УДК 517.9

А. Ю. Константинов

О принципе инвариантности волновых операторов

Установленный в рамках теории ядерных возмущений (см. [1—3]) принцип инвариантности волновых операторов (в. о.), был затем другими методами доказан (см. [2—4] и имеющуюся там библиографию) при условиях несколько более жестких, чем известный критерий Кука существования в. о. В настоящей работе развивается подход, предложенный в [5], который устанавливает связь между методом Кука и ядерной теорией и позволяет доказать принцип инвариантности при выполнении условий критерия Кука.

1. Пусть H_j, $j = 1, 2$,— самосопряженные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_j$, J — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в

$\mathcal{H}_2$ (оператор отождествления); σ_j, $E_j(\cdot)$, P_{Hj} — спектр, разложение единицы, проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора H_j; $U_j(t) = \exp(-itH_j)$, $R_j(z) = (H_j - z)^{-1}$, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$; S_1 — класс ядерных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. В дальнейшем понятие «почти везде» (п. в.) относится к мере Лебега mes $(\cdot)$ на $\mathbb{R}$. Говорят, что вектор $\varphi \in \mathcal{H}_1$ принадлежит области определения $D(W^\pm)$ в. о. $W^\pm = W^\pm(H_2, H_1, J)$, если существует сильный предел

$$W^\pm\varphi = s - \lim_{t\to\pm\infty} U_2(-t)\, J\, U_1(t)\,\varphi. \tag{1}$$

Очевидно, $D(W^\pm)$ — подпространства в $\mathcal{H}_1$, приводящие H_1.

Определение 1. *Вещественная борелевская функция f на $\mathbb{R}$ принадлежит классу $A(H_1)$, если существует такое открытое множество $\Gamma \subset \mathbb{R}$, что* mes $(\sigma_1 \setminus \Gamma) = 0$, *$f$ — абсолютно непрерывна на каждом компактном подмножестве Γ и $f'(x) > 0$ для п. в. $x \in \Gamma$.*

Определение 2. *Линейный оператор T из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ принадлежит классу $S_1^\pm(H_1, \varphi)$, если существует такое $t_\varphi \geqslant 0$, что $U_1(\pm t)\varphi \in D(T)$ при $t \geqslant t_\varphi$ и $\int\limits_{t_\varphi}^{\infty} \| TU_1(\pm t)\varphi\| \, dt < \infty$.*

Обозначим $W_f^\pm = W^\pm(f(H_2), f(H_1), J)$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$,*

$$R_2(z)\, J - JR_1(z) \in S_1^+(H_1, \varphi), \quad z \overline{\in} \sigma. \tag{2}$$

Тогда для всякой функции f класса $A(H_1)$ $\varphi \in D(W_f^+)$ и

$$W^+\varphi = W_f^+\varphi. \tag{3}$$

Аналогичный результат верен и для знака «—».

Замечание 1. Существование предела (1) при выполнении условия (2), обобщающего критерий Кука, доказано в [6]. Более общие условия существования в. о. получены в [5, 7].

При условиях ядерного типа справедлива аналогичная теорема, распространяющая классические результаты М. Ш. Бирмана и Т. Като [1—3] на более широкий класс функций.

Теорема 2. *Пусть $R_2(z)\, J - JR_1(z) \in S_1$, $z \overline{\in} \sigma$. Тогда для всякой функции $f \in A(H_1)$ $\mathcal{H}_{1,ac} \subset D(W_f^\pm)$ и $W^\pm P_{H_1} = W_f^\pm P_{H_1}$.*

2. Покажем, что схему метода Кука можно вложить в рамки теории ядерных возмущений, т. е. при выполнении условия (2) можно найти новый оператор отождествления J' такой, что, во-первых, $R_2(z)\, J' - J'R_1(z) \in S_1$, а во-вторых, J' в определенном смысле эквивалентен J. Обозначим $m_\varphi(\cdot) = (E_1(\cdot)\,\varphi, \varphi)$.

