УДК 513.88.519.4

А. В. Косяк

Область Гординга для представлений канонических коммутационных соотношений

В [1, 2] предложен метод построения по унитарному представлению локально компактной группы Ли представления соответствующей алгебры Ли. При этом необходимые соотношения между операторами представления, вообще говоря неограниченными, алгебры Ли выполняются на области Гординга — плотном множестве, состоящем из конечных линейных комбинаций векторов вида

$$\varphi_f = \int_G f(g) U(g) \varphi dg, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \quad f \in C_0^\infty(G), \tag{1}$$

где $G \ni g \to U(g) \in U(H)$ — сильно непрерывное представление группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, dg — мера Хаара на G, $C_0^\infty(G)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на G с компактным носителем.

Для унитарных представлений нелокально компактных групп область Гординга существует не всегда [3]. Тем не менее в [4—6] построены области Гординга для некоторых нелокально компактных групп Ли. Однако в этих построениях не используются операторы $U_f = \int_G f(g) U(g) dg$.

Проведение конструкции, аналогичной конструкции Гординга, для представлений нелокально компактных групп наталкивается на трудности, связанные с отсутствием инвариантных мер на таких группах.

В [7] приведена конструкция области Гординга, аналогичная (1), для унитарных представлений коммутативной нелокально компактной группы $\mathbb{R}_0^\infty$-группы финитных последовательностей вещественных чисел. При этом вместо инвариантной меры на группе используется квазиинвариантная — гауссова (с корреляционным оператором, зависящим от представления), а вместо пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций на группе — пространство целых функций на группе типа пространства $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$ [8, 9].

В настоящей статье эта конструкция обобщается для представлений некоммутативной нелокально компактной группы — бесконечномерной группы Гейзенберга — Вейля, связанной с представлениями канонических коммутационных соотношений систем с бесконечным числом степеней свободы.

1. Приведем конструкцию области Гординга для унитарных представлений конечномерной группы Гейзенберга — Вейля с целью дальнейшего ее обобщения на бесконечномерный случай.

Группа G — это тройки $\omega = (t, s, \alpha)$ вещественных чисел с законом умножения $(t_1, s_1, \alpha_1)(t_2, s_2, \alpha_2) = (t_1 + t_2, s_1 + s_2, \alpha_1 + \alpha_2 + s_1 t_2)$. Пусть задано унитарное сильно непрерывное циклическое представление группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}: G \ni \omega \to U(\omega) \in U(\mathcal{H})$, $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ — циклический вектор, $\|\varphi_0\|_{\mathcal{H}} = 1$. Случай нециклического представления сводится к циклическому (см. ниже замечание 1).

Рассмотрим подгруппы в G: $G_1 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}^1\}$, $G_2 = \{(0, s, 0) \mid s \in \mathbb{R}^1\}$, $G_3 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^1\}$. Обозначим $U(t)$, $V(s)$, $W(\alpha)$ — сужения $U(t, s, \alpha)$ соответственно на G_1, G_2, G_3. Очевидно, $U(t)$, $V(s)$, $W(\alpha)$ — однопараметрические группы унитарных операторов. Учитывая закон умножения в группе, имеем:

$$U(t, s, \alpha) = U(t) V(s) W(\alpha), \; U(t) W(\alpha) = W(\alpha) U(t),$$
$$V(s) W(\alpha) = W(\alpha) V(s), \; V(s) U(t) = U(t) V(s) W(ts). \tag{2}$$

Предположим, что $W(\alpha) = \exp(i\alpha) I$, тогда соотношения (2) принимают вид известных соотношений Вейля:

$$V(s) U(t) = \exp(its) U(t) V(s), \tag{3}$$

а цикличность представления эквивалентна тому, что з. л. о. $\{U(t) V(s) \varphi_0 | t, s \in \mathbb{R}^1\} = \mathcal{H}$ (з. л. о. — замкнутая линейная оболочка).

