УДК 512.542.7

В. В. Ждан-Пушкин, В. А. Устименко

О максимальности $PSp_6(q)$, действующей на трехмерных вполне изотропных подпространствах

Пусть G — конечная простая группа типа Ли, M — класс сопряженных максимальных параболических подгрупп G, (G, M) — группа подстановок, отвечающая действию G сопряжениями на M. Существует гипотеза, что нормализатор группы G является, как правило, максимальной подгруппой в симметрической группе $S(M)$ или знакопеременной $A(M)$ [1]. Первым результатом, подтверждающим гипотезу, была теорема о максимальности

$\mathrm{P\Gamma L}_n(q)$, $n \geqslant 3$, действующей на прямых [2]. Доказательство последующих результатов [3, 4] опирается на эту теорему для $n = 3$. Дальнейший прогресс в этой задаче связан с изучением групп малого ранга.

Теорема. *Пусть* $(\mathrm{PSp}_6(q), N_3)$ — *группа подстановок, соответствующая естественному действию* $\mathrm{PSp}_6(q)$, $q > 3$, $q \neq 2^h$, *на множестве* N_3 *трехмерных вполне изотропных подпространств в* $\mathbf{F}_q^6$. *Тогда любая группа подстановок на* N_3, *содержащая* $\mathrm{PSp}_6(q)$, *либо содержится в* $(\mathrm{P\Gamma Sp}_6(q), N_3)$, *либо содержит знакопеременную группу* $A(N_3)$.

Теорема остается верной и при $q = 3$. Известное авторам доказательство отличается от доказательства, приведенного ниже.

1. Пусть (G, W) — группа подстановок. Стабилизатором множества $M \subset W$ называется подгруппа $G_{\{M\}} = \{g \in G \mid M^g = M\}$. Если M — блок транзитивности G, т. е. $G_{\{M\}} = G$, то существует естественный гомоморфизм $\lambda: G \to S(M)$ группы G в симметрическую группу множества M, который называется действием G на множестве M. $\mathrm{Ker}\,\lambda = G_{(M)} = \{g \in G \mid x^g = x, x \in M\}$ — фиксатор M. Если λ инъективен, т. е. $\mathrm{Ker}\,\lambda = G_{(M)} = 1$, то действие называется точным. Будем говорить, что действие λ подобно группе подстановок $(G/\mathrm{Ker}\,\lambda, M)$.

Группа (G, W) называется регулярной, если G транзитивна и стабилизатор точки G_x равен единичной подгруппе. Соответственно действие называется регулярным, если оно подобно регулярной группе подстановок. Абелева группа действует регулярно на любой своей орбите. Централизатор регулярной группы подстановок (G, W) в $S(W)$ также регулярен.

Группа G естественно действует на множестве $\widehat{W}^k = \{(a_1, \ldots, a_k \mid a_i \in W, a_i \neq a_j, i \neq j\}$. Элементы $\widehat{W}^k$ назовем k-точками. Блоки транзитивности и орбиты $(G, \widehat{W}^k)$ называются инвариантными k-отношениями и k-орбитами (G, W). Отношение Φ называется симметрическим, если с каждой k-точкой $(a_1, \ldots, a_k)$ оно содержит все k-точки, получающиеся из $(a_1, \ldots, a_k)$ перестановкой координат. Минимальные по включению симметрические инвариантные k-отношения называются симметризованными k-орбитами. Пусть Φ — $k+1$-арное инвариантное отношение, O — k-орбита группы G. Число $q(\Phi, O) = |\{y \mid (a_1, \ldots, a_k, y) \in \Phi\}|$ не зависит от выбора k-точки $(a_1, \ldots, a_k) \in O$ и называется коэффициентом проекции Φ на k-орбиту O.

2. Изучим некоторые свойства группы $\mathrm{PSp}_6(q)$. Будем придерживаться обозначений [5]. Путь $\mathbf{F}_q$ — поле из q элементов, $q = p^s$, $p > 2$. Рассмотрим 6-мерное векторное пространство E над $\mathbf{F}_q$ и f—знакопеременную билинейную форму на E. Обозначим через N_3 множество максимальных (трехмерных) вполне изотропных подпространств E. Группа подстановок $(\mathrm{PSp}_6(q), N_3)$ примитивна, она имеет следующие бинарные орбиты: $\Gamma_i = \{(V, W) \in N_3^2 \mid \dim V \cap W = 3 - i\}$, $i = 1, 2, 3$, Γ_1 называется отношением соседства.