Чтобы избежать определенных технических трудностей, в дальнейшем будем предполагать, что

$$\rho_\varphi(\lambda) = dm_\varphi((-\infty, \lambda])/d\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}, d\lambda). \tag{4}$$

Ниже G_φ — минимальное подпространство в $\mathcal{H}_1$, содержащее φ и приводящее H_1, Q_φ — проектор на G_φ; $U_1^f(t) = \exp(-itf(H_1))$; T — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Следующая лемма устанавливает связь между классом $S_1^+(H_1, \varphi)$ и классом ядерных операторов.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in E_1(\Delta)\,\mathcal{H}_{1,ac}$ (Δ — ограниченный интервал) и выполнено* (4). *Оператор $T \in S_1^+(H_1, \varphi)$. Тогда в $\mathcal{H}_1$ существуют ограниченные операторы $P_\pm$ такие, что*

$$P_\pm = P_\pm Q_\varphi = Q_\varphi P_\pm, \tag{5}$$

$$P_+ + P_- = Q_\varphi, \tag{6}$$

$$R_1(z)\, P_\pm - P_\pm R_1(z) \in S_1, \quad z \overline{\in} \sigma, \tag{7}$$

$$T\rho_\varphi^{1/2}(H_1)\, P_+ \in S_1 \tag{8}$$

и для всякой функции f класса $A(H_1)$

$$s-\lim_{t\to+\infty} P_- U_1^f(t) = 0. \tag{9}$$

Следствие 1. *Пусть φ удовлетворяет условиям леммы 1 и выполнено (2). Тогда существует ограниченный оператор J' из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ такой, что*

$$R_2(z) J' - J' R_1(z) \in S_1 \tag{10}$$

и для всякой функции $f \in A(H_1)$

$$s-\lim_{t\to+\infty} [J' - J\rho_\varphi^{1/2}(H_1) Q_\varphi] U_1^f(t) = 0. \tag{11}$$

Для доказательства следствия следует положить $J' = J\rho_\varphi^{1/2}(H_1) P_+$. Покажем, что следствие 1 сводит доказательство теоремы 1 к теореме 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть φ удовлетворяет условиям леммы 1 и выполнено (2). Тогда в силу (10) и теоремы 2 $\forall f \in A(H_1)$ $W^\pm(H_2, H_1, J') = W^\pm(f(H_2), f(H_1), J')$ (мы учли, что $J' = J'Q_\varphi = J'P_{H_1}$). Из (11) теперь легко следует (3). Если φ — произвольный вектор, удовлетворяющий (4), то его можно аппроксимировать векторами вида $\psi = g(H_1)\varphi$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. По предложению 1 п. 3 $R_2(z) J - JR_1(z) \in S_1^+(H_1, \psi)$ и, кроме того, очевидно, ψ удовлетворяет условиям леммы 1. По доказанному $W^+\psi = W_f^+\psi$. Отсюда легко следует утверждение теоремы 1.

Замечание 2. Если φ не удовлетворяет условию (4), то утверждения леммы 1 сохраняются, за исключением (8). Теперь $T\rho_\varphi^{1/2}(H_1) P_+$ уже не определен на всем $\mathcal{H}_1$, но тем не менее он замыкаем и его замыкание — ядерный оператор. Более того, $\exists g \in L^\infty(\mathbb{R}, dm_\varphi)$, $g \neq 0 \pmod{m_\varphi}$: $Tg(H_1) P_+ \in S_1$. $\left(\text{Если } \operatorname{supp} m_\varphi \subset (0, 2\pi),\ \rho_\varphi^{1/2}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}, \text{ то можно положить } g(x) = \rho_\varphi^{1/2}(x)/b(x), \text{ где } b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ikx}\right)$.

