УДК 512.83

Ли Гюн-ы

Новый алгоритм обращения ганкелевых и теплицевых матриц

В теории матриц одной из центральных и трудных задач, имеющей многочисленные приложения, является задача отыскания для данной неособенной матрицы обратной к ней. Поэтому разработка методов обращения матриц специального вида имеет важное значение. В последнее время разными авторами был предложен ряд методов обращения ганкелевых, теплицевых, циркулянтных и других матриц [1—4]. Однако эти методы часто применимы не ко всем матрицам указанных видов. Например, метод описанный в работе [4] требует, чтобы все главные миноры матрицы были отличны от нуля, другие методы налагают на матрицы другие ограничения.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм обращения ганкелевых и теплицевых матриц, состоящий в рекуррентном определении порождающей обратную матрицу пары многочленов по соответствующим парам многочленов, порождающим обратные к матрицам, стоящим на диагонали. При этом алгоритм охватывает и случаи, когда отдельные диагональные миноры исходной матрицы и даже целые группы их обращаются в нуль.

Каждому многочлену $f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ поставим в соответствие матрицы

$$A_f=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \ldots & -\frac{a_1}{a_0} \end{Vmatrix}, \quad S_f=\begin{Vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Первая матрица известна как сопровождающая матрица многочлена, или матрица Фробениуса, вторая — ее левый симметризатор $((S_fA_f)'=S_fA_f)$

Каждой паре многочленов f и h, $h(\lambda) = d_0\lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + \ldots + d_m$, $m \leqslant n$, соответствует матрица вида

$$H(f, h) = h(A_f)\, S_f^{-1}, \tag{1}$$

которая, как нетрудно убедиться, будет ганкелевой.

Обратно, любую ганкелеву матрицу можно представить в виде (1) с некоторыми многочленами f и h [2].

Определение. *Пару многочленов будем называть порождающей для ганкелевой матрицы, если она может быть представлена через эти многочлены в виде* (1).

Заметим, что порождающие пары многочленов неединственны. Следующая лемма позволяет из множества таких пар многочленов выбрать в некотором смысле наипростейшие.

Лемма 1. *Пусть f и h — порождающая пара многочленов для ганкелевой матрицы. Тогда многочлены вида*

$$\tilde{f}(\lambda) = \alpha f(\lambda), \quad \tilde{h}(\lambda) = \alpha h(\lambda) + \beta f(\lambda), \tag{2}$$

где α и β — произвольные числа, также образуют порождающие ее пары.

Доказательство. Так как $A_{\tilde{f}} = A_f$, $S_{\tilde{f}}^{-1} = \alpha^{-1} S_f^{-1}$, из представления (1) следует, что $\tilde{h}(A_{\tilde{f}})\, S_{\tilde{f}}^{-1} = \alpha h(A_f)\, \alpha^{-1} S_f^{-1} + \beta f(A_f)\, \alpha^{-1} S_f^{-1} = h(A_f)\, S_f^{-1}$. Лемма доказана.

Будем использовать в дальнейшем пару, полученную из выражений (2) при

$$\alpha = a_0^{-1}, \ \beta = \begin{cases} 0, & \text{если } m < n, \\ -d_0/a_0^2, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

т. е. пару многочленов вида

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \quad h(\lambda) = d_1\lambda^{n-1} + d_2\lambda^{n-2} + \ldots + d_n. \tag{3}$$

С каждой ганкелевой матрицей естественно связана так называемая безутиантная матрица. Напомним определение матрицы-безутианты [5]. Каждым двум многочленам

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \ g(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \ldots + b_m, \qquad m \leqslant n,$$

относится матрица $B(f, g) = \| b_{kl} \|_{k,l=0}^{n-1}$, элементы которой определяются соотношением

$$[f(\lambda)\, g(\mu) - f(\mu)\, g(\lambda)]/(\lambda - \mu) = \sum_{k,l=0}^{n-1} b_{k,l} \lambda^k \mu^l.$$

В работе [6] показано, что $B(f, g)$ представима в виде

$$B(f, g) = \ {}_f g(A_f). \tag{4}$$

При этом $S_f A_f^k = \operatorname{diag}(A_k, A_{n-k})$ $k = 1, 2, \ldots, n$, где

$$A_k = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & & -a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -a_n & \ldots & -a_{n-k+2} \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_{n-k+1} \end{Vmatrix}, \quad A_{n-k} = \begin{Vmatrix} a_{n-k-1} & \ldots a_1 & a_0 \\ a_{n-k-2} & \ldots a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\cdot} & \ldots 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Используя представления (1) и (4), легко доказать теорему о том, что если ганкелева (безутиантная) матрица обратима, то обратная к ней есть безутиантная (ганкелева) матрица [2]

Как отмечено в работе [2], многочлены f и g, порождающие одну и ту же безутиантную матрицу, неединственны и их можно выбрать в виде

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \quad g(\lambda) = b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n \tag{5}$$

Установим критерий обратимости ганкелевой матрицы, основанный на использовании понятия пары многочленов (5), порождающих обратную к ней матрицу-безутианту.