Выберем в E симплектический базис $\{n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3\}$. Группу $\mathrm{Sp}_6(q)$ можно рассматривать как группу матриц $\{A \in \mathrm{GL}_6(q) \mid ATA^t = T\}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I — единичная 3×3-матрица. Элементы $\mathrm{PSp}_6(q)$ будем представлять матрицей соответствующего линейного преобразования из $\mathrm{Sp}_6(q)$. Элемент из N_3 можно задать, указав координаты его базиса.

Определим 3-орбиты группы $(\mathrm{PSp}_6(q), N_3)$. Отношения $\Delta(k, l, m, n) = \{(X, Y, Z) \in (\widehat{N}_3)^3 \mid \dim X \cap Y \cap Z = k,\ \dim X \cap Y = k + l,\ \dim X \cap Z = k + m,\ \dim Y \cap Z = k + n\}$ являются инвариантными. Через $\tilde{\Delta}(k, l, m, n)$ обозначим симметризацию отношения $\Delta(k, l, m, n)$: $\tilde{\Delta}(k, l, m, n) = \Delta(k, l, m, n) \cup \Delta(k, m, l, n) \cup \Delta(k, l, n, m)$.

Лемма 1. *Существует* 15 *симметризованных* 3-*орбит* $\Phi_1, \ldots, \Phi_{15}$ *группы* $(\mathrm{PSp}_6(q), N_3)$: $\Phi_1 = \tilde{\Delta}(0, 2, 1, 0)$, $\Phi_2 \cup \Phi_3 = \tilde{\Delta}(0, 2, 0, 0)$, $\Phi_4 \cup \Phi_5 = \tilde{\Delta}(0, 1, 1, 0)$, $\Phi_6 \cup \Phi_7 = \tilde{\Delta}(0, 1, 0, 0)$, $\Phi_8 \cup \Phi_9 = \tilde{\Delta}(0, 0, 0, 0)$, $\Phi_{10} = \tilde{\Delta}(0, 1, 1, 1)$, $\Phi_{11} \cup \Phi_{12} = \tilde{\Delta}(1, 0, 0, 0)$, $\Phi_{13} = \tilde{\Delta}(2, 0, 0, 0)$, $\Phi_{14} = \tilde{\Delta}(1, 1, 1, 0)$, $\Phi_{15} =$

$= \tilde{\Delta}(1, 1, 0, 0)$. *Ненулевые коэффициенты проекций* $\alpha_j^i = q(\Phi_j, \Gamma_i)$ *вычисляются по формулам:* $\alpha_1^1 = 2q^5$, $\alpha_2^1 = \alpha_3^1 = q^5(q-1)/2$, $\alpha_{13}^1 = q-1$, $\alpha_{14}^1 = 2q^2(q+1)$, $\alpha_{15}^1 = q^2(q-1)$; $\alpha_1^2 = 2q^3$, $\alpha_4^2 = \alpha_5^2 = q^3(q^2-1)$, $\alpha_6^2 = q^4 \times \times (q^2-1)/2$, $\alpha_7^2 = q^4(q-1)^2/2$, $\alpha_{10}^2 = q^3(q+1)$, $\alpha_{11}^2 = q(q-1)^2/2$, $\alpha_{12}^2 = q \times \times (q^2-1)/2$, $\alpha_{14}^2 = q+1$, $\alpha_{15}^2 = 2(q^2-1)$; $\alpha_1^3 = 2(q^2+q+1)$, $\alpha_2^3 = \alpha_3^3 = = q^3-1$, $\alpha_4^3 = \alpha_5^3 = (q^3-1)(q+1)/2$, $\alpha_6^3 = q(q^3-1)(q+1)$, $\alpha_7^3 = q(q^3-1) \times \times (q-1)$, $\alpha_8^3 = \alpha_9^3 = q^2(q^3-1)(q-1)/2$.

Доказательство. Пусть $(V, W) \in \Gamma_{3-k-l}$. Число 3-орбит, лежащих в $\Delta(k, l, m, n)$, равно числу орбит $PSp_6(q)_{VW}$ на множестве $\{X \in \in N_3 \mid \dim X \cap V \cap W = k, \dim X \cap V = k+m, \dim X \cap W = k+n\}$. Таким образом, можно установить, на сколько симметризованных 3-орбит распадается каждое из отношений $\tilde{\Delta}(k, l, m, n)$. Пусть $(V, W, X) \in \Phi_j$, $(V, W) \in \Gamma_i$. Коэффициент проекции α_j^i отношения Φ_j на Γ_i равен $[PSp_6(q)_{VW} : PSp_6(q)_{VWX}]$, если (V, W, X) и (W, V, X) лежат в одной 3-орбите $PSp_6(q)$, и $2[PSp_6(q)_{VW} : PSp_6(q)_{VWX}]$ в противном случае.

