УДК 517.5+519.21

Г. И. Байдак, М. Ш. Браверман, Ю. И. Петунин

Характеризация Гильбертова пространства $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ в терминах аддитивности меры разброса

Эта работа посвящена изучению характеристических свойств гильбертова пространства $E = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ в классе функциональных банаховых пространств (см. [1, с. 58]), обусловленных аддитивностью показателя $\rho^2(x) = \| x - m(x) \|_E^2$ (меры разброса) для сумм некоррелированных или независимых случайных величин x и y (см. [2, гл. I, XIII]):

$$\delta^2(x + y) = \delta^2(x) + \delta^2(y). \tag{1}$$

Отметим, что свойство аддитивности (1) играет исключительно важную роль при доказательстве эффективности и состоятельности оценок неизвестных параметров случайных процессов.

Лемма 1. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой μ и $x(\omega)$ — измеримая почти всюду ограниченная функция, заданная на Ω; тогда для рекуррентной последовательности $x_{n+1}(\omega) = |x_n(\omega) - \int\limits_\Omega x_n(\omega)\, d\mu(\omega)|$, $n = 1, 2, \ldots$, справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega x_n(\omega)\, d\mu(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{vrai} \sup\limits_{\omega\in\Omega} x_n(\omega) = 0$.

Напомним, что функциональное банахово пространство E называется идеальной банаховой структурой, если из условий $|x(\omega)| \leqslant |y(\omega)|$ почти всюду, где $x(\omega)$ — измеримая функция, а $y(\omega) \in E$, $\omega \in \Omega$, вытекает, что $x(\omega) \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$ [1, с. 59]; мера μ, определенная на $\mathfrak{A}$, называется непрерывной (неатомической), если любое подмножество $e \in \mathfrak{A}$ положительной меры допускает разбиение на два подмножества равной меры [3, с. 37]. Нетрудно доказать, что имеет место такое предложение.

Предложение 1. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной непрерывной мерой μ и F — идеальная банахова структура, состоящая из измеримых функций, определенных на Ω, $e(\omega) \equiv 1 \in E$. Если для всякой конечнозначной функции $x(\omega)$ справедливо равенство $\|x\|_F = \|x\|_{L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)}$, то пространства F и $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ и их нормы совпадают.*

Теорема 1. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной непрерывной мерой μ и E — идеальная банахова структура, состоящая из измеримых функций $x(\omega)$, определенных на Ω, $e(\omega) \equiv 1 \in E$, причем $\|e(\omega)\|_E = 1$. Банахово пространство E является пространством $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ тогда и только тогда, когда для любой функции $x(\omega) \in E$ с нулевым средним значением и произвольной, но фиксированной константы $C \neq 0$ справедливо равенство $\|x + C\|_E^2 = \|x\|_E^2 + |C|^2$.*

Теорема 2. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство с непрерывной нормированной мерой μ и E — идеальная банахова структура, состоящая из измеримых функций $x(\omega)$, определенных на Ω, $e(\omega) \equiv 1 \in E$, причем $\|e(\omega)\|_E = 1$. Банахово пространство E является пространством $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ тогда и только тогда, когда для любых некоррелированных функций $x(\omega)$, $y(\omega)$ из E справедливо равенство*

$$\|x - \mathrm{m}(x) + y - \mathrm{m}(y)\|_E^2 = \|x - \mathrm{m}(x)\|_E^2 + \|y - \mathrm{m}(y)\|_E^2, \tag{2}$$

где $\mathrm{m}(x)$, $\mathrm{m}(y)$ — средние значения x, y.

Замечание 1. Легко видеть, что теорема 2 становится несправедливой, если E — произвольное функциональное банахово пространство.

Замечание 2. Требование непрерывности меры μ в теореме 2 весьма существенно, так как для дискретной меры теорема 2 не имеет места.

Идеальная банахова структура E называется симметричным пространством, если для любых двух случайных величин $x, y \in E$ из условия $\mu\{\omega : x(\omega) < t\} = \mu\{\omega : y(\omega) < t\}$ $\forall t \in R^1$ следует $\|x\|_E = \|y\|_E$. Для симметричного пространства E определяется функция $\varphi_E(t) = \|\chi_e(\omega)\|_E$, где $t = \mu(e)$, $\chi_e(\omega)$ — индикатор множества $e \in \mathfrak{A}$, которая называется фундаментальной [1, с. 137].