Определим ядерное пространство функций $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$. Пусть $L_2(\mathbb{R}^1, dg)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом по гауссовой мере $dg(t) = \pi^{-1/2} \exp(-t^2)\, dt$. Полиномы Эрмита $(h_k)_{k=0}^\infty$, $h_k(t) = (-1)^k (2^k k!)^{-1/2} \times \exp(t^2)\, d^k/dt^k \exp(-t^2)$ образуют в $L_2(\mathbb{R}^1, dg)$ ортонормированный базис. Для каждого $m \in N$ (N — множество натуральных чисел) введем гильбертово пространство $A_m(\mathbb{R}^1) = \left\{u \in L_2(\mathbb{R}^1, dg) \;\middle|\; \sum_{k=0}^\infty |(u, h_k)|^2 m^k < \infty\right\}$. Очевидно, $A_1(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^1, dg)$, $A_{m+1}(\mathbb{R}^1) \subset A_m(\mathbb{R}^1)$, $m \in N$. Для $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in N^2 = N \times N$ обозначим $A_\tau(\mathbb{R}^2) = A_{\tau_1}(\mathbb{R}^1) \otimes A_{\tau_2}(\mathbb{R}^1)$ и определим $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2) = \varprojlim_{\tau \in N^2} A_\tau(\mathbb{R}^2)$. Ядерность пространства $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ доказывается аналогично ядерности пространства $\mathcal{A}(\mathbb{R}^1) = \varprojlim_{m \in N} A_m(\mathbb{R}^1)$ [8, 9].

Рассмотрим линейное множество $\mathcal{D} = \left\{\int_{\mathbb{R}^2} a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0\, dg(t, s) \mid a \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)\right\}$, где $dg(t, s) = dg(t) \otimes dg(s)$. Определим отображение $\mathcal{F}_0: \mathcal{A}(\mathbb{R}^2) \ni a \to \mathcal{F}_0 a = \int a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0\, dg(t, s) \in \mathcal{H}$. Из неравенства $\|\mathcal{F}_0 a\| \leqslant \int |a(t, s)|\, dg(t, s) \leqslant \|a\|_{L_2(\mathbb{R}^2, dg)} = \|a\|_{A_{(1,1)}(\mathbb{R}^2)}$ следует включение $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ и непрерывность $\mathcal{F}_0$. Отображение $\mathcal{F}_0$ индуцирует на $\mathcal{D}$ топологию ядерного пространства $\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$. Если $\mathcal{F}_0$ не инъективно, то топология на $\mathcal{D}$ совпадает с фактор-топологией пространства $\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)/\mathrm{Ker}\,\mathcal{F}_0$.

На пространстве $\mathcal{D}$ по представлению группы можно построить представление соответствующей алгебры. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. А) *$\mathcal{D}$ — линейное топологическое ядерное пространство*; Б) *$\mathcal{D}$ плотно топологически вложено в $\mathcal{H}$*; В) $U(\omega) \in L(\mathcal{D} \to \mathcal{D})$ $\forall \omega \in G$; Г) *$\mathcal{D}$ содержится в области определения генераторсв однопараметрических подгрупп группы G и переводится ими в себя*; Д) *$\mathcal{D}$ состоит из целых векторов для генераторов однопараметрических подгрупп группы G*; Е) *функция $\mathbf{R}^2 \ni (t, s) \to U(t) V(s) f \in \mathcal{D}$ непрерывна $\forall f \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. А). $\mathcal{D}$ — ядерное пространство как факторпространство $\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)/\mathrm{Ker}\,\mathcal{F}_0$ ядерного пространства $\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$ [10]. Б). Топологичность вложения $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ следует из непрерывности $\mathcal{F}_0$. Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}$.

Пусть $U_1(t_1)$, $U_2(t_2)$ — две произвольные однопараметрические группы унитарных операторов в пространсве $\mathcal{H}$, A_1, A_2 — их генераторы, E_1, E_2 — разложения единицы операторов A_1, A_2, заданные на $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^1)$ — σ-алгебре борелевских множеств на $\mathbf{R}^1$, A_0 — единичный оператор. Для $f \in \mathcal{H}$ обозначим $\rho_n(f) = \max\limits_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant 2} \| A_{i_1} \ldots A_{i_n} f \|$, $n \in N$, $\rho_0(f) = \| f \|$, $\mathcal{H}^\omega(A_1, A_2) = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} \left\{ f \in \mathcal{H} \,\Big|\, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n(f) t^n/n! < \infty,\ 0 < t < \varepsilon \right\}$ — множество совместных аналитических векторов для операторов A_1, A_2. Тогда справедлива лемма.