Теорема 1. *Ганкелева матрица* $H_n = \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ *обратима тогда и только тогда, когда разрешима каждая из систем уравнений*

$$s_q a_n + s_{q+1} a_{n-1} + \dots + s_{q+n-1} a_1 = - s_{q+n}, \tag{6}$$

$$s_q b_n + s_{q+1} b_{n-1} + \dots + s_{q+n-1} b_1 = \delta_{i,n-1}, \tag{7}$$

где s_{2n-1} — *произвольное число,* $q = 0, 1, \dots, n-1$. *Определенные по решениям этих систем многочлены вида* (5) *порождают матрицу* H_n^{-1}.

Доказательство. Так как f — общий порождающий многочлен для матриц H_n и B_n, то из представления H_n в виде (1) получаем первую систему, а вторую — из представления B_n в виде (4). Остается доказать, что из разрешимости систем (6) и (7) следует обратимость матрицы H_n.

Допустим, что $\det H_n = 0$, тогда между строками Γ_i матрицы H_n существует линейная зависимость $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \Gamma_i = 0$. Покажем, что $\alpha_{n-1} \neq 0$, т. е. последняя строка линейно выражается через предыдущие. Пусть $\alpha_{n-1} = 0$, тогда через m, $m < n-1$, обозначим наибольший номер коэффициента α_i, отличного от нуля, т. е.

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \Gamma_i = 0, \qquad \alpha_m \neq 0. \tag{8}$$

В силу разрешимости (6) для некоторого ее решения a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$0 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} s_{i+j} a_{n-j} + s_{n+i} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i s_{i+j} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i s_{n+i}.$$

Так как из (8) следует

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i s_{i+j} = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{9}$$

то $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i s_{n+j} = 0$. Объединяя полученное выражение с (8), получаем $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \Gamma_{i+1} = 0$, что противоречит выбору числа m. Таким образом, $m = n - 1$, т. е. последняя строка матрицы H_n линейно выражается через предыдущие. А это в свою очередь противоречит разрешимости системы, в которой все элементы правой части, кроме последнего, равны нулю. Таким образом, $\det H_n \neq 0$ и матрица H_n обратима.

Перейдем к построению рекуррентного способа нахождения многочленов f и g, порождающих матрицу H_n^{-1}.

Обозначим через $H_k = \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^{k-1}$ усеченную ганкелеву матрицу порядка $k \times k$. Если она обратима, то порождающую пару многочленов для матрицы H_k^{-1} ищем в виде

$$f_k(\lambda) = \lambda^k + a_1^{(k)} \lambda^{k-1} + \dots + a_k^{(k)}, \quad g_k(\lambda) = b_1^{(k)} \lambda^{k-1} + b_2^{(k)} \lambda^{k-2} + \dots + b_k^{(k)}.$$

В соответствии с теоремой 1 получаем, при $q = 0, 1, \dots, k-1$, системы уравнений

$$s_q a_k^{(k)} + s_{q+1} a_{k-1}^{(k)} + \dots + s_{q+k-1} a_1^{(k)} = - s_{q+k}, \tag{10}$$

$$s_q b_k^{(k)} + s_{q+1} b_{k-1}^{(k)} + \dots + s_{q+k-1} b_1^{(k)} = \delta_{i,k-1}. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е. В качестве s_{2k-1} лучше брать не произвольное число, так как это приводит к ненужным усложнениям, а при $k < n$ элемент из основной матрицы H_n. В дальнейшем будем использовать только такие пары многочленов, которые определяются системами (10), (11).

Из предположения, что известна порождающая матрицу H_k^{-1} пара многочленов f_k и g_k, возникает задача о нахождении многочленов f_{k+1} и g_{k+1} при условии обратимости матрицы H_{k+1}. Рассмотрим более общий случай, когда несколько следующих за H_k усеченных матриц необратимы. Найдем порождающую пару многочленов для матрицы, обратной к первой обратимой усеченной матрице, следующей за этой группой вырожденных матриц.