Замечание 3. Теорема 2 останется справедливой, если E считать симметричным пространством, а x, y — произвольными дизъюнктными случайными величинами с нулевыми средними значениями.

Перейдем к изучению аддитивности меры разброса $\delta^2(x)$ для независимых случайных величин. Напомним, что случайные величины $x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega), \ldots$ называются независимыми, если $\mu\{\omega : x_1(\omega) < a_1, \ldots, x_n(\omega) < a_n\} = \mu\{\omega : x_1(\omega) < a_1\} \ldots \mu\{\omega : x_n(\omega) < a_n\}$ для любых действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и произвольного натурального n. Докажем сперва одно вспомогательное утверждение, которое обобщает известную теорему Бернштейна [4, с. 130] и представляет поэтому самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть $\{x_i\}$ — последовательность независимых случайных величин, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$, $\mathrm{m}(x_i) = 0$, причем почти при всех ω $|x_i(\omega)| \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $\sigma_i^2 = \mathrm{m}(x_i^2)$, $B_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, $z_n = B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} x_i$ и z — нормальная случайная величина с параметрами $(0, 1)$; E — симметричное банахово пространство, состоящее из случайных величин, заданных на Ω, $\varphi_E(t)$ — фундаментальная функция пространства E. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

$$\text{I. } \inf_n \frac{B_n}{n} > 0; \quad \int_0^\infty \varphi_E(e^{-x^2})\, dx < \infty.$$

$$\text{II. } \lim_{n\to\infty} B_n = \infty; \quad \int_0^\infty \varphi_E(e^{-x})\, dx < \infty.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \|z_n\|_E = \|z\|_E$.

Доказательство теоремы 3 распадается на несколько лемм.

Лемма 2. *В условиях теоремы 3* $\lim_{k\to\infty} \sup_n \|z_n \chi_{\{|z|>k\}}\| = 0$, *где* χ_e — *индикатор множества* e.

Доказательство. Пусть выполнено условие I и $\{x_i\}$ — независимые случайные величины, $|x_i(\omega)| \leqslant C$, $\mathrm{m}(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для всех $u > 0$ и любых наборов вещественных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство Колмогорова — Бернштейна $\mathrm{p}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right| / C \geqslant u \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right] \leqslant 2e^{-u^2/4}$ [5, с. 179]. Применяя это неравенство к нашему случаю, получаем $\mathrm{p}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| / C \geqslant \sqrt{n}\, u\right] \leqslant 2e^{-u^2/4}$. Положим $\delta = \inf_n B_n/n$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{B_n}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = \frac{1}{C\sqrt{n}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \frac{C\sqrt{n}}{\sqrt{B_n}} \leqslant \frac{1}{C\sqrt{n}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \frac{C}{\sqrt{\delta}},$$

поэтому

$$\mathrm{p}\left[\frac{1}{\sqrt{B_n}}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \geqslant x\right] \leqslant \mathrm{p}\left[\frac{1}{C\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \geqslant \frac{\sqrt{\delta}}{C}x\right] \leqslant 2e^{-\delta x^2/4C^2}, \quad x > 0. \tag{3}$$

Для всякого симметричного пространства E справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leqslant a\int_0^\infty \varphi_E(\mathrm{p}[|x| \geqslant t])\,dt, \tag{4}$$

где число a зависит только от E. Воспользуемся очевидным соотношением

$$\mathrm{p}(|z_n\chi_{[|z_n|\geqslant k]}| \geqslant x) = \begin{cases}\mathrm{p}(|z_n| \geqslant k), & 0 < x \leqslant k,\\ \mathrm{p}(|z_n| \geqslant x), & x \geqslant k.\end{cases} \tag{5}$$

Из формул (3), (4) и (5) получаем

$$\|z_n\chi_{[|z_n|\geqslant k]}\|_E \leqslant a\left[k\varphi_E(\mathrm{p}\{|z_n| \geqslant k\}) + \int_k^\infty \varphi_E(\mathrm{p}\{|z_n| \geqslant x\})\,dx\right] \leqslant$$

$$\leqslant a\left[k\varphi_E(2e^{-\delta k^2/4C^2}) + \int_k^\infty \varphi_E(2e^{-\delta x^2/4C^2})\,dx\right].$$

Так как $\int_0^\infty \varphi_E(e^{-x^2})\,dx < \infty$, то правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$, а поскольку она не зависит от n, то в случае I лемма доказана.