Лемма 1. *Для произвольного $f \in \mathcal{H}^\omega(A_1, A_2)$ з. л. о. $\{A_{i_1} \ldots A_{i_n} f \mid 0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant 2;\ n \in N\}$ = з. л. о. $\{E_{i_1}(\Delta_1) \ldots E_{i_n}(\Delta_n) f \mid 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant 2;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^1);\ n \in N\}$ = з. л. о. $\{U_{i_1}(t_1) \ldots U_{i_n}(t_n) f \mid 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant 2;\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}^1;\ n \in N\}$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из [7]. Там же доказано следующее утверждение.

Следствие 1. Для произвольного вектора $f \in \mathcal{H}$ з. л. о. $\left\{ \int a(t) U(t) \times f dg(t) \mid a \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^1) \right\}$ = з. л. о. $\{E(\Delta) f \mid \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^1)\}$ = з. л. о. $\{U(t) f \mid t \in \mathbf{R}^1\}$.

Следствие 2. Для произвольного вектора $f \in \mathcal{H}$ з. л. о. $\left\{ \int a(t, s) U(t) \times V(s) f dg(t, s) \mid a \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2) \right\}$ = з. л. о. $\{E_1(\Delta_1) E_2(\Delta_2) f \mid \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^1)\}$ = з. л. о. $\{U(t) V(s) f \mid t, s \in \mathbf{R}^1\}$.

Доказательство. Вследствие леммы 1 достаточно доказать эквивалентность двух условий $\forall h \in \mathcal{H}$:

$$\left(\int a(t, s) U(t) V(s) f dg(t, s), h \right) = 0, \ a \in A(\mathbf{R}^2), \tag{4}$$

$$(E_1(\Delta_1) E_2(\Delta_2) f, h) = 0, \ \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^1).$$

Учитывая непрерывность $\mathcal{F}_0$ и описание пространства $\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}^2) = \left\{ \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n} h_k \otimes h_n \,\Big|\, \sum_{k,n=0}^{\infty} |a_{k,n}|^2 \tau_1^k \tau_2^n < \infty, \ \forall \tau = (\tau_1, \tau_2) \in N^2 \right\},$$

условие (4) можно записать иначе:

$$\left(\int h_k(t) h_n(s) U(t) V(s) dg(t, s) f, h \right) = \left(\int h_k(t) U(t) dg(t) \times \right.$$

$$\left. \times \int h_n(s) V(s) dg(s) f, h \right) = 0; \qquad k, n \in N,$$

и воспользоваться следствием 1. Полагая $f = \varphi_0$, заключаем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}$.

В). В силу (2) достаточно показать, что $U(t)\, V(s) \in L(\mathscr{D} \to \mathscr{D})$. Учитывая же действие операторов $U(t_0)\, V(s_0)$ на векторы из $\mathscr{D}$

$$U(t_0)V(s_0)\int a(t,s)\,U(t)\,V(s)\,\varphi_0 dg(t,s) = \int \exp(its_0)\,a(t,s)\,U(t+t_0)\times$$

$$\times V(s+s_0)\,\varphi_0 dg(t,s) = \int \exp(i(t-t_0)s_0)\,a(t-t_0, s-s_0)\,dg(t-t_0, s-s_0)/$$

$$/dg(t,s)\,U(t)\,V(s)\,\varphi_0 dg(t,s) = \int (T_{(t_0,s_0)}a)(t,s)\,U(t)\,V(s)\,\varphi_0 dg(t,s) \tag{5}$$

и топологию пространства $\mathscr{D}$, находим, что свойство В) следует из непрерывности оператора $T_{(t_0,s_0)}: \mathscr{A}(\mathbf{R}^2) \ni a(t,s) \to (T_{(t_0,s_0)}a)(t,s) = \exp(i(t-t_0)s_0)\times \times a(t-t_0, s-s_0)\,dg(t-t_0, s-s_0)/dg(t,s) \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^2)$.

Лемма 2. $T_{(t_0,s_0)} \in L(\mathscr{A}(\mathbf{R}^2) \to \mathscr{A}(\mathbf{R}^2))$.