В качестве примера рассмотрим $\tilde{\Delta}(0, 1, 0, 0)$. Положим $V = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$, $W = \langle n_1, m_2, m_3 \rangle$. Подстановка $h \in PSp_6(q)_V$ задается матрицей вида $\begin{pmatrix} A^t & 0 \\ BA^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix}$, где $A \in GL_3(q)$, B — симметрическая матрица. Если h фиксирует W, то нетрудно убедиться, что $A = \left(\begin{array}{c|c} * & 0\ 0 \\ \hline * & A_1 \\ * & \end{array}\right)$, $B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|PSp_6(q)_{VW}| = q^6(q-1)^3(q+1)$. Пусть $X \in N_3$, $X \cap V = 0$. Тогда в X можно выбрать (единственным образом) базис вида $l_i = m_i + \beta_{i1}n_1 + \beta_{i2}n_2 + + \beta_{i3}n_3$, $i = 1, 2, 3$, причем матрица $C = (\beta_{ij})$ — симметрическая (так как $f(l_i, l_j) = 0$). Если потребовать $X \cap W = 0$, то получим $\begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Подстановка h переводит X в $X' = \langle m_i + \beta_{i1}n_1 + \beta_{i2}n_2 + \beta_{i3}n_3, \quad i = 1, 2, 3 \rangle$, $C' = A(B+C)A^t$. Матрицу B можно подобрать таким образом, что $B + + C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ 0 \\ \hline 0 & C_1 \\ 0 & \end{array}\right)$. Тогда $C' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ 0 \\ \hline 0 & C_1 \\ 0 & \end{array}\right)$, $C_1' = A_1 C_1 A_1^t$, т. е. C_1 изменяется как матрица билинейной формы. Известно, что над $\mathbf{F}_q$, $\operatorname{char} \mathbf{F}_q \neq 2$, существует два класса невырожденных симметрических билинейных форм, $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}$ — матрицы их представителей (g — квадратичный невычет $\mathbf{F}_q$). Следовательно, при надлежащем выборе $h \in PSp_6(q)_{VW}$ $X^h = Y_i = \langle m_1, m_2 + n_2, m_3 + \gamma n_3 \rangle$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = D_i$. Таким образом, $PSp_6(q)_{VW}$ имеет на множестве $\{X \mid X \cap V = X \cap W = 0\}$ две орбиты. Соответственно $\tilde{\Delta}(0, 1, 0, 0)$ распадается на две симметризованные 3-орбиты $PSp_6(q)$ Φ_6 и Φ_7. Если $Y_i^h = Y_i$, $h \in PSp_6(q)_{VW}$, то $B = 0$, $A_1 D_i A_1^t = D_i$, т. е. $A_1 \in O_2(q, D_i) = = \{U \in GL_2(q) \mid U D_i U^t = D_i\}$. Следовательно,

$$\alpha_6^2 = [PSp_6(q)_{VW} : PSp_6(q)_{VWY_1}] = |PSp_6(q)_{VW}|/q^2(q-1)|O_2(q, D_1)| =$$
$$= q^6(q-1)^3(q+1)/2q^2(q-1)^2 = q^4(q^2-1)/2,$$
$$\alpha_7^2 = q^6(q-1)^3(q+1)/2q^2(q-1)(q+1) = q^4(q-1)^2/2.$$

Аналогично

$$\alpha_6^3 = 2[PSp_6(q)_{VY_1} : PSp_6(q)_{VWY_1}] = q^3(q^3-1)(q^2-1)(q-1)/q^2(q-1)^2 =$$
$$= q(q^3-1)(q+1), \quad \alpha_7^3 = q^3(q^3-1)(q^2-1)(q-1)/q^2(q^2-1) = q(q^3-1)(q-1).$$

Таким же способом изучаются остальные отношения $\tilde{\Delta}(k, l, m, n)$.

С л е д с т в и е 1. *Группа автоморфизмов любого нетривиального инвариантного 2-отношения* Ψ *группы* $(\mathrm{PSp}_6(q),\ N_3)$ *равна* $\mathrm{P\Gamma Sp}_6(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что отношение соседства Γ_1 инвариантно относительно группы $H = \mathrm{Aut}\ \Psi$. Тогда, по теореме Чоу [5, гл. IV, § 3], $H \leqslant \mathrm{Aut}\ \Gamma_1 = \mathrm{P\Gamma Sp}_6(q)$. Группа $(\mathrm{PSp}_6(q),\ N_3)$ имеет три 2-орбиты. Поэтому Ψ или $\bar{\Psi}$ совпадает с Γ_i. Если $\Psi = \Gamma_2$, то отношение $\Omega_1 = \{(X,\ Y,\ Z) \in N_3^3 \mid (X,\ Y) \in \Gamma_2,\ (Y,\ Z) \in \Gamma_2,\ (Z,\ X) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}$ инвариантно относительно H. Рассмотрим симметризацию отношения $\Omega_1 : \tilde{\Omega}_1 = \Delta(1,\ 1,\ 0,\ 0) \cup \Delta(0,\ 1,\ 1,\ 0) = \Phi_{15} \cup \Phi_4 \cup \Phi_5$. Пользуясь леммой 1, получаем:

