УДК 517.574

О. В. Веселовская

Аналог теоремы Майлза для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций

1. Введение. Функция w со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ называется δ-субгармонической в $\mathbb{R}^m$ [1], если существуют субгармонические в $\mathbb{R}^m$ функции u и v такие, что функция w определена на множестве G точек из $\mathbb{R}^m$, в которых хотя бы одна из функций u, v конечна, и равенство $w = u - v$ в смысле $\overline{\mathbb{R}}$ имеет место всюду на G.

Всюду далее $m \geqslant 3$. Пусть μ — произвольное распределение масс в $\mathbb{R}^m$. Положим

$$N(r, \mu) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{n(t, \mu)}{t^{m-1}}\, dt, \tag{1}$$

где $n(t, \mu) = \int\limits_{|\tau| \leqslant t} d\mu(\tau)$.

Через S^m обозначим единичную сферу в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат, через ω_m — площадь ее поверхности.

Пусть μ_w — мера, ассоциированная по Риссу с функцией w [1], а

$$\mu_w = \mu_w^+ - \mu_w^- \tag{2}$$

ее разложение Жордана [2, с. 482]. Функция

$$T(r, w) = \frac{1}{\omega_m}\int\limits_{S^m} w^+(r\eta)\, dS(\eta) + N(r, \mu_w^-), \quad 0 \notin \operatorname{supp}\mu_w,$$

называется характеристикой Неванлинны δ-субгармонической в $\mathbb{R}^m$ функции w.

Пусть λ — положительная, непрерывная, неубывающая на $]0, \infty[$ функция, называемая функцией роста.

Известно [3], что δ-субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция w, $w(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu_w$, называется функцией конечного λ-типа, если существуют постоянные A, B такие, что $T(r, w) \leqslant A\lambda(Br)$ для всех $r > 0$. Класс таких функций обозначается через Λ_δ, а подкласс субгармонических функций из Λ_δ — через Λ_s.

Классы Λ_δ для $m = 2$ введены в [4]. Они обобщают аналогичные классы мероморфных функций конечного λ-типа, введенные в [5]. В [6] показано, что каждая мероморфная функция конечного λ-типа может быть представлена в виде частного двух целых функций конечного λ-типа. Основная цель данной работы — установление аналога этого утверждения для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, функций конечного λ-типа.

Согласно изложенному в [3], распределение масс μ в $\mathbb{R}^m$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, имеет конечную λ-плотность, если существуют постоянные A, B такие, что $N(r, \mu) \leqslant A\lambda(Br)$ для всех $r > 0$.

Обозначим через P_k^ν многочлены Гегенбауэра [7, с. 175] степени k и порядка $\nu = (m-2)/2$, через (x, y) — скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^m$. Распределение масс μ в $\mathbb{R}^m$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, называется λ-допустимым, если найдутся постоянные A, B и l такие, что неравенство

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\leqslant r_2} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+2\nu}} \right| \leqslant A(k+1)^l \left[\frac{\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(Br_2)}{r_2^k}\right] \quad (3)$$

выполняется для всех $r_1, r_2 > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in S^m$.

2. Аналог теоремы Майлза. Через $\Lambda_s - \Lambda_s$ обозначим множество элементов $\{u - v\}$, где $u, v \in \Lambda_s$.

Теорема 1. *Классы Λ_δ и $\Lambda_s - \Lambda_s$ совпадают, т. е. $\Lambda_\delta = \Lambda_s - \Lambda_s$.*

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме. Напомним, что распределение масс μ в $\mathbb{R}^m$ называется сосредоточенным на множестве X, если $\mu(CX) = 0$, а распределения масс μ_1 и μ_2 в $\mathbb{R}^m$ называются дизъюнктными, если существуют два непересекающиеся множества из $\mathbb{R}^m$, на которых сосредоточены соответственно распределения масс μ_1 и μ_2 [2, с. 589].

