УДК 517.5

И. Е. Овчаренко

О двумерных хаусдорфовских моментных последовательностях

В круге вопросов, который принято называть классической проблемой моментов, важное место занимают задачи, в которых носителем решения является не вся ось, а некоторая ее часть Так, в классических исследованиях Т. Стильтьеса носителем решения была полуось $[0, \infty)$, у Ф. Хаусдорфа — конечный интервал вещественной оси. Такого рода вопросы естественно возникают и в более сложной ситуации двумерных моментных последовательностей. На чтениях имени И. Г Петровского в МГУ 18.01.82 г. академик В С. Владимиров в своем докладе сказал, что было бы интересно выяснить, как устроены многомерные моментные последовательности, представляющая мера которых сосредоточена в шаре. Из продумывания этого вопроса (ответственность за его интерпретацию лежит полностью на авторе статьи) и возникла эта работа. В целях «самозамкнутости» изложения мы приводим необходимые сведения о двумерных моментных последовательностях.

Пусть последовательность $a_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{Z}_+$, представима в виде

$$a_{n,m} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda;\ d\mu) \tag{1}$$

где σ — мера на R^2. Такие последовательности будем называть M-последовательностями, а совокупность двумерных мер, задающих представление $a_{n,m}$ в виде (1), обозначим $\mathfrak{S}_a$. Если $\mathfrak{S}_a$ состоит из одного элемента, то $a_{n,m}$ называется определенной M-последовательностью. Здесь мы будем, если не оговорено особо, рассматривать λ-полуопределенные M-последовательности $a_{n,m}$, т. е. такие, что одномерная моментная последовательность $a_{n,0}$ — определенная. В основе исследования лежит специальное интегральное представление λ-полуопределенных M-последовательностей, позволяющее свести рассматриваемую двумерную задачу к набору одномерных. Именно:

$$a_{n,m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m)\, \rho(d\lambda) \tag{2}$$

где $\rho(d\lambda) = \pi_\lambda \sigma(d\lambda;\ d\mu)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_a$,

$$s_\lambda(m) := \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \gamma_{k,N} a_{k,m} \right) P_N(\lambda) \tag{3}$$

одномерные моментные при ρ-п. в. λ-последовательности, причем отображение $\lambda \to s_\lambda(m)$ измеримо при любом m. Заметим, что $\rho(d\lambda)$ задает интегральное представление последовательности $a_{n,0}$, $P_N(\lambda)=\sum_0^N \gamma_{k,N}\lambda^k$ — отвечающие $a_{n,0}$ ортогональные многочлены первого рода. Нам понадобится описание совокупности $\mathfrak{S}_a$. Любая $\sigma\in\mathfrak{S}_a$ задается равенством

$$\sigma(d\lambda;\ d\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\oplus\eta_\lambda(d\mu)\,\rho(d\lambda), \tag{4}$$

где $\eta_\lambda(d\mu)$ — семейство мер, задающих представление моментной последовательности $s_\lambda(m)$, ρ — согласованное в том смысле, что отображение $\lambda\to\to\eta_\lambda(B)$ измеримо при любом борелевском множестве B. Напомним, что равенство (4) означает, что для любого прямоугольника $\Delta'\times\Delta''$ в плоскости $(\lambda;\mu)$

$$\sigma(\Delta'\times\Delta'')=\int_{\Delta'}\Big\{\int_{\Delta''}\eta_\lambda(d\mu)\Big\}\rho(d\lambda). \tag{4a}$$

Аналитически ρ-согласованные семейства $\eta_\lambda(d\mu)$ описываются следующим образом. При тех λ, для которых $s_\lambda(m)$ — определенная последовательность, мера $\eta_\lambda(d\mu)$ определяется как задающая интегральное представление. При остальных λ существует целая матрица функции Гамбургера — Неванлинна $W(\lambda;z)=\|w_{jk}(\lambda;z)\|_{j,k=1}^2$, строящаяся определенным образом (см., напр., [1]) по последовательности $s_\lambda(m)$.

Равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta_\lambda(d\mu)}{\lambda-z}=[w_{11}(\lambda;z)\,\tau_\lambda(z)+w_{12}(\lambda;z)]\,[w_{21}(\lambda;z)\,\tau_\lambda(z)+w_{22}(\lambda;z)]^{-1}, \tag{5}$$

где $\tau_\lambda(z)$ — неванлинновская функция по z, ρ-измеримая при каждом фиксированном z. Из (3) и (4) следует общий критерий определенности $a_{n,m}$: он состоит в том, что для определенности $a_{n,m}$ необходимо и достаточно, чтобы ρ-п. в. последовательности $s_\lambda(m)$ были определенными (см., напр., [2]).

В [1, с. 297] приведен критерий разрешимости одномерной проблемы моментов при условии локализации меры вне промежутка $[\alpha,\beta]$; в [3] установлен критерий для локализации меры на промежутке $[\alpha,\beta]$.

1. M_D-последовательности; общие критерии.

Определение 1. *Пусть D — область в R^2. M-последовательность $a_{n,m}$ будем называть M_D-последовательностью, если у некоторой $\sigma\in\mathfrak{S}_a$ $\operatorname{supp}\sigma\subseteq\overline{D}$. Совокупность $\sigma\in\mathfrak{S}_a$, обладающих этим свойством, будем обозначать $\mathfrak{S}_{a,D}$. Той же терминологии будем придерживаться и по отношению к одномерным моментным последовательностям.*

Заметим предварительно, что если $\Delta=\pi_\lambda D$ — интервал оси λ такой, что $\rho(\Delta)=0$, то, как следует из (4), у всех мер $\sigma\in\mathfrak{S}_a$ полоса с проекцией Δ свободна от масс. Поэтому достаточно рассмотреть в известном смысле крайние случаи $\rho(\Delta)=0$ и $\rho(\Delta')>0$ для любого подынтервала $\Delta'\subset\Delta$.

Приводимая ниже теорема позволяет проверить, существуют ли среди $\sigma\in\mathfrak{S}_a$ меры, не имеющие масс в данной области.

Теорема 1. *Пусть $a_{n,m}$ — λ-полуопределенная M-последовательность; $\rho(d\lambda)$ — мера, задающая интегральное представление последовательности $a_{n,0}$; $\Delta'\times\Delta''$ — прямоугольник в плоскости $(\lambda;\mu)$. Будем считать, что мера $\hat\rho=\rho\,|\,\Delta'$ такова, что $\rho(\mathring{\Delta})>0$ $\forall\mathring{\Delta}\subset\Delta$. Для того чтобы $\mathfrak{S}_{a,R^2\setminus\overline{\Delta'\times\Delta''}}\neq\varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы при $\hat\rho$-п.* в. *ядра*

$$\hat{s}_\lambda(m+n):=s_\lambda(m+n+2)-(\alpha+\beta)\,s_\lambda(m+n+1)+\alpha\beta s_\lambda(m+n) \tag{6}$$

были положительно определенными; α, β — концы промежутка Δ''.

Доказательство. Для того чтобы $\mathfrak{S}_{a,R^2\setminus\overline{\Delta'\times\Delta''}}\neq\varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы существовало ρ-согласованное семейство мер $\eta_\lambda(d\tau)$ такое, чтобы для $\hat\rho$ почти всех $\lambda\in\Delta'$ $\eta_\lambda(\Delta'')=0$. В самом деле, если

$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = 0$, то, учитывая равенства (4) и (4а), получаем, что $\hat{\rho}$-п.в. $\eta_\lambda(\Delta'') = 0$. Отсюда (см. [1, с. 297]) следует (6). Обратно, пусть (6) выполняется. Тогда, как следует из детерминантного критерия (см. [1, с. 298]) определенности проблемы моментов с люком, множество, где эта проблема для последовательности $s_\lambda(m)$ определенная, ρ-измеримо. Для этих λ меры $\eta_\lambda(d\tau)$ определим каноническим образом. Для остальных λ меры $\eta_\lambda(d\tau)$ можно выбрать, если в правую часть (5) поставить ρ-согласованное семейство $\tau_\lambda(z)$, удовлетворяющих дополнительным условиям Фильштинского [4], описавшего совокупность решений проблемы моментов с конечным числом «пустых» интервалов. Этим условиям всегда можно удовлетворить. Для построенного таким образом согласованного семейства мер $\eta_\lambda(\Delta'') = 0$, а в силу формулы (4а) $\sigma(\Delta' \times \Delta'') = 0$.

Заметим, что в доказательстве теоремы 1 содержится описание совокупности $\mathfrak{S}_{a,R^2\setminus\overline{\Delta'\times\Delta''}}$, а равно и критерий того, что последняя состоит из одного элемента.