Доказательство леммы 1. Для удобства записи положим $\Delta = (0, 2\pi)$. Не ограничивая общности можно считать, что $F = \operatorname{supp} m_\varphi \subset \Delta$. Рассмотрим пространство $\tilde{G}_\varphi = G_\varphi \oplus L_2(\Delta \setminus F, dx)$. Положим $\varphi_n = U_1(n) \times \rho_\varphi^{-1/2}(H_1)\varphi$ и $e_n = (2\pi)^{-1/2}[\varphi_n \oplus e^{-inx}]$. $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\tilde{G}_\varphi$. Пусть $\tilde{P}_+ (\tilde{P}_-)$ — ортопроектор в $\tilde{G}_\varphi$ на подпространство, натянутое на вектора $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ $((e_{-n})_{n=1}^{\infty})$. Положим $P_\pm = O^*\tilde{P}_\pm O$, где O — оператор «вложения» из G_φ в $\tilde{G}_\varphi$ (т. е. $G_\varphi \ni \psi \to \psi \oplus 0 = O\psi$), O^* — оператор, сопряженный к O. В дальнейшем будем рассматривать $P_\pm$ как операторы в $\mathcal{H}_1$, доопределив их на $\mathcal{H}_1 \ominus G_\varphi$ нулем. Имеем

$$P_+\psi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (\psi, \varphi_k)\varphi_k, \qquad P_-\psi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-1}^{-\infty} (\psi, \varphi_k)\varphi_k. \tag{12}$$

Очевидно, что (5), (6) выполнены. Рассмотрим операторы $V_\pm = U_1(-1)P_\pm - P_\pm U_1(-1)$. Из (12) вытекает, что $V_\pm\psi = \pm(2\pi)^{-1}(\psi, \varphi_0)\varphi_{-1}$. Таким образом, $V_\pm$ — операторы ранга 1 и (7) следует из теории двойных операторных интегралов [8]. Докажем (8). В силу предложения 2 п. 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| TU_1(n)\varphi \| < \infty. \tag{13}$$

Рассмотрим оператор $\tilde{T} = T\rho_\varphi^{1/2}(H_1) Q_\varphi \oplus 0$, действующий из $\tilde{G}_\varphi$ в $\mathcal{H}_2$. Согласно (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{T}e_n\| < \infty$ и $\tilde{T}\tilde{P}_+$ — ядерный оператор из $\tilde{G}_\varphi$ в $\mathcal{H}_2$. Так как

$\tilde{T}\tilde{P}_+ = T\rho_\varphi^{1/2}(H_1)\,O^*\tilde{P}_+$, то (8) следует из определения P_+. Пусть $f \in A(H_1)$. Чтобы доказать (9), покажем, что $\forall\alpha \in \tilde{G}_\varphi$

$$s - \lim_{t\to+\infty} \tilde{P}_-\tilde{U}_1^f(t)\,\alpha = 0. \tag{14}$$

Здесь $\tilde{U}_1^f(t) = U_1^f(t) \oplus e^{-itf(x)}$. Достаточно проверить (14) для векторов вида $\alpha = [E_1(a, b) \oplus \mathrm{X}_{(a,b)}]\,e_0$, $0 < a$, $b < 2\pi$. Имеем

$$\| \tilde{P}_-\tilde{U}_1^f(t)\,\alpha \|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_a^b e^{-itf(x)}e^{-ikx}dx\right|^2 \to 0, \quad t \to +\infty,$$

в силу следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть f абсолютно непрерывна на $[a, b]$, причем $f'(x) > 0$ (п. в.). Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_a^b e^{-itf(x)}e^{-ikx}dx\right|^2 \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{15}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_a^b e^{-itf(x)}e^{-isx}\,dx\right|^2 ds \to 0, \quad t \to +\infty. \tag{16}$$

Замечание 3. Если f' непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то утверждение леммы хорошо известно (см. [2, 3]).