Доказательство. Обозначим T_{t_0} оператор, действующий в $\mathscr{A}(\mathbf{R}^1)$: $\mathscr{A}(\mathbf{R}^1) \ni a(t) \to (T_{t_0}a)(t) = a(t-t_0)\,dg(t-t_0)/dg(t) \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^1)$. Он непрерывен ([7, лемма 2]). Рассмотрим в $\mathscr{A}(\mathbf{R}^2)$ аналог чные операторы (которые также непрерывны):

$$\mathscr{A}(\mathbf{R}^2) \ni a(t,s) \to (T_{(t_0,0)}a)(t,s) = a(t-t_0, s)\,dg(t-t_0, s)/dg(t,s) \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^2),$$

$$\mathscr{A}(\mathbf{R}^2) \ni a(t,s) \to (T_{(0,s_0)}a)(t,s) = \exp(its_0)\,a(t, s-s_0)\,dg(t, s-s_0)/dg(t,s) \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^2).$$

Соотношение

$$T_{(t_0,s_0)} = T_{(t_0,0)}T_{(0,s_0)} \tag{6}$$

завершает доказательство.

Докажем Д). Из этого свойства, в частности, следует справедливость Г).

Пусть A и B — генераторы однопараметрических групп $U(t)$ и $V(s)$, E и F — разложения единицы операторов A и B, $\mathscr{H}^c(A) = \bigcap_{\varepsilon>0} \left\{ f \in \mathscr{H} \,\Big|\, \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n f\|\, t^n/n! < \infty,\ 0 < t < \varepsilon \right\}$ — пространство целых векторов оператора A. Нам нужно доказать включение $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}^c(A) \cap \mathscr{H}^c(B)$, что эквивалентно (см. [11]) $\mathscr{D} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{D}(\exp(\varepsilon|A|))$, $\mathscr{D} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{D}(\exp(\varepsilon|B|))$ или $(\exp(\varepsilon|A|))f \in \mathscr{H}$, $(\exp(\varepsilon|B|))f \in \mathscr{H}$ $\forall f \in \mathscr{D}$. Последние же соотношения следуют из ограниченности в $\mathscr{H}$ операторов $A_\varepsilon = \exp(\varepsilon|A|)\int a(t,s)\,U(t)\,V(s)\,dg(t,s)$, $B_\varepsilon = \exp(\varepsilon|B|)\times \times \int (a(t,s)\,U(t)\,V(s)\,dg(t,s)$. Преобразуем выражение для A_ε, воспользовавшись теоремой Фубини и спектральной теоремой $U(t) = \int \exp(itx)\,dE(x)$:

$$A_\varepsilon = \exp(\varepsilon|A|)\int \left(\int \left(\int a(t,s)\exp(itx)\,dg(t)\right) dE(x)\right) V(s)\,dg(s) =$$

$$= \exp(\varepsilon|A|)\int \left(\int a_0(x,s)\exp(-x^2/4)\,dE(x)\right) V(s)\,dg(s) =$$

$$= \int \left(\int \exp(\varepsilon|x|)\,a_0(x,s)\exp(-x^2/4)\,dE(x)\right) V(s)\,dg(s).$$

Мы воспользовались равенством $\left\{\int a(t)\,U(t)\,dg(t) \,|\, a \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^1)\right\} = \left\{\int a_0(x)\times \times\exp(-x^2/4)\,dE(x) \,|\, a_0 \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^1)\right\}$ [7] и тем, что $a(t,s)$ при фиксированном s принадлежит $\mathscr{A}(\mathbf{R}^1)$. Таким образом, $a_0(x,s)$ принадлежит $\mathscr{A}(\mathbf{R}^2)$ и для нее справедливы оценки $|a_0(x,s)| \leqslant C_\delta \exp(\delta(x^2+s^2))$ $\forall\delta > 0$ [9]. В силу оценки $|\exp(\varepsilon|x|)\,a_0(x,s)\exp(-x^2/4) \leqslant \exp(\varepsilon|x|)\,C_\delta \exp(\delta(x^2+s^2) - x^2/4) \leqslant \leqslant K_{\varepsilon,\delta}\exp(\delta s^2)$ $\forall\varepsilon > 0$ справедливо неравенство: $\|A_\varepsilon\| \leqslant K_{\varepsilon,\delta}\int \exp(\delta s^2)\times \times dg(s) < \infty$, $\delta \in (0,1)$. Учитывая, что $U(t)\,V(s) = \exp(-its)\,V(s)\,U(t)$, доказательство ограниченности оператора B_ε проводится аналогично

Е). Учитывая (5), достаточно доказать, что функция $\mathbf{R}^2 \ni (t,s) \to T_{(t,s)}a \in \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^2)$ непрерывна $\forall a \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^2)$. Это следует из (6) и леммы 3 работы [7].