Теорема 2. *Для того чтобы мера $\sigma(d\lambda; d\mu) \in \mathfrak{S}_a$, удовлетворяющая условию $\sigma(\Delta' \times \Delta'') = 0$, была единственной, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\rho}$ — п. в. какая-либо из моментных последовательностей $s_\lambda(m)$ и $\hat{s}_\lambda(m) := s_\lambda(m+2) - (\alpha+\beta)s_\lambda(m+1) + \alpha\beta s_\lambda(m)$ была определенной.*

Теорема 2 прямо следует из теоремы 1 и соответствующих одномерных результатов [1, 4].

2. Критерий локализации меры и отсутствия масс в случае конкретных областей. Пусть $R^2\setminus\bar{D}$ — полоса.

Теорема 3. *Пусть $a_{n,m}$ — λ-полуопределенная M-последовательность. Для того чтобы существовала $\sigma \in \mathfrak{S}_a$ такая, что $\sigma[(-\infty, \infty)\times[\alpha, \beta]) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ядро, порождаемое последовательностью $\hat{a}_{n,m} := a_{n,m+2} - (\alpha+\beta)a_{n,m+1} + \alpha\beta a_{n,m}$, было положительно определенным.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что представляющая мера для последовательности $s_\lambda(m)$ локализована вне промежутка $[\alpha, \beta]$. В силу результата [1, с. 297] последовательность $\hat{s}_\lambda(m) := s_\lambda(m+2) - - (\alpha+\beta)s_\lambda(m+1) + \alpha\beta s_\lambda(m)$ — моментная. Вместе с (2) отсюда следует что $\hat{a}_{n,m}$ — M-последовательность, и, тем более, ядро, порождаемое ею, положительно определенное. Пусть ядро, порождаемое $\hat{a}_{n,m}$, положительно определенное. Тогда на множестве многочленов двух переменных, представляющих собой сумму квадратов модулей многочленов, последовательность $\hat{a}_{n,m}$ порождает неотрицательный функционал $\hat{\sigma}: \hat{\sigma}(\Sigma b_{jk}\lambda^j\mu^k) := \Sigma b_{jk}a_{jk}$. Пусть $P(\lambda) = \Sigma\xi_j\lambda$, $Q(\mu) = \Sigma\eta_k\mu^k$. Так как $\hat{\sigma}(|PQ|^2) \geqslant 0$, то, используя (2), получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum\limits_{s,l}\hat{s}_\lambda(l+s)\eta_l\bar{\eta}_s|P(\lambda)|^2\rho(d\lambda) \geqslant 0$. Применяя теорему Фейера — Рисса, делаем вывод, что $\hat{s}_\lambda(m)$ — моментная последовательность. Остается применить теорему 1.

Пусть D — прямоугольник. Приведем дополнение к классической теореме Хильдебрандта — Шенберга (см. [1]), относящейся к случаю $D = = \Delta' \times \Delta''$.

Теорема 4. *Для того чтобы M-последовательность $a_{n,m}$ была $M_{\Delta'\times\Delta''}$-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $a_{n,0}$ и $a_{0,m}$ были соответственно $M_{\Delta'}$- и $M_{\Delta''}$-последовательностями.*

Доказательство. Пусть

$$a_{n,m} = \int\limits_{\Delta'}\int\limits_{\Delta''}\lambda^n\mu^m\sigma(d\lambda; d\mu). \tag{7}$$

Последовательности $a_{n,m}$; $a_{n,0}$; $a_{0,m}$ — определенные. Меры $\rho(d\lambda) = \pi_\lambda\sigma$ и $\tau(d\mu) = \pi_\mu\sigma$ задают представления последовательностей $a_{n,0}$ и $a_{0,m}$. Из (7) следует, что $\operatorname{supp}\rho \subseteq \overline{\Delta}'$; $\operatorname{supp}\tau \subseteq \overline{\Delta}''$. Для доказательства достаточности заметим, что так как M_Δ-последовательность заведомо «карлемановская», то справедлива импликация: ((ядро $a_{n+l,m+k}$ — положительно определенное) $\wedge$ $\wedge (a_{n,0} \vee a_{0,m}$ — M_Δ-последовательность)) $\to a_{n,m}$ — M-последовательность. Из [2] следует, что $a_{n,m}$ определенная M-последовательность, и если бы $\sigma(R^2 \setminus \overline{\Delta' \times \Delta''}) \neq 0$, то для какой-то из последовательностей $a_{n,0}$; $a_{0,m}$ нарушалась бы ее принадлежность соответствующему M_Δ. Следующее утверждение является некоторым дополнением к критерию Шафранича [3] «хаусдорфовости» двумерной последовательности.