$$q(\tilde{\Omega}_1,\ \Gamma_1) = \alpha_{15}^1 + \alpha_4^1 + \alpha_5^1 = q^2(q-1),\quad q(\tilde{\Omega}_1,\ \Gamma_3) = \alpha_{15}^3 + \alpha_4^3 + \alpha_5^3 = (q^3-1)(q+1).$$

Итак, $q(\tilde{\Omega}_1,\ \Gamma_1) \neq q(\tilde{\Omega}_1,\ \Gamma_3)$, поэтому Γ_1 и Γ_3 — различные 2-орбиты H. Если $\Psi = \Gamma_3$, $\bar{\Psi} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то отношение $\Omega_2 = \{(X,\ Y,\ Z) \in N_3^3 \mid (X,\ Y),\ (Y,\ Z),\ (Z,\ X) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\} = \Delta(1,\ 1,\ 1,\ 0) \cup \Delta(1,\ 1,\ 0,\ 0) \cup \Delta(1,\ 0,\ 0,\ 0) \cup \Delta(0,\ 1,\ 1,\ 1) = \Phi_{13} \cup \Phi_{14} \cup \Phi_{15} \cup \Phi_{10} \cup \Phi_{11} \cup \Phi_{12}$ инвариантно относительно H, $q(\Omega_2,\ \Gamma_1) = 3q^3 + q^2 + q - 1$, $q(\Omega_2,\ \Gamma_2) = q^4 + 2q^3 + q^2 + q - 1$. И в этом случае Γ_1 — 2-орбита группы H.

Рассмотрим группу P, задаваемую матрицами вида $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$, где A—симметрическая матрица порядка 3. P — элементарная абелева и имеет порядок q^6. Геометрически это группа всех симплектических преобразований, оставляющих на месте каждый вектор подпространства $V = \langle n_1,\ n_2,\ n_3 \rangle$. Нам необходимо изучить свойства группы P и ее нормализатора. Для подпространства $U \subset V$ множество $B_U = \{W \in N_3 \mid W \cap V = U\}$ есть блок транзитивности P. Если $W_1,\ W_2 \in B_U$, то существует изометрия $\tau : W_1 + V \to W_2 + V$, переводящая W_1 в W_2, ограничение которой на V есть тождественное отображение. По теореме Витта τ можно продолжить до преобразования, соответствующего подстановке из P. Следовательно, множества B_U являются орбитами группы P. Группа $N_{\mathrm{PSp}_6(q)}(P) = \mathrm{PSp}_6(q)_V$ имеет 4 орбиты: $C_0 = \{V\}$, $C_1 = \{X \in N_3 \mid \dim X \cap V = 2\}$, $C_2 = \{X \in N_3 \mid \dim X \cap V = 1\}$, $C_3 = \{X \in N_3 \mid X \cap V = 0\}$, они соответствуют бинарным орбитам $\mathrm{PSp}_6(q)$.

Вычислим мощности множеств B_U. Если $\dim U = 3$, то $|B_U| = |\{V\}| = 1$. Орбиты B_U, $\dim U = 2$, равномощны. Группа P_W, $W = \langle n_1,\ n_2,\ m_3 \rangle$, задается матрицами вида $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $|B_U| = [P : P_W] = q$. Число таких орбит равно $q^2 + q + 1$. Пусть $\dim U = 1$. Тогда P_W, $W = \langle n_1,\ m_2,\ m_3 \rangle$, задается матрицами $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. $|B_U| = q^3$ и таких орбит $q^2 + q + 1$. Если $U = 0$, $W = \langle m_1,\ m_2,\ m_3 \rangle$, то $P_W = 1$ и $|B_0| = q^6$. Сложив мощности всех орбит, получим: $|N_3| = 1 + (1 + q + q^2)q + (1 + q + q^2)q^3 + q^6 = (1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)$.