Доказательство леммы 2. Докажем (16) ((15) доказывается аналогично). Согласно [9], для $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists f_\varepsilon \in C^1[a, b] : f_\varepsilon'(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$ и $\operatorname{mes}(\{x : f_\varepsilon(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$. Обозначим левую часть (16) через $C_f^2(t)$. Так как $C_f(t) = \|\mathscr{F}(\mathrm{X}_{[a,b]}e^{-itf})\|_{L^2(0,\infty)}$ ($\mathscr{F}$ — преобразование Фурье в $\mathbb{R}$), то $|C_f(t) - C_{f_\varepsilon}(t)| \leqslant \|e^{-itf} - e^{-itf_\varepsilon}\|_{L^2(a,b)} < 2\varepsilon$. Следовательно, можно считать, что $f \in C^1[a, b]$ и $p(x) = f'(x) \geqslant \alpha > 0$. Пусть g — кусочно постоянная на $[a, b]$ функция $\left(\text{т. е. } g(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k \mathrm{X}_{[a_k, a_{k+1}]}, \quad a = a_0 < a_1 < \ldots \right.$ $\left.\ldots < a_m = b\right)$ такая, что $\|p - g\|_{L^2(a,b} < \varepsilon$ и $g(x) \geqslant \alpha$. Имеем $C_f(t) \leqslant$ $\leqslant A_1(t) + A_2(t)$, где

$$A_1^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_a^b \frac{t\,[g - p](x)}{s + tg(x)}\, e^{-itf(x)}e^{-isx}dx\right|^2 ds,$$

$$A_2^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_a^b \frac{s + tp(x)}{s + tg(x)}\, e^{-i(tf(x)+sx)}dx\right|^2 ds.$$

Ниже считаем, что $t > 0$. Так как

$$A_1^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t}{s + t\alpha_i}\int_{a_i}^{a_{i+1}}[g - p](x)\,e^{-itf(x)}e^{-isx}dx\right|^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^2}\,\|g - p\|^2_{L^2(a,b)} < \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2},$$

то достаточно показать, что $A_2(t) \to 0$, $t \to +\infty$. Имеем

$$A_2^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_a^b \frac{1}{s + tg(x)}\;\frac{d}{dx}\left(e^{-i(tf(x)+sx)}\right)dx\right|^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{s + t\alpha_i} \right|^2 ds \leqslant \frac{2m^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + t\alpha)^2} \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Лемма 2, а вместе с ней и теорема 2 (см. [2, 3]), доказаны.

3. Приведем некоторые свойства классов $S_1^\pm(H_1, \varphi)$. Ниже T — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

Предложение 1. *Пусть* $T \in S_1^\pm(H_1, \varphi)$, g — *преобразование Фурье комплексной меры* μ *такой, что* $\int_{\mathbb{R}} (1 + |s|)\, d|\mu|(s) < \infty$, $|\mu| = \operatorname{var} \mu$. *Тогда* $T \in S_1^\pm(H_1, g(H_1)\varphi)$.

Доказательство. Пусть для определенности $T \in S_1^+(H_1, \varphi)$. Тогда

$$\int_0^\infty \| TU_1(t)\, g(H_1)\varphi \|\, dt \leqslant \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \| TU_1(t+s)\varphi \|\, d|\mu|(s) \right) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^\infty \| TU_1(\tau)\varphi \|\, d\tau \right) d|\mu|(s) \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \| TU_1(t)\varphi \|\, dt + |s|\, \|T\| \right) d|\mu|(s).$$

Предложение 2. *Пусть* $\varphi \in D(H_1)$, $T \in S_1^\pm(H_1\varphi) \cap S_1^\pm(H_1, H_1\varphi)$. *Тогда для всех* $c > 0$

$$\sum_{n=0}^\infty \| TU_1(\pm cn)\varphi \| < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Предложение следует из цепочки неравенств

$$\left| c \| TU_1(cn)\varphi \| - \int_{cn}^{c(n+1)} \| TU_1(t)\varphi \|\, dt \right| \leqslant \int_{cn}^{c(n+1)} dt \int_{cn}^{t} \| TU_1(s) H_1\varphi \|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{cn}^{c(n+1)} \| TU_1(s) H_1\varphi \|\, ds.$$

Следствие 2. *Пусть* $\varphi \in E_1(\Delta)\mathcal{H}_1$ (Δ — *ограниченный интервал*) *и* $T \in S_1^\pm(H_1, \varphi)$. *Тогда для всех* $c > 0$ *выполнено* (17).

Интересно, что данное следствие допускает обращение. Приведем без доказательства следующий результат.