Утверждение 1. *Пусть $\Delta_i = (-a_i, a_i)$, $i = 1, 2, \ldots k$, $a_{i_1, i_2, \ldots i_k}$ — k-мерная M-последовательность. Для того чтобы она была $M_{\Pi\Delta_i}$-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{2l+2}(j) \leqslant a^2 a_{2l}(j), \quad j = 1, 2, \ldots k; \tag{8}$$

здесь $a_l(j) = a_{0,0,\ldots,l,\ldots 0}$ (l стоит на j-м месте).

Пусть D — «криволинейная полоса». Пусть $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, $\varphi(\lambda) < \psi(\lambda)$, две гладкие функции, $D_{\varphi,\psi}$ — «полоса» в плоскости $(\lambda; \mu)$, заключенная между графиками этих функций.

Теорема 5. *Для того чтобы λ-полуопределенная M-последовательность была $M_{D_{\varphi,\psi}}$-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы* ρ-п. в. *квадратичные формы*

$$\sum_{n,m} s_{\lambda,\varphi,\psi}(m+n)\,\xi_n\bar{\xi}_m := \sum_{n,m} [s_\lambda(m+n+2) - ((\varphi+\psi)(\lambda))\, s_\lambda(m+n+1) - \\ - \varphi\psi(\lambda)\, s_\lambda(m+n)]\,\xi_n\bar{\xi}_m \tag{9}$$

были неотрицательны.

Теорема 5 — прямое следствие теоремы 1 и теоремы 2.5 из [5]. Родственная теорема получается при синтезе теоремы 1 и критерия Хаусдорфа для проблемы моментов на конечном промежутке.

«Эффект единственности». Условие (9) влечет определенность моментных последовательностей $s_\lambda(m)$, а отсюда и из общих соображений, изложенных в начале статьи, следует определенность последовательности $a_{n,m}$. Таким образом, получено утверждение.

Утверждение 2. *Для λ-полуопределенной M-последовательности из априорного (например, условия причинности в физических моделях) предположения локализации меры между графиками конечных функций следует единственность представляющей меры.*

Если D — «симметричная полоса», т. е. $\varphi(\lambda) > 0$, $\psi(\lambda) = -\varphi(\lambda)$, то, применяя теорему из [3], можно теореме 5 придать удобную «вычислительную» форму.

Теорема 5а. *Для того чтобы λ-полуопределенная последовательность $a_{n,m}$ была $M_{D,\varphi,\psi}$-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы ρ-почти всюду*

$$s_\lambda(2m+2) \leqslant [\varphi(\lambda)]^2 s_\lambda(2m). \tag{10}$$

Замечание. Если $\varphi(\lambda)$ допускает разложение в степенной ряд, то с учетом (2) условие (10) может быть переформулировано в терминах исходной последовательности $a_{n,m}$.

Пусть D — круг, $D = S(0; 1)$, $\lambda^2 + \mu^2 < 1$.

Теорема 6. *Для того чтобы M-последовательность $a_{n,m}$ была $M_{S(0,1)}$-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{2n+2,2m} + a_{2n,2m+2} \leqslant a_{2n,2m}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $a_{n,m}$ — $M_{S(0,1)}$-последовательность. Тогда $a_{n,0}$ — $M_{[-1;1]}$-последовательность и, следовательно, определенная. Применяя к $a_{n,m}$ теорему 5а, получаем, что $s_\lambda(2m+2) \leqslant (1-\lambda^2)\, s_\lambda(2m)$. Умножая это неравенство на λ^{2n} и интегрируя по $\rho(d\lambda)$, получаем (11). Пусть теперь выполняется (11). Из элементарных соображений, связанных с симметризацией меры при отражении относительно осей λ и μ, следует, что достаточно рассмотреть случай M-последовательностей $a_{n,m}$ таких, что $a_{n,m}=0$, если хотя бы один индекс n, m нечетный. Полагая в (11) $m=0$, получаем, в силу теоремы из [3], что $a_{n,0}$ — $M_{[-1;1]}$-последовательность. Подставляя в (11) вместо $a_{n,m}$ их выражения, посредством (2) получаем, что $\forall n \int_{-1}^{1} \lambda^n [\lambda^2 s_\lambda(2m) + s_\lambda(2m+2) - s_\lambda(2m)] \rho(d\lambda) \geqslant 0$. Отсюда следует, что ρ-п. в. $s_\lambda(2m+2) \leqslant (1-\lambda^2) s_\lambda(2m)$. В силу теоремы 5а $a_{n,m}$ — $M_{S(0,1)}$-последовательность.