В дальнейшем одномерные и двумерные подпространства V будем называть точками и прямыми проективной плоскости $P(V)$; множество прямых $P(V)$ обозначим $P^2(V)$. Действие $N_{\mathrm{PSp}_6(q)}(p)$ на блоке C_1 импримитивно, множества B_l, $l \in P^2(V)$, образуют систему импримитивности. По теореме Витта любое линейное преобразование V может быть продолжено до симплектического преобразования E. Поэтому $N_{\mathrm{PSp}_6(q)}(P) = \mathrm{PSp}_6(q)_V$ переставляет $P^2(V)$, а с ними и блоки B_l, подобно $(\mathrm{PGL}_3(q),\ P^2(V))$.

Следующая лемма носит технический характер, в ней собраны необходимые сведения о действии P на блоке C_1.

Л е м м а 2. (I) *Пусть* $a,\ b,\ c \in P^2(V)$ *не пересекаются в одной точке,* $D_1 = B_a \cup B_b \cup B_c$. *Тогда* $P_{(D_1)}$ *транзитивна на* B_l, $l \in P^2(V) - \{a,\ b,\ c\}$.

(II) *Пусть* $a,\ b,\ c,\ d \in P^2(V)$ *и никакие три из них не пересекаются в одной точке,* $D_2 = B_a \cup B_b \cup B_c \cup B_d$. *Тогда* $|P_{(D_2)}| = q^2$ *и* $P_{(D_2)}$ *транзитивна на* B_l, $l \in P^2(V) - \{a,\ b,\ c,\ d\}$.

(III) *Пусть* $a, b, c, d \in P^2(V)$ *пересекаются в одной точке*, $D_3 = B_a \cup B_b \cup B_c \cup B_d$. *Тогда* $|P_{(D_3)}| = q^3$.

(IV) *Пусть* $a_1, a_2, a_3 \in P^2(V)$, X, Y, Z — *три различные точки их попарных пересечений и* a_4, a_5, a_6 — *прямые, проходящие через* X, Y, Z *соответственно*, $D_4 = \bigcup_{i=1}^{6} B_{a_i}$. *Тогда* $P_{(D_4)} = 1$.

Доказательство. Сначала докажем (II) для $a = \langle n_1, n_2\rangle$, $b = \langle n_2, n_3\rangle$, $c = \langle n_3, n_1\rangle$, $d = \langle n_1 - n_2, n_2 - n_3\rangle$. Выберем $W_1 = \langle n_1, n_2, m_3\rangle \in B_a$, $W_2 = \langle m_1, n_2, n_3\rangle \in B_b$, $W_3 = \langle n_1, m_2, n_3\rangle \in B_c$, $W_4 = \langle n_1 - n_2, n_2 - n_3, m_1 + m_2 + m_3\rangle \in B_d$.

Группа P абелева, она регулярна на своих орбитах, поэтому $P_{W_1W_2W_3W}$ совпадает с $P_{(D_2)}$. Легко проверить, что подстановка $g \in P$ оставляет на месте точки W_1, W_2, W_3, W_4 тогда и только тогда, когда соответствующая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I\end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0\end{pmatrix}$, $x + y + z = 0$. В частности, $|P_{(D_2)}| = q^2$. Пусть $l = \langle n_1, n_3 - \alpha n_2\rangle$ — прямая, проходящая через точку $\langle n_1\rangle$, $W = \langle n_1, n_3 - \alpha n_2, m_2 + \alpha m_3\rangle \in B_l$. Если $W^g = W$, то $g(m_2 + \alpha m_3) = m_2 + \alpha m_3 + n_1(x + \alpha y) + 2(n_3 - \alpha n_1) + 2z\alpha n_2$. Так как $2\alpha z n_2 = 0$, то $z = 0$. Значит, $[P_{(D_2)} : P_{(D_2 \cup B_l)}] = q$ и $P_{(D_2)}$ транзитивно на B_l. Если l не проходит через $\langle n_1\rangle$, то $l = \langle n_2 - \beta n_1, n_3 - \gamma n_1\rangle$ для некоторых $\beta, \gamma \in \mathbf{F}_q$. Аналогичными рассуждениями легко проверить, что фиксатор точки $W = \langle n_2 - \beta n_1, n_3 - \gamma n_1, m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3\rangle$ имеет в $P_{(D_2)}$ индекс q, т. е. $P_{(D_2)}$ транзитивна на B_l.

Пусть теперь a_1, b_1, c_1, d_1 — произвольная четверка прямых, никакие три из них не проходят через одну точку. Так как $N_{\mathrm{PSp}_6(q)}(P)$ действует на множестве $\{B_l, l \in P^2(V)\}$ подобно $(\mathrm{PGL}_3(q), P^2(V))$, то существует подстановка $h \in N_{\mathrm{PSp}_6(q)}(P)$, которая переводит блоки B_a, B_b, B_c, B_d в $B_{a_1}, B_{b_1}, B_{c_1}, B_{d_1}$ соответственно. Тогда группа $h^{-1}Ph$ — фиксатор множества $B_{a_1} \cup B_{b_1} \cup B_{c_1} \cup B_{d_1}$, и утверждение (II) в этом случае справедливо.

