$, $Q_0 = \max|Q(x,\xi)|$, $x, \xi \in [x_0, x_0+h]$) и непрерывно там, за исключением линии $x = \xi$. Для всякого конечного $p > 1$ отсюда следует условие (33), а также непрерывность в целом ядра $K(x,\xi)$ [6]. С учетом этого свойства при $p > 1$ имеем

$$\int_a^{a+h} |K(x_2,\xi) - K(x_1,\xi)|^p d\xi \leqslant (2Q_0)^{p-1} \int_a^{a+h} |K(x_2,\xi) - K(x_1,\xi)|\, d\xi \to 0, \quad x_2 \to x_1,$$

т. е. справедливость условия (34). Это позволяет использовать оценку (35) в рассматриваемом случае при всяком фиксированном $a \in [x_0, x_0+H]$. Как и выше, от неравенства (35) можно перейти к равномерной по a оценке вида

$$\|R(x,a) - R_n(x,a)\|_{C^a} \leqslant (d + g \ln n)\, E_n^0(R)_C. \tag{36}$$

Для оценки величины $\tau^*(x)$ потребуется следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Если в точках экстремума полинома* $T_{n+1}^0((x-a)/h)$

$$x_i = a + \frac{h}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi i}{n+1}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{37}$$

многочлен $\tau^*(x)$ *фиксированной степени* l, $1 \leqslant l \leqslant n+1$, *принимает заданные значения* $\tau^*(x_i)$, *то*

$$\|\tau^*(x)\|_{C^a} \leqslant B \max|\tau^*(x_i)|, \tag{38}$$

где постоянная B *зависит только от* l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $n+2$ значений $\tau^*(x_i)$ отберем те, которые отвечают точкам $x_{i'} = \xi_j$ с номерами $i' = \nu j$, $j = \overline{0, l}$, ν — целая часть числа $(n+1)/l$. Интерполяционный полином Лагранжа, построенный по значениям $\tau^*(\xi_j)$, однозначно определяет многочлен $\tau^*(x)$, т. е.

$$\tau^*(x) = \sum_{j=0} \tau^*(\xi_j) \prod_{k\neq} (x - \xi_k)/(\xi_j - \xi_k), \quad k = \overline{0, l} \tag{39}$$

Очевидно, $1 \leqslant \nu \leqslant (n+1)/l < \nu + 1 \leqslant 2\nu$, $1/(2l) < \nu/(n+1) \leqslant 1/l$ и при $k \neq j$ $1 \leqslant |j-k| \leqslant l$, $1 \leqslant j+k \leqslant 2l-1$. Поэтому согласно (37) находим

$$|\xi_j - \xi_k| = h\left|\sin\frac{\pi\nu(j-k)}{2(n+1)}\right| \sin\frac{\pi\nu(j+k)}{2(n+1)} > \frac{h}{2l}|j-k|\,\omega_{kj} \geqslant \frac{h}{4l^2}.$$

Здесь $\omega_{kj} = (j+k)/(2l) \geqslant 1/(2l)$, если $(j+k)\nu \leqslant n+1$, $\omega_{kj} = 2 - (j+k)/l \geqslant 1/l$, если $(j+k)\nu > n+1$.

Так как при $x \in [a, a+h]$ и $\forall k = \overline{0, l}$ $|x - \xi_k| \leqslant h$, то из равенства (39) получаем $\max\limits_{x\in[a,a+h]} |\tau^*(x)| \leqslant B \max|\tau^*(\xi_j)| \leqslant B \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1} |\tau^*(x_i)|$. Постоянная $B = (2l)^l \sum_{j=0}^{l} \prod_{k \neq j} \omega_{kj}^{-1} |j-k|^{-1} < (2l)^{2l}(l+1)$ зависит только от l. Тем самым утверждение (38) доказано.

Из уравнений (5) и (13) с $\varepsilon^*(x, a)$ вместо $\varepsilon(x, a)$ имеем

$$R(x, a) - R_n(x, a) - \int_a^x Q(x, \xi)[R(\xi, a) - R_n(\xi, a)]\, d\xi = \frac{\tau^*(x)}{\alpha(x)} T_{n+1}^0\left(\frac{x-a}{h}\right). \tag{40}$$

Обозначим левую часть этого равенства через $\mu(x, a)$. Очевидно,

$$\|\mu(x, a)\|_{C^a} \leqslant \|R(x, a) - R_n(x, a)\|_{C^a}(1 + Q_0 h). \tag{41}$$

В точках x_i (37) согласно (40) получаем $|\tau^*(x_i)| = |\alpha(x_i)|\,|\mu(x_i, a)| \leqslant \|\alpha(x)\|_C \times \times \|\mu(x, a)\|_{C^a}$ $\forall i = \overline{0, n+1}$. В соответствии с соотношениями (38), (41), (36) отсюда следует

$$\|\tau^*(x)\|_{C^a} \leqslant (d_2 + g_2 \ln n)\, E_n^0(R)_C, \tag{42}$$

причем постоянные d_2 и g_2 не зависят от n.

Уточнение приближения резольвенты $R(x, a)$, доставляемого полиномами $R_n(x, a)$, производится здесь так же, как в разделе 2. Отправляясь от уравнения (18) с $\varepsilon^*(x, a)$ вместо $\varepsilon(x, a)$, с помощью тех же приемов, что и выше, приходим к соотношениям вида (19), (20), (23), (25), в которых теперь следует заменить $\varepsilon(\xi, a)$ на $\varepsilon^*(\xi, a)/\tau^*(\xi)$, $\alpha(\xi)$ на $\alpha(\xi)/\tau^*(\xi)$, $\varepsilon_1(\xi, a)$ и $\varepsilon_2(\xi, a)$ на $\theta_{n+1}(\xi, a)$ и $(h/4)[\theta_{n+2}(\xi, a)/(n+2) - \theta_n(\xi, a)/n]$ соответственно. Лемма 1 и оценка (42) вместе с неравенством Маркова для нормы производной от многочлена $\tau^*(\xi)$ позволяют оценить остаточные члены r_1 и r_2 по формулам (20) и (25). В результате имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Соотношения* (19) *и* (23), *в которых многочлен* $R_n(x, a)$ (12) *является решением задачи коллокации для уравнения* (1) *по узлам полинома Чебышева* $T_{n+1}^0((x-a)/h)$, *в области* $x_0 \leqslant a \leqslant x \leqslant x_0 + H$ *приближают резольвенту* $R(x, a)$ *этого уравнения с точностью до слагаемых* $r_1(x, a)$ *и* $r_2(x, a)$, *характеризуемых равномерными по* x *и* a *оценками*

$$|r_i(x, a)| \leqslant \lambda_i(n)(d + g \ln n)\, E_n^0(R)_C,\ \ \lambda_i(n) = O(n^{-2i}),\ \ i = 1, 2,\ \ n \to \infty. \tag{43}$$

Постоянные d *и* g *не зависят от* n.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 937—967.
2. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. Ч.1. Линейные уравнения Вольтерра.— Л.; М.: Гостехиздат, 1934.— 330 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1976.— 328 с.
5. *Ian H. Sloan, B. J. Burn.* Collocation with Polynomials for Integral Equations of the Second Kind: A New Approach to the Theory.— J. Integr. Equat., 1979, 1, N 1, p. 77—94.
6. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1959.— 232 с.

Днепропетр. горн. ин-т

Поступила 09.02.81