Рассмотрим случаи еще двух областей, возможно представляющих интерес для математических вопросов квантовой теории поля. Пусть D_α^+ — угол раствора 2α, $\alpha < \pi/2$ в первом квадранте плоскости $(\lambda; \mu)$ с вершиной в начале координат и осью симметрии λ.

Теорема 7. *Пусть $a_{n,m}$ — λ-полуопределенная M-последовательность. Для того чтобы она была $M_{D_\alpha^+}$-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\sum_{n,l} a_{n+l+1,0}\xi_n\bar{\xi}_l \geqslant 0$;

2) $a_{2n,2m+2} \leqslant k^2 a_{2n+2,2m}$, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Пусть D_α — угол в плоскости $(\lambda; \mu)$, симметричный относительно оси λ раствора 2α, $\alpha < \pi/2$, с вершиной в начале координат, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Теорема 8. *Пусть $a_{n,m}$ — λ-полуопределенная M-последовательность. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$a_{n,m}$ — M_{D_α}-последовательность;*

2) *справедливо неравенство $a_{2n,2m+2} \leqslant k^2 a_{2n+2,2m}$;*

3) *ядро $\hat{K}(n,m)$, порождаемое последовательностью $\hat{a}_{n,m} := a_{n+2,m} - k^2 a_{n,m+2}$, положительно определенное.*

Поясним условие 3). Для M-последовательностей справедливо разложение типа (2), если вместо λ в качестве «выделенной» переменной принять μ. Тогда условие того, что $a_{n,m}$ — M_{D_α}-последовательность, эквивалентно тому, что τ-п. в. ($\tau(d\mu) = \pi_\mu \sigma$); соответствующая последовательность функций $r_\mu(n)$ такова, что интервалы $(-k^{-1}\mu, k^{-1}\mu)$, $\mu > 0$, и $(k^{-1}\mu, -k^{-1}\mu)$, $\mu < 0$, свободны от масс мер, представляющих $r_\mu(n)$. Отсюда τ-п. в. последовательности $\hat{r}_\mu(n) := r_\mu(n+2) - k^{-2}\mu^2 r_\mu(n)$ моментные, а последовательность $\hat{a}_{n,m} := a_{n+2,m} - k^{-2} a_{n,m+2}$ есть M-последовательность.

Заметим, что для λ-полуопределенных M_{D_α}- и $M_{D_\alpha^+}$-последовательностей имеет место эффект единственности.

В приведенной схеме может быть исследован также «конечнозонный» случай, т. е. когда в носителе меры конечное число концентрических колец свободно от масс. При этом если D бесконечно и имеет место λ-полуопределенный случай, то, объединяя результаты работы [4] с приведенными построениями, можно получить описание двумерных мер $\sigma(d\lambda; d\mu) \in \mathfrak{S}_a$ с «зонами», свободными от масс, а также критерии одноэлементности множества $\mathfrak{S}_{a,D}$, имеющие в данном случае нетрадиционный характер.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М. : Физматгиз, 1961.— 310 с.
2. *Овчаренко И. Е.* Интегральные представления полуопределенных степенных моментных последовательностей.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 3, с. 17—20.
3. *Szafranies F. H.* Boundedness of the shift operator related to positive definite forms. An application to moment problem.— Arkiv för matematik, 1981, 19, N 2, 251—259.
4. *Фильштинский В. А.* Степенная проблема моментов на всей оси при заданном конечном числе пустых интервалов в спектре.— Зап. мех.- мат. фак. Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва. Харьков, 1964, 30, сер. 4, с. 186—200.
5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.— М. : Наука, 1973.— 551 с.

Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР, Харьков

Поступила 14.09.82,
после доработки — 19.03.84