(I) следует из (II). $P_{(D_1)}$ транзитивна на B_l, $l \in P^2(V) - \{a, b, c, d\}$ и на B_d, так как $[P_{(D_1)} : P_{(D_2)}] = q$.

(III), как и (II), достаточно доказать для конкретной тройки прямых a, b, c. Пусть $a = \langle n_1, n_2\rangle$, $b = \langle n_1, n_3\rangle$, $c = \langle n_1, n_2 - n_3\rangle$. Подстановка $g \in P$ фиксирует множество $B_a \cup B_b \cup B_c$, если и только если соответствующая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Очевидно, что g фиксирует блоки B_d, $d \in \langle n_1\rangle$, и $|P_{(D_3)}| = q^3$.

Для доказательства (IV) выберем $a_1 = \langle n_1, n_2\rangle$, $a_2 = \langle n_2, n_3\rangle$, $a_3 = \langle n_3, n_1\rangle$. Фиксатор множества $B_{a_1} \cup B_{a_2} \cup B_{a_3}$ состоит из подстановок вида $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I\end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0\end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbf{F}_q$. Если $a_4 = \langle n_1, n_2 - \alpha n_3\rangle$ проходит через точку $\langle n_1\rangle$, то g фиксирует B_{a_4} тогда и только тогда, когда $z = 0$. Аналогично, если g фиксирует B_{a_5} и B_{a_6}, то $y = x = 0$ и $P_{(D_4)} = 1$.

3. Пусть (H, N_3) — группа подстановок, содержащая $(\mathrm{PSp}_6(q), N_3)$, но не содержащая $A(N_3)$. Если H не 2-транзитивна, то, по следствию 1, она содержится в $\mathrm{P\Gamma Sp}_6(q)$ и теорема справедлива. Начиная с этого места будем считать, что H 2-транзитивна.

Лемма 3. *$N_H(P)$ действует точно на блоке C_3 при $q > 3$.*

Доказательство. Если 2-транзитивная группа подстановок (G, W) отлична от знакопеременной или симметрической групп, то, согласно оценкам Бохерта (см. [6]), любая подстановка из G передвигает не менее $(|W| - 2|W|)/3$ точек. Пусть $N_H(P)_{(C_3)} \neq 1$. Тогда $g \in N_H(P)_{(C_3)}$, $g \neq 1$ имеет не менее $|C_3 + \{V\}| = q^6 + 1$ неподвижных точек и передвигает не более $|N_3| - q^6 - 1$ точек. При $q > 3$ это приводит к противоречию. Следовательно, $N_H(P)_{(C_3)} = 1$ при $q > 3$.

Далее будем предполагать, что $q > 3$.

Следствие 2. $C_H(P) = P$.

Доказательство. Так как P регулярна на C_3, то действия $C_H(P)$ и P на C_3 совпадают. По предыдущей лемме $C_H(P)$ действует точно на C_3. Следовательно, $C_H(P) = P$.

Следствие 3. *Пусть D_4 такое, как в формулировке леммы 2 (IV), и $D_4 \subset M \subset C_1$. Тогда $N_H(P)_{\{M\}}$ действует точно на M. В частности, $N_H(P)$ действует точно на C_1.*

Доказательство. $N_H(P)_{(M)} \cap P \leqslant P_{(D_4)} = 1$ (лемма 2 (IV)), $N_H(P)_{(M)}$ и P — нормальные делители в $N_H(P)_{\{M\}}$ и, следовательно, $N_H(P)_{(M)}$ централизует P. Из предыдущего следствия получаем: $N_H(P)_{(M)} \leqslant P_{(M)} = 1$.

Лемма 4. *$N_H(P)$ переставляет блоки B_l, $l \in P^2(V)$, подобно подгруппе* $(\mathrm{P\Gamma L}_3(q), P^2(V))$.