Лемма. *Если распределение масс μ имеет конечную λ-плотнссть, то существует распределение масс μ', сосредоточенное на системе сфер $\{\zeta \in \mathbb{R}^m : |\zeta| = a^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$, такое, что распределение масс $\mu + \mu'$ является λ-допустимым.*

Доказательство. Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Пусть

$$\sigma_n = \{y \in \mathbb{R}^m : a^n < |y| \leqslant a^{n+1}\},\quad S_n = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = a^{n-1}\},\quad \Omega = \bigcup_n S_n. \quad (4)$$

Выбираем распределение масс μ' сосредоточенным на Ω и таким, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{\sigma_n} P_k^\nu[(x, y/|y|)]\, d\mu(y)/|y|^{k+2\nu} + \int\limits_{S_n} P_k^\nu[(x, y/|y|)]\, d\mu'(y)/|y|^{k+2\nu} = 0 \quad (5)$$

при всех $x \in S^m$, $k \in \mathbb{N}$. Перейдем к построению такого распределения масс.

Для произвольного множества $E \subset S_n$ положим

$$\mu'(E) = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{E^*} f_n(\xi)\, dS(\xi), \quad (6)$$

где $E^* = \{\xi \in S^m : e = |e|\,\xi,\ e \in E\}$ — измеримое множество из единичной сферы, а функцию f_n будем задавать рядом Фурье — Лапласа [8] $f_n(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} Y^{(i)}(\xi; f_n)$, $\xi \in S^m$, где

$$Y^{(i)}(\xi; f_n) = \frac{\Gamma(\nu)(i+\nu)}{2\pi^{\nu+1}} \int\limits_{S^m} P_i^\nu[(\xi, \eta)]\, f_n(\eta)\, dS(\eta).$$

Согласно соотношению (5) должно выполняться

$$f_n(\xi) = Y^{(0)}(\xi; f_n) - \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{i+\nu}{\nu} P_i^\nu\left[\left(\xi, \frac{y}{|y|}\right)\right] \left(\frac{a^{n-1}}{|y|}\right)^{i+2\nu} d\mu(y). \quad (7)$$

Потребуем, кроме того, выполнения условия

$$Y^{(0)}(\xi; f_n) = c_\nu\, \mu(\sigma_n), \quad (8)$$

где выбор положительной постоянной c_ν будет сделан позже.

Поскольку

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\sigma_n}\frac{i+\nu}{\nu}P_i^{\nu}\left[\left(\xi,\frac{y}{|y|}\right)\right]\left(\frac{a^{n-1}}{|y|}\right)^{i+2\nu}d\mu(y)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\sigma_n}\frac{i+\nu}{\nu}P_i^{\nu}(1)\left(\frac{a^{n-1}}{|y|}\right)^{i+2\nu}d\mu(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a^n}^{a^{n+1}}\frac{i+\nu}{\nu}P_i^{\nu}(1)\times$$

$$\times\left(\frac{a^{n-1}}{t}\right)^{i+2\nu}dn(t,\mu)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i+\nu}{\nu}P_i^{\nu}(1)\left(\frac{1}{a}\right)^{i+2\nu}\mu(\sigma_n)$$

и (см. [7, с. 176])

$$P_i^{\nu}(1)=(i+2\nu-1)!/(2\nu-1)!\,i!, \tag{9}$$

то ряд в правой части (7) сходится. Полагая $c_\nu=\sum_{i=1}^{\infty}(i+2\nu-1)!\,(i+\nu)/$ $/[\nu(2\nu-1)!\,i!\,a^{i+2\nu}]$ и учитывая соотношения (8), (7), получаем $f_n(\xi)\geqslant 0$.

Обозначим $\mu'(S_n)=L_n$. Как следует из равенства (6),

$$L_n=\frac{1}{\omega_m}\int_{S^m}f_n(\xi)\,dS(\xi).$$

Пусть $D\subset\mathbb{R}^m$ — произвольное борелевское множество. Положим $\mu'(D)=\mu'(D\cap\Omega)=\sum_{S_n\subset\Omega}\mu'(D\cap S_n)$, что завершает построение распределения масс μ'.

Рассмотрим распределение масс $\tilde{\mu}=\mu+\mu'$ и покажем, что оно удовлетворяет требованию леммы. Для этого сначала установим конечную λ-плотность данного распределения масс.