Замечание 1. Если исходное представление нециклично, т. е. $\mathscr{D}_0 \neq \mathscr{H}$ $\left(\mathscr{D}_0 = \left\{\int a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0 dg(t, s) \mid a \in \mathscr{A}(\mathrm{R}^2)\right\}, \quad \varphi_0 \in \mathscr{H}, \right.$ — некоторый ненулевой вектор$\left.\right)$, то выбираем $\varphi_1 \in \mathscr{D}_0^{\perp}$, строим $\mathscr{D}_1 = \left\{\int a(t, s) U(t) V(s) \times \times \varphi_1 dg(t,s) \mid a \in \mathscr{A}(\mathrm{R}^2)\right\}$ и т. д. Получим не более чем счетное множество подпространств $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{H}$ таких, что $\mathscr{D}_n \perp \mathscr{D}_k$, $n \neq k$, з. л. о. $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n = \mathscr{H}$, и определим $\mathscr{D} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$.

2. Рассмотрим бесконечномерную группу Гейзенберга — Вейля G_0^{∞}. Ее элементами являются тройки $(t, s, \alpha) \in \mathrm{R}_0^{\infty} \times \mathrm{R}_0^{\infty} \times \mathrm{R}^1$, а закон умножения задается формулой: $(t_1, s_1, \alpha_1)(t_2, s_2, \alpha_2) = (t_1 + t_2, s_1 + s_2, \alpha_1 + \alpha_2 + (s_1, t_2))$, где (s_1, t_2) — скалярное произведение в l_2.

Пусть задано унитарное сильно непрерывное циклическое представление группы G_0^{∞} в пространстве $\mathscr{H}$: $G_0^{\infty} \ni (t, s, \alpha) \to U(t, s, \alpha) \in U(\mathscr{H})$, $\varphi_0 \in \mathscr{H}$ — циклический вектор, $\|\varphi_0\| = 1$. Случай нециклического представления сводится к этому (см. ниже замечание 2).

Определим подгруппы G_1, G_2, G_3 так же, как в п. 1 и пусть $U(t)$, $V(s)$, $W(\alpha)$ — сужения $U(t, s, \alpha)$ соответственно на G_1, G_2, G_3. Предположим дополнительно, что $W(\alpha) = \exp(i\alpha) I$, тогда получаем соотношения Вейля: $V(s) U(t) = \exp(i(t, s)) U(t) V(s)$, а цикличность представления означает, что з. л. о. $\{U(t) V(s) \varphi_0 \mid t, s \in \mathrm{R}_0^{\infty}\} = \mathscr{H}$.

Пусть E, F — разложения единицы, определенные на $(\mathrm{R}^{\infty}, \mathfrak{B}(\mathrm{R}^{\infty}))$ ($\mathfrak{B}(\mathrm{R}^{\infty})$ — σ-алгебра подмножеств R^{∞}, порожденная цилиндрическими множествами с борелевскими основаниями), такие, что $U(t) = \int\limits_{\mathrm{R}^{\infty}} \exp i(t, x) dE(x)$, $V(s) = \int\limits_{\mathrm{R}^{\infty}} \exp i(s, y) dF(y)$ (см. [9]). Для разложений единицы E и F выберем гильбертово пространство $l_2(a_n) \subset \mathrm{R}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in N$, такое, что $E(l_2(a_n)) = F(l_2(a_n)) = I$. На сопряженном пространстве $l_2(a_n^{-1})$ зададим гауссову меру $dg_{\alpha}(t) = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \pi^{-1})^{1/2} \exp(-\alpha_k t_k^2) dt_k$ такую, чтобы $g_{\alpha}(l_2(a_n^{-1})) = 1$. Для этого достаточно подобрать, в силу признака Колмогорова — Хинчина, последовательность $(\alpha_k)_{k \in N}$ так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k a_k)^{-1} < \infty$. Определим на $(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty}, \mathfrak{B}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty}))$ гауссову меру $dg_{\alpha}(t, s) = dg_{\alpha}(t) \otimes dg_{\alpha}(s)$, по ней построим следующим образом пространство функций $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty})$ [8, 9]: обозначим $N_0^{2,\infty}$ множество последовательностей $\tau : N \ni k \to \tau_k = (\tau_k', \tau_k'') \in N^2$, каждая из которых, начиная с некоторого места, своего для каждой последовательности, принимает значения, равные $(1, 1)$.