Предложение 3. *Пусть* $\varphi \in E_1(\Delta)\mathcal{H}_1$, $\Delta = (-a, a)$, $a > 0$, *и ряд* (17) *сходится для некоторого* $c \in (0, \pi/a)$. *Тогда* $T \in S_1^\pm(H_1, \varphi)$.

4. Теорема 1 показывает, что принцип инвариантности справедлив в предположениях критерия Т. Като [6]. Те же рассуждения с помощью стандартной техники теории ядерных возмущений, а также некоторых результатов работы [7], позволяют доказать принцип инвариантности при более общих условиях вида

$$g(H_2)J - Jg(H_1) \in S_1^\pm(h(H_1), \varphi). \tag{18}$$

Введем сначала соответствующие классы функций. Ниже $\overline{B}$ — замыкание множества $B \subset \mathbb{R}$.

Определение 3. *Комплекснозначная борелевская функция* g *на* $\mathbb{R}$ *принадлежит классу* $K(H_1)$, *если существует такое открытое множество* $\Gamma \subset \mathbb{R}$, *что* $\operatorname{mes}(\sigma_1 \setminus \Gamma) = 0$, *на* Γ *существует* g', *удовлетворяющая (локально) условию Гельдера с каким-либо положительным показателем, и* $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in \Gamma$. *Если, кроме того, для всякого компактного интервала* $\delta \subset \Gamma$ $\operatorname{mes}(\delta \cap g^{-1}\overline{(g(\sigma_2 \setminus \delta))}) = 0$, *то будем говорить, что* $g \in K(H_1, H_2)$.

Отметим, что последнее условие означает «почти» взаимнооднозначность g на σ. Следующая теорема усиливает и обобщает результаты работы [5].

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$, $g \in K(H_1, H_2)$, h — *вещественная функция класса* $K(H_1)$. *Предположим, что выполнено* (18). *Тогда справедливо утверждение теоремы* 1.

Приведём некоторые следствия. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ и выполнено одно из условий: 1) при некоторых целых $m \neq 0$, $n \geqslant 1$ и комплексном z ($\operatorname{Im} z \neq 0$) $R_2^m(z) J - J R_1^m(z) \in S_1^+(H_1^n, \varphi)$; 2) H_2, H_1 — положительно определены и при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $H_2^\alpha J - J H_1^\alpha \in S_1^+(H_1^\beta, \varphi)$. Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Аналогичные результаты верны и для знака «—».

Замечание 4. Принцип инвариантности в условиях теорем 1—3 справедлив и для более широкого класса функций f. Достаточно, например, требовать, чтобы вещественная борелевская функция f была строго возрастающей на каждом подынтервале открытого множества Γ (такого, что $\operatorname{mes}(\sigma_1 \setminus \Gamma) = 0$), и $f'(x) > 0$ для п. в. $x \in \Gamma$.

1. *Бирман М. Ш.* Об условиях существования волновых операторов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, 27, № 4, с. 883—906.
2. *Baumgärtel H., Wollenberg M.* Mathematical scattering theory.— Berlin : Acad.-Verl., 1983.— 449 p.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3.—М.:Мир, 1982.— 443 с.
4. *Chandler C., Gibson A.* Invariance principle for scattering with long range (and other) potentials.— Indiana Univ. Math. J., 1976, **25**, p. 443—460.
5. *Константинов А. Ю.* Локальная ядерность в методе Кука.— В кн.: Спектральная теория операторов в задачах математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 107—112.
6. *Kato T.* On the Cook — Kuroda criterion in scattering theory.— Commun. Math. Phys., 1979, **67**, p. 285—291.
7. *Константинов А. Ю.* Об условиях существования волновых операторов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 11, с. 18—21.
8. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Двойные операторные интегралы Стилтьеса.— В кн.: Проблемы математической физики. Л. : Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1966, вып. 1, с. 33—67.
9. *Obermann P., Wollenberg M.* Abel wave operators. II.— J. Funct. Anal., 1978, **30**, p. 48—59.

Киев. гос. ун-т

Поступила 20. 12.83