Из соотношений (7), (8) и выбора постоянной c_ν следует $f_n(\xi)\leqslant$ $\leqslant 2c_\nu\mu(\sigma_n)$. Отсюда

$$L_n\leqslant 2c_\nu\mu(\sigma_n). \tag{10}$$

Положим $\Omega(R)=\Omega\cap K(0,R)$, $K(0,R)=\{y\in\mathbb{R}^m:|y|\leqslant R\}$. Тогда, ввиду неравенства (10),

$$n(r,\mu')\leqslant\int_{\Omega(a^n)}d\mu'(y)\leqslant\sum_{j=1}^{n+1}2c_\nu\mu(\sigma_j)\leqslant 2c_\nu n(a^{n+2},\mu)\leqslant 2c_\nu n(a^3r,\mu)$$

для $r\in]a^{n-1},a^n]$, откуда

$$N(r,\mu')\leqslant 4\nu c_\nu\int_0^r n(a^3t,\mu)\,dt/t^{2\nu+1}=2c_\nu a^{6\nu}N(a^3r,\mu),$$

а поскольку распределение масс μ имеет конечную λ-плотность, то и распределение масс $\tilde{\mu}$ имеет конечную λ-плотность.

Далее, используя неравенство $n(r,\mu^*)/(2r^{2\nu})\leqslant N(2r,\mu^*)$, получаемое из выражения (1) аналогично [9, с. 50], для произвольного распределения масс μ^* в $\mathbb{R}^m$, $0\notin\operatorname{supp}\mu^*$, находим

$$\int_{|y|\leqslant r}d\mu^*(y)/|y|^{2\nu}\leqslant 3N(2r,\mu^*), \tag{11}$$

беря интеграл в левой части по частям. Отсюда в силу конечной λ-плотности распределения масс $\tilde{\mu}$ следует его λ-допустимость при $k=0$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим случай $a^{n-1} < r_1 \leqslant r_2 \leqslant a^{n+1}$. Из неравенства (11) имеем

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\leqslant r_2} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} \right| \leqslant P_k^\nu(1)\left[\frac{1}{r_1^k} \int\limits_{r_1<|y|\leqslant a^{n+1}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{2\nu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_2^k} \int\limits_{r_2<|y|\leqslant a^{n+1}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{2\nu}}\right] \leqslant 3P_k^\nu(1)\left[\frac{N(2a^2r_1, \tilde{\mu})}{r_1^k} + \frac{N(2a^2r_2, \tilde{\mu})}{r_2^k}\right],$$

а поскольку распределение масс $\tilde{\mu}$ имеет конечную λ-плотность, то, учитывая соотношение (9), приходим к требуемой оценке (3).

Предположим теперь, что $a^q < r_1 \leqslant a^{q+1}$, $a^n < r_2 \leqslant a^{n+1}$, $q < n-1$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\leqslant r_2} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} \right| = \left| \int\limits_{r_1<|y|\leqslant a^{q+1}} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a^{q+1}<|y|\leqslant a^{n+1}} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} - \int\limits_{r_2<|y|\leqslant a^{n+1}} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant P_k^\nu(1)\left[\int\limits_{r_1<|y|\leqslant a^{q+1}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} + \int\limits_{\sigma_{q+1}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} + \int\limits_{S_{n+1}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{S_{n+2}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} + \int\limits_{r_2<|y|\leqslant a^{n+1}} \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}}\right] +$$

$$+ \left| \sum_{p=q+2}^{n} \int\limits_{S_p \cup \sigma_p} P_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\tilde{\mu}(y)}{|y|^{k+2\nu}} \right|,$$

но, ввиду условия (5), последнее слагаемое равно нулю. Поэтому, как и в предыдущем случае, имеет место та же оценка. Это и завершает доказательство леммы.

З а м е ч а н и е. Нетрудно убедиться, что параметр a в лемме всегда можно выбрать так, чтобы $\mu(\Omega) = 0$, где множество Ω определено соотношением (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Включение $\Lambda_s - \Lambda_s \subset \Lambda_\delta$ непосредственно следует из свойств характеристики Неванлинны [1]. Докажем обратное: $\Lambda_\delta \subset \Lambda_s - \Lambda_s$.

