УДК 517.9

Р. В. Божок, В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ, АСОЦІЙОВАНІ З ОСНАЩЕНИМИ ГІЛЬБЕРТОВИМИ ПРОСТОРАМИ*

Let A be an unbounded self-adjoint operator in a separable Hilbert space $\mathcal{H}_0$ which is equipped $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$ in such a way that the domain of definition $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$ in the norm of a graph. Assume that $\mathcal{H}_+$ is decomposed into the orthogonal sum $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$ so that the subspace $\mathcal{M}_+$ in dense in $\mathcal{H}_0$. In the paper, we construct and investigate the singularly perturbed operator $\breve{A}$ associated with a new rigging $\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+$, where $\breve{\mathcal{H}}_+ = \mathcal{M}_+ = \mathcal{D}(\breve{A})$. We establish the relation between the operators A and $\breve{A}$.

Нехай A є необмеженим самоспряженим оператором в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}_0$, який оснащено $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$ таким чином, що область визначення $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$ в нормі графіка. Припустимо, що $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$ так, що підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$. У роботі будується і вивчається сингулярно збурений оператор $\breve{A}$, асоційований з новим оснащенням $\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+$, де $\breve{\mathcal{H}}_+ = \mathcal{M}_+ = \mathcal{D}(\breve{A})$. Встановлено зв'язок між операторами A та $\breve{A}$.

1. Вступ. Розглянемо в сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}_0$ необмежений самоспряжений оператор $A = A^* \geq 1$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)$. З кожним таким оператором асоціюється оснащений простір Гільберта [1, 2]

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+,$$

де $\sqsupset$ означає щільне неперервне вкладення, $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ за нормою графіка, а $\mathcal{H}_-$ — спряжений простір (цей простір є поповненням $\mathcal{H}_0$ за нормою $\|f\|_- :=$ $:= \|A^{-1}f\|$, $f \in \mathcal{H}_0$). Припустимо, що сингулярне збурення задано оператором $T: \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ так, що множина $\mathcal{M}_+ := \operatorname{Ker} T$ є щільною в $\mathcal{H}_0$. Згідно з загальновизнаною в теорії сингулярних збурень процедурою (див., наприклад, [3 – 20]) сингулярно збурений оператор $\tilde{A}$, який відповідає формальній сумі $A \tilde{+} T$, визначається як одне із самоспряжених розширень симетричного оператора $\dot{A} := A|\mathcal{M}_+$.

У цій роботі пропонується новий метод побудови сингулярно збуреного оператора. Суть цього методу полягає в наступному. Виходячи з ортогонального розкладу $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$, де, нагадаємо, $\mathcal{M}_+ = \operatorname{Ker} T$ є підпростором, щільним у $\mathcal{H}_0$, вводимо новий оснащений простір: $\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+$, покладаючи $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$. Після цього визначаємо сингулярно збурений оператор (позначаємо його $\breve{A}$) як єдино визначений оператор, асоційований із новим оснащенням простору $\mathcal{H}_0$. Такий оператор $\breve{A}$ фіксується умовою $\mathcal{D}(\breve{A}) = \mathcal{M}_+$.

Таким чином, ми розширюємо звичайний клас сингулярно збурених операторів. Окрім усієї сім'ї самоспряжених розширень симетричного оператора $\dot{A}$ включаємо в клас сингулярно збурених операторів ще й оператор $\breve{A}$. Виявляється, що спектральні властивості операторів $\tilde{A}$ та $\breve{A}$ є істотно різними. На думку авторів, вибір оператора $\breve{A}$ в якості сингулярно збуреного оператора

* Частково підтримано проектами DFG 436 UKR 113/67, 113/78 та INTAS 00-257.

більш адекватно враховує фізичну ідею ідеально твердого ядра (або абсолютно непрозорого екрана) в теорії сингулярних збурень.

Наступні два розділи статті є допоміжними. Основним результатом роботи є теорема 4. Зокрема, в цій теоремі описано конструкцію оператора $\breve{A}$, а також встановлено зв'язок між операторами A та $\breve{A}$.

2. Оснащені простори Гільберта. Нагадаємо деякі загальні факти з теорії оснащених гільбертових просторів (докладніше див. [1, 2]).

За означенням трійка гільбертових просторів

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+ \tag{2.1}$$

утворює оснащений простір Гільберта, якщо виконуються таки умови:

а) обидва вкладення є неперервними і щільними, що позначається символом $\sqsupset$;

б) норми у просторах $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_+$ задовольняють нерівності

$$\|\cdot\|_- \le \|\cdot\|_0 \le \|\cdot\|_+; \tag{2.2}$$

в) простори $\mathcal{H}_-$ та $\mathcal{H}_+$ є взаємно спряженими відносно $\mathcal{H}_0$.