Пусть теперь выполнено условие II. Воспользуемся следующими неравенствами (см. [4, с. 73, теорема 17]): пусть существует постоянная H такая, что $|\mathrm{m}(x_k^l)| \leqslant \frac{l!}{2}\sigma_k^2 H^{l-2}$ при всех целых $l \geqslant 2$ (здесь x_k — независимые случайные величины с $\mathrm{m}(x_k) = 0$ и $\mathrm{m}(x^2) = \sigma_k^2 < \infty$); положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$; тогда $\mathrm{p}(S_n \geqslant x) \leqslant e^{-x^2/4B_n}$, если $0 \leqslant x \leqslant B_n/H$, $\mathrm{p}(S_n \geqslant x) \leqslant \leqslant e^{-x/4H}$, если $x \geqslant B_n/H$, $\mathrm{p}(S_n \leqslant -x) \leqslant e^{-x^2/4B_n}$, если $0 \leqslant x \leqslant B_n/H$, $\mathrm{p}(S_n \leqslant -x) \leqslant e^{-x/4H}$, если $x \geqslant B_n/H$. В нашем случае $|x_k| \leqslant C$, поэтому $|\mathrm{m}(x_k^l)| \leqslant \mathrm{m}(|x_k|^l) \leqslant C^{l-2}\mathrm{m}(x_k^2) = \sigma_k^2 C^{l-2}$; следовательно предыдущие неравенства выполняются при $H = C$. Положим $y = x/\sqrt{B_n}$; так как $z_n = = S_n/\sqrt{B_n}$, то из вышеприведенных неравенств получаем

$$\mathrm{p}(|z_n| \geqslant y) \leqslant \begin{cases}2e^{-y^2/4} & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{B_n}\,C,\\ 2e^{-y\sqrt{B_n}/4C} & \text{при } y \geqslant \sqrt{B_n}/C.\end{cases}$$

Заметим, что $\sigma_1 \leqslant C$, поэтому при $y \geqslant 1$ справедливо неравенство $e^{-y^2/4} \leqslant e^{-y/4} \leqslant e^{-y\sigma_1/4C}$; кроме того, если $y > 0$, то $e^{-y\sqrt{B_n}/4C} \leqslant e^{-y\sigma_1/4C}$. Значит при $y \geqslant 1$

$$\mathrm{p}(|z_n| \geqslant y) \leqslant 2e^{-\sigma_1 y/4C}. \tag{6}$$

Таким же способом, как и выше, из соотношений (4), (5) и (6) получаем для $k \geqslant 1$

$$\|z_n\chi_{[|z_n|\geqslant k]}\|_E \leqslant a\left[k\varphi_E(e^{-\sigma_1 y/4C}) + \int_k^\infty \varphi_E(e^{-\sigma_1 y/4C})\,dy\right].$$

Отсюда и из условия $\int_0^\infty \varphi_E(e^{-x})\,dx < \infty$ следует необходимое утверждение. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что в случае II предположение $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \infty$ в доказательстве не используется.

Л е м м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} \|z\chi_{[|z|\geqslant k]}\|_E = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из известного неравенства $\mathrm{p}(|z|\geqslant x) \leqslant 2(\sqrt{2\pi}x)^{-1}e^{-x^2/2}$ и соотношений (4), (5).

Л е м м а 4. *Пусть* $\{u_n\}$ — *последовательность почти всюду равномерно ограниченных случайных величин,* E — *симметричное пространство, причем его фундаментальная функция* $\varphi_E(t)$ *непрерывна в нуле. Пусть* u — *случайная величина и* $F(t) = \mathrm{p}(u < t)$, $F_n(t) = \mathrm{p}(u_n < t)$. *Если* $F_n(t) \to F(t)$ *при* $n\to\infty$ *в каждой точке непрерывности функции* $F(t)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n \|_E = \| u \|_E.$$

Доказательство очевидно.