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — прямые, пересекающиеся в одной точке, а b_1, b_2, b_3, b_4 — четверка прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, $D_3 = B_{a_1} \cup B_{a_2} \cup B_{a_3} \cup B_{a_4}$, $D_2 = B_{b_1} \cup B_{b_2} \cup B_{b_3} \cup B_{b_4}$. По лемме 2 $|P_{(D_2)}| = q^2$, $|P_{(D_3)}| = q^3$. Следовательно, подстановка $g \in N_H(P)$ не может перевести $(B_{a_1}, B_{a_2}, B_{a_3}, B_{a_4})$ в $(B_{b_1}, B_{b_2}, B_{b_3}, B_{b_4})$, и $N_H(P)$ действует на $\{B_l, l \in P^2(V)\}$ не 4-транзитивно. Согласно [2], любая надгруппа $(\mathrm{PGL}_3(q), P^2(V))$ либо содержится в $\mathrm{P\Gamma L}_3(q)$, либо содержит $A(P^2(V))$ и является q^2+q-1-транзитивной. Последнее, как показано, невозможно.

Лемма 5. *Пусть a, b, c — прямые общего положения в $P(V)$ и $P_1 = P_{(B_a \cup B_b \cup B_c)}$. Тогда $C_H(P_1) = P$.*

Доказательство. Рассмотрим группу $Q = C_H(P_1) \cap N_H(P)$. A, B, C — точки попарных пересечений прямых a, b, c. Пусть l — прямая, не проходящая через точки A, B, C. По лемме 2 $M_1 = B_a \cup B_b \cup B_c$ и $M_2 = B_a \cup B_b \cup B_c \cup B_l$ суть множества неподвижных точек групп P_1 и $P_{1(B_l)}$. Q централизует P и $P_{(B_l)}$ и, следовательно, стабилизирует $B_l = M_1 - M_2$. Если $q > 3$, то число прямых, не проходящих через точки A, B, C, равно $q^2+q+1-3q > 15$, и среди них можно найти шестерку прямых $l_1, \ldots, l_6$, удовлетворяющих условию леммы 2 (IV). На каждой B_{l_i} P_1 действует регулярно. Следовательно, действие Q на B_{l_i} также регулярно и совпадает с действием P_1. Согласно следствию 3, Q действует точно на $\bigcup_{i=1}^{6} B_{l_i}$. Итак, Q есть подгруппа прямого произведения шести групп порядка q. С другой стороны, $Q \geqslant P$, $|P| = q^6$. Следовательно, $Q = P$. В [7] доказано, что если X — группа подстановок, Y — ее абелева регулярная p-подгруппа и $N_X(Y) = Y$, то $Y = X$.

Мы доказали, что $N_{C_H(P_1)}(P) = P$. Следовательно, $C_H(P_1) = P$.

Следствие 4. *Пусть $a = \langle n_1, n_2 \rangle$, $b = \langle n_2, n_3 \rangle$, $c = \langle n_3, n_1 \rangle$, $B = B_a \cup B_b \cup B_c$ и $S = \mathrm{Syl}_p(N_H(P))$. Тогда $S_{(B)} = P_{(B)}$.*

Доказательство. По лемме 4 S действует на $\{B_l, l \in P^2(V)\}$, как $UT_3(q) \leftthreetimes A$, $A \leqslant \mathrm{Aut}\, \mathbf{F}_q$. $S_{(B)}$ фиксирует прямые a, b, c, и каждая подстановка $g \in S_{(B)}$ переставляет блоки B_l, $l \in P^2(V)$, как коллинеация u пространства $P(V)$, задаваемая матрицей I и автоморфизмом поля $\mathbf{F}_q$. Коллинеация u оставляет на месте прямые $a_1 = \langle n_1, n_2 + n_3 \rangle$, $b_1 = \langle n_2, n_1 + n_3 \rangle$, $c_1 = \langle n_3, n_1 - n_2 \rangle$. Следовательно, g стабилизирует $B_1 = B_{a_1} \cup B_{b_1} \cup B_{c_1}$. Обозначим $P_1 = P_{(B_1)}$; P и $S_{(B)}$ — нормальные делители в $S_{\{B\}}$. Кроме того, $P_1 \cap S_{(B)} = P_{(B \cup B_1)} = 1$ (по лемме 2 (IV)). Следовательно, $S_{(B)}$ централизует P_1 и $S_{(B)} \leqslant P$.

Лемма 6. *Группа (H, N_3) не 3-транзитивна.*

Доказательство. Докажем, что для двух 3-точек (X_1, X_2, X_3) и (Y_1, Y_2, Y_3) группы $\mathrm{Syl}_p H_{X_1X_2X_3}$ и $\mathrm{Syl}_p H_{Y_1Y_2Y_3}$ не подобны. Тогда $H_{X_1X_2X_3}$ и $H_{Y_1Y_2Y_3}$ не могут быть сопряжены в H и данные 3-точки лежат в разных 3-орбитах.