Остання умова означає, що для кожного вектора $\varphi \in \mathcal{H}_+$ лінійний функціонал $l_\varphi(f) := (f, \varphi)_0$, $f \in \mathcal{H}_0$, має продовження за неперервністю на увесь простір $\mathcal{H}_-$. І тому так звану позитивну норму $\|\varphi\|_+$ можна обчислити за формулою

$$\|\varphi\|_+ = \sup_{\|f\|_- = 1} |(f, \varphi)_0|, \quad f \in \mathcal{H}_0.$$

Згідно з теоремою Ріса $l_\varphi(f) = (f, \varphi^*)_-$ з деяким $\varphi^* \in \mathcal{H}_-$. Отже, $\|\varphi\|_+ = \|\varphi^*\|_-$ і тому відображення

$$D_{-,+} : \mathcal{H}_+ \ni \varphi \to \varphi^* \in \mathcal{H}_-$$

є унітарним. З іншого боку, простір $\mathcal{H}_-$ збігається з поповненням $\mathcal{H}_0$ відносно так званої негативної норми

$$\|f\|_- := \sup_{\|\varphi\|_+ = 1} |(\varphi, f)_0|, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+.$$

На підставі (2.2) скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_0$ в $\mathcal{H}_0$ можна продовжити до дуального добутку між $\mathcal{H}_+$ та $\mathcal{H}_-$, який ми позначаємо як $\langle \omega, \varphi \rangle_{-,+} = \overline{\langle \varphi, \omega \rangle}_{+,-}$, $\omega \in \mathcal{H}_-$, $\varphi \in \mathcal{H}_+$. Оператори

$$D_{-,+} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-, \qquad I_{+,-} = D_{-,+}^{-1} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$$

називаються канонічними унітарними ізоморфізмами між $\mathcal{H}_-$ та $\mathcal{H}_+$. Вони задовольняють співвідношення

$$(f, \varphi)_0 = \langle f, \varphi \rangle_{-,+} = (f, D_{-,+}\varphi)_- = (I_{+,-} f, \varphi)_+, \quad f \in \mathcal{H}_0, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+.$$

Існує зв'язок між трійками просторів вигляду (2.1) та самоспряженими операторами A в $\mathcal{H}_0$. Цей зв'язок фіксується відображенням $D_{-,+}$ та умовою $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$. Справді, розглянемо оператор

$$L_A := D_{-,+} \restriction \mathcal{H}_{++}, \qquad \mathcal{H}_{++} := \mathcal{D}(L_A) = \{\varphi \in \mathcal{H}_+ \,|\, D_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0\}.$$

Очевидно, L_A є симетричним у $\mathcal{H}_0$, оскільки для усіх $\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(L_A)$

$$(L_A\varphi, \psi)_0 = (D_{-,+}\varphi, \psi)_0 =$$

$$= \langle\varphi^*, \psi\rangle_{-,+} = (\varphi, \psi)_+ = \langle\varphi, \psi^*\rangle_{+,-} = (\varphi, D_{-,+}\psi)_0 = (\varphi, L_A\psi)_0,$$

де елемент φ^* був означений вище. Насправді L_A самоспряжений в $\mathcal{H}_0$, оскільки згідно з побудовою його область значень збігається з усім простором $\mathcal{H}_0$. Визначимо $A := L_A^{1/2}$. Зрозуміло, що $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$ завдяки тому, що $(L_A\varphi, \psi)_0 = (L_A^{1/2}\varphi, L_A^{1/2}\psi)_0 = (\varphi, \psi)_+$. Очевидно також, що $A \geq 1$, оскільки $\|\cdot\|_+ \geq \|\cdot\|_0$.

Навпаки, нехай $A = A^* \geq 1$ є самоспряженим необмеженим оператором з областю визначення $\mathcal{D}(A)$ у просторі $\mathcal{H}_0$. Виходячи з A, можна легко побудувати оснащений простір Гільберта $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$. Нагадаємо цю побудову. Простір $\mathcal{H}_+$ ототожнюємо з $\mathcal{D}(A)$ в скалярному добутку $(\varphi, \psi)_+ :=$ $:= (A\varphi, A\psi)_0$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$. Далі, виходячи з неповного ланцюжка $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$, продовжуємо його до оснащеного простору (2.1) звичайним чином (як було описано при аналізі умови в)). Отже, справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Кожен оснащений простір Гільберта виду* (2.1) *взаємно однозначно пов'язаний* (*асоційований*) *з самоспряженим оператором* $A = A^* \geq 1$ *в* $\mathcal{H}_0$. *При цьому* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$ *і позитивний скалярний добуток* $(\varphi, \psi)_+ =$ $= (A\varphi, A\psi)_0$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$.