Пусть $r > 0$; обозначим $A_{\tau_k}^r(\mathrm{R}^2) = \{a^r(t, s) = a(\sqrt{r}\, t, \sqrt{r}\, s) \mid a(t, s) \in A_{\tau_k}(\mathrm{R}^2)\}$. Для $\tau \in N_0^{2,\infty}$, $\tau = (\tau_k)_{k \in N}$ обозначим $A_{\tau}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty}) = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} A_{\tau_k}^{\alpha_k}(\mathrm{R}^2)$ и $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \times \mathrm{R}^{\infty}) = \varprojlim\limits_{\tau \in N_0^{2,\infty}} A_{\tau}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty})$. Пространство $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty})$ ядерное и состоит из цилиндрических функций (см. аналог в [9]). Рассмотрим линейное множество $\mathscr{D} = \left\{ \int\limits_{\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty}} a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0 dg_{\alpha}(t, s) \mid a \in \mathscr{A}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty})\right\}$. Определим отображение $\mathscr{F}_0 : \mathscr{A}^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty}) \ni a \to \mathscr{F}_0 a = \int a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0 dg_{\alpha}(t, s) \in \in \mathscr{H}$. Из неравенства $\|\mathscr{F}_0 a\| = \left\|\int a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0 \, dg_{\alpha}(t, s)\right\| \leqslant \int |a(t, s)| dg_{\alpha}(t, s) \leqslant \leqslant \|a\|_{L_2(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty}, dg_{\alpha})} = \|a\|_{A_1^{\alpha}(\mathrm{R}^{\infty} \times \mathrm{R}^{\infty})}$, $1 = (\tau_k)_{k \in N}$; $\tau_k = (1, 1)$, $k \in N$, следует включение $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ и непрерывность $\mathscr{F}_0$. Отображение $\mathscr{F}_0$ индуцирует на $\mathscr{D}$ топологию пространства $\mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty)$. Если $\mathscr{F}_0$ не инъективно, то топология на $\mathscr{D}$ совпадает с фактор-топологией пространства $\mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty)/\mathrm{Ker}\,\mathscr{F}_0$.

На пространстве $\mathscr{D}$ по представлению группы можно построить представление соответствующей алгебры. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. А) *$\mathscr{D}$ — линейное топологическое ядерное пространство;* Б) *$\mathscr{D}$ плотно топологически вложено в $\mathscr{H}$;* В) $U(t, s, \alpha) \in L(\mathscr{D} \to \mathscr{D})$ $\forall (t, s, \alpha) \in G_0^\infty$; Г) *$\mathscr{D}$ содержится в областях определения генераторов однопараметрических подгрупп группы G_0^∞, и эти генераторы переводят $\mathscr{D}$ в себя;* Д) *$\mathscr{D}$ состоит из целых векторов для генераторов однопараметрических подгрупп группы G_0^∞;* Е) *функция $G_0^\infty \ni (t, s, \alpha) \to U(t, s, \alpha) f \in \mathscr{D}$ непрерывна $\forall f \in \mathscr{D}$.*

Доказательство. А). $\mathscr{D}$ — ядерное пространство как фактор-пространство $\mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty)/\mathrm{Ker}\,\mathscr{F}_0$ ядерного пространства $\mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty)$ [10]. Б). Топологичность вложения $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ следует из непрерывности отображения $\mathscr{F}_0$. Докажем, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$.

Пусть $\{A_k\}_{k \in N}$ — семейство самосопряженных операторов, возможно, некоммутирующих и неограниченных, действующих в пространстве $\mathscr{H}$, A_0 — единичный оператор. Для $f \in \mathscr{H}$ обозначим:

$$\rho_{n,m}(f) = \max_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m} \| A_{i_1} \ldots A_{i_n} f \|; \quad n, m \in N, \; \rho_{0,m}(f) = \| f \|, \; \mathscr{H}^\omega(\{A_k\}_{k=1}^m) =$$

$$= \bigcup_{\varepsilon > 0} \left\{ f \in \mathscr{H} \,\Big|\, \sum_{n=0}^\infty \rho_{n,m}(f)\, t^n/n! < \infty, \; 0 < t < \varepsilon \right\},$$

$\mathscr{H}^\omega(\{A_k\}_{k \in N}) = \bigcap\limits_{m \in N} \mathscr{H}^\omega(\{A_k\}_{k=1}^m)$ — множество совместных аналитических векторов для семейства операторов $\{A_k\}_{k \in N}$, E_k — разложение единицы оператора A_k, $U_k(t_k) = \exp(i t_k A_k)$, $k \in N$. Тогда справедлива лемма (см. [7, лемма 4]).