Введем обозначения: $D_k = \det H_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\Gamma_{i+1,l} = (s_i, s_{i+1}, \ldots \ldots, s_{i+l})$,

$$a^{(k)} = \begin{pmatrix} a_k^{(k)} \\ a_{k-1}^{(k)} \\ \vdots \\ a_1^{(k)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_k^{(k)} \\ b_{k-1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_1^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а 2 *Пусть для ганкелевой матрицы H_n совокупность ее главных миноров такова, что $D_k \neq 0$, $D_{k+1} = 0, \ldots, D_{r-1} = 0$, $D_r \neq 0$. Пусть f_k и g_k — порождающая пара многочленов для матрицы H_k^{-1}. Тогда порождающая пара многочленов f_r и g_r для матрицы H_r^{-1} определяется следующими формулами:*

$$f_r(\lambda) = f_k(\lambda) \sum_{j=0}^{p} \alpha_{r,j} \lambda^{p-j} - g_k(\lambda)/\beta_r, \qquad \alpha_{r,0} = 1, \; p = r - k, \tag{12}$$

$$g_r(\lambda) = \beta_r f_k(\lambda),$$

где

$$\beta_r^{-1} = \Gamma_{r,k} a^{(k)}, \quad \alpha_{r,j} = \Gamma_{k+j,k} b^{(k)} - \beta_r \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_{r,l} \Gamma_{r+j-l,k} a^{(k)} \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что коэффициенты определенных таким образом многочленов f_r и g_r удовлетворяют соответствующим системам вида (10) и (11).

Действительно, при $i = 0, 1, \ldots, r - 1$, $a_0^{(k)} = 1$

$$\sum_{l=0} \alpha_{r,l} \sum_{j=0} s_{i+j-l} a_{r-j}^{(k)} - \beta^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} s_{i+j} b_{k-j}^{(k)} = 0, \tag{14}$$

$$\beta_r \sum_{j=0}^{k} s_{i+j} a_{k-j}^{(k)} = \delta_{i,r-1}. \tag{15}$$

Так как f_k и g_k — порождающая пара многочленов для матрицы H_k^{-1}, то $\sum_{j=0}^{k} s_{i+j} a_{k-j}^{(k)} = 0$, $\sum_{j=0}^{k-1} s_{i+j} b_{k-j}^{(k)} = \delta_{i,k-1}$, $i = 0, 1, \ldots, k - 1$. С учетом условий $D_{k+1} = 0, \ldots, D_{r-1} = 0$, $D_r \neq 0$ имеем $\sum_{j=0} s_{i+j} a_{k-j}^{(k)} = 0$, $\sum_{j=0} s_{r+j-1} a_{k-j}^{(k)} \neq 0$, $i = k, k + 1, \ldots, r - 2$. Отсюда заключаем, что в системе (14) все уравнения, кроме последних $r - k + 1$ уравнений, а в системе (15) — кроме последнего уравнения, превращаются в тождества. А при выборе $\alpha_{r,l}$, $l = 0, 1, \ldots, r - k$, и β_r в виде (13) оставшиеся уравнения также превращаются в тождества. Таким образом, f_r и g_r, представленные в виде (12 с (13), порождают матрицу $H_r^{-1} = B_r(f_r, g_r)$.

Запишем полученный алгоритм обращения ганкелевой матрицы.

1. Если $D_1 \neq 0$, т. е. $s_0 \neq 0$, то начальные многочлены имеют вид $f_1(\lambda) = \lambda - s_0^{-1}s_1$, $g_1(\lambda) = s_0^{-1}$. Если же $D_1 = 0, \ldots, D_{k-1} = 0$, а $D_k \neq 0$, то $s_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-2$, $s_{k-1} \neq 0$. В этом случае будем начинать с многочленов f_k и g_k с коэффициентами $a_i^{(k)} = -s_{k-1}^{-1}\sum_{j=0}^{i-1} s_{k+j}a_{i-j-1}^{(k)}$, $a_0^{(k)} = 1$ $i = 1, 2, \ldots, k$, $b_i^{(k)} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $b_k^{(k)} = s_{k-1}^{-1}$.

2. Пусть H_k обратима и f_k, g_k — порождающие многочлены для H_k^{-1}. Пусть $H_{k+1}, \ldots, H_{r-1}$ — необратимые матрицы, а H_r — обратимая. Тогда многочлены f_r и g_r, порождающие матрицу H_r^{-1}, определяются формулами $f_r(\lambda) = f_k(\lambda)\sum_{j=0}^{p}\alpha_{r,j}\lambda^{p-j} - g_k(\lambda)/\beta_r$, $\alpha_{r,0} = 1$, $p = r-k$, $g_r(\lambda) = \beta_r f_k(\lambda)$, где $\beta_r^{-1} = \Gamma_{r,k}a^{(k)}$, $\alpha_{r,j} = \Gamma_{k+j,k}b^{(k)} - \beta_r\sum_{l=0}^{j-1}\alpha_{r,l}\Gamma_{r+j-l,k}a^{(k)}$.