Л е м м а 5. *Пусть* $\{x_i\}$ — *последовательность независимых случайных величин с* $m(x_i) = 0$, $\sigma_i^2 = m(x_i^2)$ *и* $|x_i| \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$, *почти всюду. Последовательность* $\{x_i\}$ *удовлетворяет условию Линдеберга тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что условие Линдеберга имеет вид: $\forall \varepsilon > 0\ \frac{1}{B_n} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_k(x) \to 0$, где $V_k(x) = \mathrm{p}(x_k < x)$ (см. [4, с. 126]). Предположим, что $B_n \to \infty$, $n\to\infty$. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать натуральное число n_0 так, чтобы при $n > n_0$ $\varepsilon\sqrt{B_n} > C$. Тогда $\mathrm{p}(|x_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}) = 0$ $\forall k$. Поэтому $\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_k(x) = 0$, $n > n_0$, $\forall k$. Тем самым условие Линдеберга выполняется.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} B_n < \infty$. Положим $B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$, тогда

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_k(x) \geqslant \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{B}} x^2 dV_k(x) \geqslant \frac{1}{B} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{B}} x^2 dV_1(x).$$

При достаточно малых ε правая часть последнего неравенства строго больше нуля. Следовательно, условие Линдеберга не имеет места. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Согласно лемме 5 и центральной предельной теореме, при выполнении условий теоремы 3 $\mathrm{p}(z_n < x) \to p(z < x)$ при $n\to\infty$ $\forall x$; поэтому в силу леммы 4

$$\lim_{n\to\infty} \| z_n \chi_{[|z_n|<k]} \|_E = \| z\chi_{[|z|<k]} \|_E \quad \forall k \tag{7}$$

(легко видеть, что из условий теоремы вытекает непрерывность $\varphi_E(t)$ в нуле).

На основании лемм 2 и 3 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 : \| z_n \chi_{[|z|\geqslant k]} \|_E < \varepsilon$, $\| z\chi_{[|z|\geqslant k]} \|_E < \varepsilon$, $\forall k > k_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда при $k > k_0$

$$\| z_n \chi_{[|z_n|<k]} \|_E - \varepsilon \leqslant \| z_n \|_E \leqslant \| z_n \chi_{[|z_n|<k]} \|_E + \varepsilon,\ n = 1, 2, \ldots,\ \| z\chi_{[|z|<k]} \|_E - \varepsilon \leqslant \| z \|_E \leqslant \| z\chi_{[|z|<k]} \|_E + \varepsilon.$$

Из этих неравенств и соотношения (7) получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| z_n \|_E \leqslant \lim_{n\to\infty} \| z_n \chi_{[|z_n|<k]} \|_E + \varepsilon = \| z\chi_{[|z|<k]} \|_E + \varepsilon \leqslant \| z \|_E + 2\varepsilon.$$

Аналогично $\underline{\lim_{n\to\infty}} \| z_n \|_E \geqslant \| z \|_E + 2\varepsilon$. Поскольку последние неравенства справедливы при всех $\varepsilon > 0$, то $\lim_{n\to\infty} \| z_n \|_E = \| z \|_E$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин из $L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$ с нулевым математическим ожиданием, E — симметричное банахово пространство случайных величин, заданных на Ω, и z — гауссовская случайная величина с параметрами (0, 1). Если $L_q(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$ вложено в E для некоторого $q \geqslant 1$, $q \neq \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\sigma(x_1)\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_E = \| z \|_E$$

(термин «вложено» здесь означает алгебраическое и топологическое вложение).

Лемма 6. *Пусть* $(\Omega, \mathfrak{A}, p)$ — *измеримое пространство с конечной непрерывной мерой* p. *Для всякой последовательности* $\{\tilde{x}_i\}$ *конечнозначных (или счетнозначных) случайных величин* $\tilde{x}_i$, *определенных на* Ω, *существует последовательность случайных величин* (x_i), *заданных на* Ω, *обладающая следующими свойствами:*

1) x_i *равноизмерима с* $\tilde{x}_i$ $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$;