Пусть $a_1 = \langle n_1, n_2 \rangle$, $a_2 = \langle n_2, n_3 \rangle$, $a_3 = \langle n_3, n_1 \rangle$, $X_i \in B_{a_i}$, $B = \{V\} \cup B_{a_1} \cup B_{a_2} \cup B_{a_3}$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу S в $N_H(P)_{X_1X_2X_3}$. Множества $\{V\}$, $\{X_i\}$, $B_{a_i} - \{X_i\}$ являются блоками группы S, и длина каждого из них меньше q. С другой стороны, $S > P_1 = P_{(B)}$, и по лемме 2 (I) все остальные орбиты S имеют мощность $\geqslant q$. Следовательно, B есть объединение всех орбит S, длина которых меньше q, $|B| = 3q + 1$. Если $g \in N_H(S)$, то g оставляет инвариантным B и нормализует $S_{(B)}$. Согласно следствию 4, $S_{(B)} = P_{(B)} = P_1$. Следовательно, g нормализует $C_H(P_1) = P$ (лемма 4) и $N_H(S) \leqslant N_H(P)$. Докажем, что S—силовская в $H_{X_1X_2X_3}$. Пусть это не так. Тогда существует p-группа S' такая, что $S' \rhd S$, т. е. $S' < N_H(S) \leqslant N_H(P)$. Но это невозможно, так как S — максимальная p-группа в $N_H(N)_{X_1X_2X_3}$. Следовательно, у группы $S = \mathrm{Syl}_p H_{X_1X_2X_3}$ общая длина орбит, которые меньше q, равна $3q+1$. Возьмем $Y_i \in B_{a_1}$, $i = 1, 2, 3$. $\mathrm{Syl}_p H_{Y_1Y_1Y_3} > P(B_{a_1})$, и все орбиты, лежащие в множестве $N_3 - (B_{a_1} \cup \cup \{V\})$, имеют длину $\geqslant q$. Следовательно, группы $H_{X_1X_2X_3}$ и $H_{Y_1Y_2Y_3}$ не подобны.

Доказательство теоремы. Группа H не 3-транзитивна и имеет нетривиальное инвариантное 3-отношение Ψ. По предположению H 2-транзитивна и коэффициенты проекций отношения Ψ на бинарные орбиты $\mathrm{PSp}_6(q)$, Γ_1, Γ_2, Γ_3 должны быть равны. В качестве Ψ выберем дополнение к 3-орбите H, содержащей Φ_{11}. Так как Φ_{11} — симметрическое, то Ψ тоже симметрическое и представляет собой объединение симметризованных 3-орбит группы $\mathrm{PSp}_6(q)$. Коэффициент проекции Ψ на орбиту Γ_i есть сумма коэффициентов $\Phi_j \subset \Psi$ на Γ_i. Значения $q(\Phi_j, \Gamma_i) = \alpha_j^i$ указаны в лемме 1. Так как $\Psi \not\supset \Phi_{11}$, то $q(\Psi, \Gamma_1)$, а значит, и $q(\Psi, \Gamma_2)$ делятся на q^2. Легко видеть, что тогда Φ_{12}, Φ_{13}, Φ_{14}, Φ_{15} не могут содержаться в Ψ. Далее, α_j^3 все делятся на $q^2 + q + 1$, в то время как $q(\Psi, \Gamma_1)$ не может делиться на $q^2 + q + 1$. Следовательно, предположение о 2-транзитивности H неверно, и согласно следствию 1 $H \leqslant \mathrm{P\Gamma Sp}_6(q)$.

1. *Kantor W. M.* 2-transitive designs.— Math. Centre Tracts, 1974, N 57, p. 44—97.
2. *Kantor W. M., McDonough.* The maximality of $\mathrm{PSL}_n(q)$, $n \geqslant 3$.— J. London. Math. Soc., 1974, **8**, N 3, p. 426.
3. *Устименко-Бакумовский В. А.* Максимальность группы $\mathrm{P\Gamma L}_n(q)$, действующей на подпространствах размерности m.— Докл. АН СССР, 1978, **240**, № 6, с. 1305—1308.
4. *Ждан-Пушкин В. В.* Решетки надгрупп $\mathrm{PU}_n(q)$, действующих на изотропных прямых.— В кн.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль : Ярослав. гос. ун-т, 1981, с. 38—48.
5. *Дьедоне Ж.* Геометрия классических групп.— М. : Мир, 1974.— 204 с.
6. *Wielandt H.* Finite permutation groups.— New York, Academic Press, 1964.— 114 p.
7. *Bhattacharya P.* On the normaliser of a group in the Cayley represantation.—Bull. Austral. Math. Soc., 1982, **25**, N 1, p. 81—84.

Киев. гос. ун-т

Поступила 16.06.83,
после доработки — 10.04.84.