3. Если найдены многочлены f_n, g_n, порождающие H_n^{-1}, то сама эта матрица восстанавливается по формуле $H_n^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}S_fA_f^k$, где

$$S_fA_f^k = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & -a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -a_n & & -a_{n-k+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_{n-k+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-k-1} & \ldots & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-k-2} & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Рассмотрим теплицевы матрицы. Пусть

$$T_n = \left\|\begin{matrix} c_0 & c_{-1} & \ldots c_{1-n} \\ c_1 & c_0 & \ldots c_{2-n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots c_0 \end{matrix}\right\|$$

теплицева матрица. Каждую такую матрицу можно представить в виде $T_n = h(A_f)S_f^{-1}J$, где J — антидиагональная матрица из единиц, а обратную к ней в виде $T_n^{-1} = JS_fg(A_f)$, где f, g, h — определенные многочлены.

Введем обозначения:

$$T_k = \left\|\begin{matrix} c_{k-n} & \ldots c_{1-n} \\ \cdot & \cdot \\ c_{2k-n-1} & \ldots c_{k-n} \end{matrix}\right\|, \quad a^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(k)} \\ \cdot \\ a_k^{(k)} \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \end{pmatrix}, \quad D_k = \det T_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \ \Gamma_{i,j} = (c_{i+j-n}, \ldots, c_{i-n}).$$

Сформулируем алгоритм обращения теплицевой матрицы.

1. Если $D_1 \neq 0$, т. е. $c_{1-n} \neq 0$, то начальные многочлены имеют вид $f_1(\lambda) = \lambda - c_{1-n}^{-1}c_{2-n}$, $g_1(\lambda) = c_{1-n}^{-1}$. Если же $D_1 = 0, \ldots, D_{k-1} = 0$, а $D_k \neq 0$ то $c_{i-n} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, \ldots, k-1$, $c_{k-n} \neq 0$. В этом случае будем начи

нать с многочленов f_k и g_k с коэффициентами $a_i^{(k)} = -c_{k-n}^{-1} \sum_{j=1}^{i} c_{k+j-n} a_{i-j}^{(k)}$, $a_0^{(k)} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ b_i^{(k)} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1,\ b_k^{(k)} = c_{k-n}^{-1}$.

2. Пусть T_k обратима и f_k, g_k — порождающие многочлены для T_k^{-1}. Пусть $T_{k+1}, \ldots, T_{r-1}$ — необратимые матрицы, а T_r — обратимая. Тогда многочлены f_r и g_r, порождающие матрицу T_r^{-1}, определяются формулами $f_r(\lambda) = f_k(\lambda) \sum_{j=0}^{p} \alpha_{k,j} \lambda^{p-j} - g_k(\lambda)/\beta_r,\ \alpha_{r,0} = 1,\ p = r - k,\ g_r(\lambda) = \beta_r f_k(\lambda)$, где $\beta_r^{-1} = \Gamma_{r,k} a^{(k)},\ \alpha_{r,j} = \Gamma_{k+j,k} b^{(k)} - \beta_r \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_{r,l} \Gamma_{r+j-l,k} a^{(k)}$.

3. Если найдены многочлены f_n, g_n, порождающие T_n^{-1}, то сама эта матрица восстанавливается по формуле $T_n^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} J S_f A_f^k$, где

$$JS_f A_f^k = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-k-2} & \ldots 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-k-1} & \ldots a_1 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_{n-k+1} & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & -a_n & \ldots & -a_{n-k+2} & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -a_n & 0 & \ldots 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

В заключение отметим, что предложенные алгоритмы обращения ганкелевых и теплицевых матриц по сравнению с известными «работают» без всяких дополнительных ограничений, а число арифметических операций в них одного порядка ($O(n^2)$) с числом операций в известных алгоритмах.

1. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.— М. : Наука, 1974.— 264 с.
2. *Балинский А. И., Ли Гюн-ы.* Об обращении ганкелевых и теплицевых матриц.— В кн.: Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1979, вып. 9, с. 31—37.
3. *Ли Гюн-ы.* К обращению и восстановлению теплицевых матриц.— В кн.: Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1980, вып. 11, с. 21—28.
4. *Zohar Sh.* Toeplits matrix inversion : The algorithm of W. F. Trench.— J. ACM, 1969, **16**, N 4, p. 592—601.
5. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений.— Харьков : Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936.— 44 с.
6. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования задач на собственные значения : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 11 с.

Львов. с.-х. ин-т — Поступила 17.02.84