2) *случайные величины* x_i *независимы в совокупности.*

Доказательство очевидно.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$ — измеримое пространство с нормированной непрерывной мерой p и E — симметричное банахово пространство, состоящее из случайных величин, определенных на Ω. Тогда случайная величина $e(\omega) \equiv 1$ принадлежит E; для определенности положим $\| e \|_E = 1$. Как известно (см. [6]), в этом случае справедливы вложения $L_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p}) \supset E \supset L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$, причем константы вложения равны единице, так что E — промежуточное между L_1 и L_∞ банахово пространство. Для промежуточного банахова пространства E с единичным шаром $S(E)$ можно ввести понятие индекса (см. [7]): $\operatorname{ind} E = \alpha = \inf_{W_\beta \subset S(E)} \beta$, где $W_\beta = \{x \in L_\infty : \| x \|_{L_1}^{1-\beta} \| x \|_{L_\infty}^{\beta} \leqslant 1\}$. Очевидно, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$ — *измеримое пространство с нормированной непрерывной мерой* p *и* E — *симметричное банахово пространство индекса* $\alpha \neq 1$. *Банахово пространство* E *является пространством* $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{p})$ *тогда и только тогда, когда для любых двух независимых случайных величин* $x, y \in E$ *выполняется равенство* (2).

Доказательство. В силу предложения 1 для доказательства теоремы достаточно показать справедливость равенства $\| x \|_E = \| x \|_{L_2}$ для конечнозначных случайных величин x с нулевым математическим ожиданием. Действительно, если x — произвольная конечнозначная случайная величина, то на основании непрерывности меры p можно построить такую конечнозначную случайную величину y с $\mathrm{m}(y) = 0$, что $|x|$ и $|y|$ равноизмеримы, поэтому в силу симметричности пространства E $\| x \|_E = \| y \|_E$. Используя лемму 6, можно выбрать последовательность независимых конечнозначных случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, каждая из которых равноизмерима с x. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет всем условиям следствия из теоремы 3; кроме того, из условия $\operatorname{ind} E \neq 1$ и почти интерполяционного свойства минимальных шкал (см. [1, с. 373, теорема 2.20]) следует, что $L_q \subset E$ при некотором $q \in [1, \infty)$, поэтому на основании вышеуказанного следствия $\left\| (\sigma(x)\sqrt{n})^{-1} \sum_{n=1} x_i \right\|_E \to \| z \|_E$ при $n \to \infty$, где z — нормированная нормально распределенная случайная величина. По условию теоремы

$$\left\| \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_E^2 = \frac{1}{\sigma^2(x)\,n} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_E^2 = \frac{\| x \|_E^2}{\sigma^2(x)},$$

следовательно, $\| x \|_E^2 = \sigma^2(x) \| z \|_E^2 = \| x \|_{L_2}^2 \| z \|_E^2$.

Для завершения доказательства осталось показать, что $\| z \|_E = 1$. С этой целью разобьем основное пространство Ω на две равноизмеримые части Ω_1 и Ω_2 и рассмотрим случайную величину

$$r(\omega) = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega \in \Omega_1, \\ 1, & \text{если } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда $\mathrm{m}(r) = 0$ и $\| r \|_E = \| e(\omega) \equiv 1 \|_E = 1$.

Пользуясь снова леммой 6, построим последовательность независимых случайных величин $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, равноизмеримых с r; проводя далее аналогичные рассуждения с помощью теоремы 3 получим $1 = \left\| n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} r_i(\omega) \right\|^2 \to$ $\to \| z \|_E^2$ при $n \to \infty$, поэтому $\| z \|_E = 1$. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 4 показывают, что кроме дисперсии не существует каких-либо других показателей меры разброса (рассеяния) возможных значений случайной величины относительно ее среднего значения, которые обладают свойством аддитивности для некоррелированных или независимых случайных величин.

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
2. *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. — М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 434 с.
3. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей.— М. : Мир, 1969.— 309 с.
4. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. — М. : Наука, 1972.— 414 с.
5. *Митягин Б. С.* Случайные матрицы и подпространства.— В кн.: Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославль : Изд-во Ярославл. ун-та, 1977, с. 175—202.
6. *Курицын Ю. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Неравенства чебышевского типа в симметричных пространствах.— Мат. заметки, 1971, 10, вып. 2, с. 195—205.
7. *Петунин Ю. И:* Родственность трех банаховых пространств. — Докл. АН СССР, 1966, 170, № 3, с. 516—519.

Хабаров. политехн. ин-т

Поступила 08.12.82