Лемма 3. *Для произвольного вектора $f \in \mathscr{H}^\omega(\{A_k\}_{k \in N})$ з.л.о. $\{A_{i_1} \ldots A_{i_n} f \mid 0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m; \quad n, m \in N\} =$ з.л.о. $\{E_{i_1}(\Delta_1) \ldots E_{i_n}(\Delta_n) f \mid \Delta_1, \ldots, \Delta_n \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^1); \; 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m; \; n, m \in N\} =$ з.л.о. $\{U_{i_1}(t_1) \ldots U_{i_n}(t_n) f \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}^1; \; 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m; \; n, m \in N\}$.*

Из леммы 3 аналогично следствию 2 получаем следующее.

Следствие 3. *Для произвольного вектора $f \in \mathscr{H}$ з.л.о. $\left\{ \int a(t, s) \times U(t) V(s) f dg_\alpha(t, s) \mid a \in \mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty) \right\} =$ з.л.о. $\{U(t) V(s) f \mid t, s \in \mathbf{R}_0^\infty\}$.*

Полагая $f = \varphi_0$, заключаем, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$.

В). Достаточно убедиться в непрерывности оператора $T^\alpha_{(t_0, s_0)}$: $\mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty) \ni a(t, s) \to (T^\alpha_{(t_0, s_0)} a)(t, s) = \exp(i(t - t_0, s_0))\, a(t - t_0, s - s_0)\, dg_\alpha(t - t_0, s - s_0)/dg_\alpha(t, s) \in \mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty)$. Этот факт и пункты Г), Д), Е) доказываются аналогично конечномерному случаю.

Замечание 2. Если исходное представление нециклично, т. е. $\overline{\mathscr{D}_0} \neq \mathscr{H}$ $\left(\mathscr{D}_0 = \left\{ \int a(t, s) U(t) V(s) \varphi_0 dg_\alpha(t, s) \mid a \in \mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty) \right\}, \quad \varphi_0 \in \mathscr{H}\right.$ — некоторый ненулевой $\left.\text{вектор}\right)$, то выберем $\varphi_1 \in \mathscr{D}_0^\perp$, построим $\mathscr{D}_1 = \left\{ \int a(t, s) U(t) V(s) \times \varphi_1 dg_\alpha(t, s) \mid a \in \mathscr{A}^\alpha(\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty) \right\}$ и т. д. Получим не более чем счетное множество подпространств $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{H}$ таких, что $\mathscr{D}_n \perp \mathscr{D}_k$, $n \neq k$, з.л.о. $\bigoplus\limits_{n=0}^\infty \mathscr{D}_n = \mathscr{H}$, и определим $\mathscr{D} = \bigoplus\limits_{n=0}^\infty \mathscr{D}_n$.

1. *Garding L.* Notes on continuous representations of Lie groups.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947, 33, N 6, p. 331—332.
2. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве.— Докл. АН СССР, 1939, **25**, № 9, с. 711—716.
3. *Косяк А. В.* Аналитические и целые векторы для семейств операторов.—В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 3—18.
4. *Reed M. C.* A Garding domain for quantum fields.— Comm. Math. Phys., 1969, **14**, N 4, p. 336—346.
5. *Hegerfeldt G. C.* Garding domains and analytic vectors for quantum fields.— Journ. Math. Phys., 1972, **13**, N 6, p. 821—827.
6. *Simon J.* A Garding domain for representations of some Hilbert Lie groups.— Letters Math. Phys., 1975, **1**, N 1, p. 23—29.
7. *Косяк А. В., Самойленко Ю. С.* Область Гординга и целые векторы для индуктивных пределов коммутативных локально компактных групп.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 4, с. 427—434.
8. *Kondrat'ev Yu. G., Samoylenko Yu. S.* The spaces of trial and generalized functions on infinite number of variables.— Rep. Math. Phys., 1978, **14**, N 3, p. 325—350.
9. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
10. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
11. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **143**, N 9, p. 55—76.

Укр. с.-х. акад.

Поступила 19.07.82,
после доработки — 23. 04. 84