Пусть w — произвольная функция из Λ_δ, а распределение масс μ_w^- определено соотношением (2). Поскольку распределение масс μ_w^- имеет конечную λ-плотность [3], то в силу леммы существует распределение масс $\hat{\mu}$ такое, что распределение масс $\mu_w^- + \hat{\mu}$ будет λ-допустимым. На основании теоремы 1 из [3] последнее распределение масс есть распределение масс Рисса некоторой функции v из класса Λ_s.

Рассмотрим функцию $u = w + v$. Очевидно, она является субгармонической и в силу свойств характеристики Неванлинны [1] принадлежит классу Λ_s. Но $w = u - v$, и мы получаем требуемое представление.

С л е д с т в и е. *Линейная оболочка* Λ_s *совпадает с* Λ_δ.

3. О п и с а н и е п о л о ж и т е л ь н ы х (о т р и ц а т е л ь н ы х) в а р и а ц и й м е р Р и с с а ф у н к ц и й и з к л а с с а Λ_δ. В качестве применения теоремы 1 дадим критерий, характеризующий положи-

тельные и отрицательные вариации мер Рисса δ-субгармонических функций конечного λ-типа. Он обобщает аналогичный результат, установленный в [5] для мероморфных функций конечного λ-типа.

Теорема 2. *Для того чтобы распределение масс μ было положительной или отрицательной вариацией меры Рисса некоторой δ-субгармонической функции конечного λ-типа, необходимо и достаточно, чтобы оно имело конечную λ-плотность.*

Доказательство. Заметим, что если μ — положительная вариация меры Рисса функции w, то она является отрицательной вариацией меры Рисса функции $-w$.

Пусть μ — отрицательная вариация некоторой меры μ_w, $w \in \Lambda_\delta$. Тогда из определения неванлинновской характеристики следует, что она имеет конечную λ-плотность.

Для доказательства достаточности применим предыдущую лемму к распределению масс μ. Получим λ-допустимое распределение масс $\mu + \mu'$. Последующее применение леммы к распределению масс μ' приводит нас к распределению масс $\mu' + \mu''$, которое также λ-допустимо. Учитывая замечание, выберем число a в лемме так, чтобы μ и μ'' были дизъюнктными. На основании теоремы 1 из [3] найдутся функции u, v из класса Λ_s такие, что $\mu_u = \mu + \mu'$ и $\mu_v = \mu' + \mu''$. Функция $w = u - v$ по утверждению теоремы 1 принадлежит классу Λ_δ и, кроме того, $\mu_w = \mu - \mu''$. Отсюда в силу дизъюнктности распределений масс μ и μ'' имеем $\mu = \mu_w^+$, где распределение масс μ_w^+ определено соотношением (2).

Для функции $-w$ справедливо $\mu_{-w}^- = \mu$, где μ_{-w}^- — отрицательная часть в разложении Жордана меры μ_{-w}. Теорема доказана.

1. *Arsove M. G.* Functions representable as differences of subharmonic functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, p. 327—365.
2. *Шварц Л.* Анализ.— М. : Мир, 1972.— Т. 1. 824 с.
3. *Кондратюк А. А.* Сферические гармоники и субгармонические функции.— Докл. АН СССР, 1983, **268**, № 3, с. 541—544.
4. *Noverras P.* Extension d'une mèthode de series de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques.— Seminaire P. Lelong, Fac. Sci. Paris, 1965—1966, N 3, p.19—67.
5. *Rubel L. A., Taylor B. A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions.— Bull. Soc. Math. France, 1968, **96**, p. 53—96.
6. *Miles J. B.* Qutient representations of meromorphic functions.— J. d'Analyse Math., 1972, **25**, p. 371—388.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М. : Наука, 1974.— Т. 2. 295 с.
8. *Berens H., Butzer P. L., Pawelke S.* Limitierungs verfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten.— Publs. Res. Inst. Math. Sci., 1968, **A4**, p. 201—268.
9. *Хейман У.* Мероморфные функции.— М. : Мир, 1966.— 287 с.

Львов. политехн. ин-т

Поступила 03.05.83