У подальшому нам знадобиться також конструкція нескінченного ланцюжка гільбертових просторів $\{\mathcal{H}_k \equiv \mathcal{H}_k(A)\}_{k\in\mathbb{R}}$, який називається A-шкалою гільбертових просторів.

За означенням $\mathcal{H}_k := \mathcal{D}(A^{k/2})$, $k > 0$, в позитивній нормі $\|\cdot\|_k$, яка відповідає скалярному добутку

$$(\varphi, \psi)_k := (A^{k/2}\varphi, A^{k/2}\psi)_0, \quad \varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(A^{k/2}).$$

Простір $\mathcal{H}_{-k}$ з'являється як поповнення $\mathcal{H}_0$ відносно негативної норми

$$\|f\|_{-k} := \left\|A^{-k/2}f\right\|_0, \quad f \in \mathcal{H}_0.$$

Неважко бачити, що кожна трійка

$$\mathcal{H}_{-k} \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_k, \quad k > 0, \tag{2.3}$$

утворює оснащений простір, асоційований з оператором $A^{k/2}$. Нехай $D_{-k,k}$: $\mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{-k}$ позначає оператор канонічного унітарного ізоморфізму для трійки (2.3). Очевидно, що $D_{-k,k} = (A^{k/2})^{\mathrm{cl}}(A^{k/2}) \equiv D_{-k,0}D_{0,k}$, де cl позначає операцію замикання. Зокрема, для $k = 2$ маємо $D_{0,2} \equiv A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_0$ та $D_{-2,0} \equiv$ $\equiv A^{\mathrm{cl}}: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_{-2}$.

3. Щільність вкладення. Нехай задано оснащений простір Гільберта $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$. Припустимо, що позитивний простір $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму підпросторів: $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. Наступна теорема дає простий критерій щільності вкладення $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$.

Теорема 2 [4]. *Нехай* $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. *Підпростір* $\mathcal{M}_+$ *є щільним в* $\mathcal{H}_0$

тоді і тільки тоді, коли підпростір $\mathcal{N}_- := D_{-,+}\mathcal{N}_+$ *має нульовий переріз з* $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}. \tag{3.1}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$. Припустимо, що існує вектор $0 \neq \neq \psi \in \mathcal{H}_0$ такий, що $\psi \perp \mathcal{M}_+$. Оскільки $\mathcal{M}_+$ є підпростором в $\mathcal{H}_+$, то з огляду на те, що $\psi \in \mathcal{H}_-$, маємо

$$0 = (\psi, \mathcal{M}_+)_0 = \langle \psi, \mathcal{M}_+ \rangle_{-,+} = (I_{+,-}\psi, \mathcal{M}_+)_+.$$

Тому $I_{+,-}\psi \in \mathcal{N}_+$. Це означає, що $\psi \in \mathcal{N}_-$, а це суперечить початковому припущенню. Навпаки, якщо підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, то припущення про існування вектора $0 \neq \omega \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0$ також приводить до суперечності. Справді, оскільки $\mathcal{N}_- = D_{-,+}\mathcal{N}_+$, маємо

$$\langle \omega, \mathcal{M}_+ \rangle_{-,+} = (\omega, \mathcal{M}_+)_0 = (I_{+,-}\omega, \mathcal{M}_+)_+ = 0,$$

що суперечить співвідношенню $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$, бо $0 \neq \omega \in \mathcal{H}_0$.

Теорему доведено.

Легко зрозуміти, що співвідношення (3.1) можна записати в еквівалентній формі

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{H}_+ = \{0\}, \qquad \mathcal{N}_0 := D_{0,+}\mathcal{N}_+. \tag{3.2}$$

Введемо до розгляду розширений оснащений простір

$$\mathcal{H}_{--} \sqsupset \mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+ \sqsupset \mathcal{H}_{++},$$

де $\mathcal{H}_{--} = \mathcal{H}_{-4}(A)$, $\mathcal{H}_{++} = \mathcal{H}_4(A) = \mathcal{D}(A^2)$. Нехай $\mathcal{H}_+ = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{M}_+$. Припустимо, що $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$. Розглянемо підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$. Він є замкненим в $\mathcal{H}_{++}$. Справді, якщо послідовність $\varphi_n \in \tilde{\mathcal{M}}_+$ є збіжною в $\mathcal{H}_{++}: \varphi_n \to \to \varphi \in \mathcal{H}_{++}$, то вона є збіжною і в $\mathcal{H}_+$ завдяки $\|\cdot\|_+ \leq \|\cdot\|_{++}$. Отже, $\varphi \in \mathcal{M}_+$, оскільки $\mathcal{M}_+$ є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$. Це доводить замкненість $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{H}_{++}$.

Припустимо, що виконується умова

$$(\mathcal{N}_-)^{\mathrm{cl},--} \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}, \tag{3.3}$$

де $\mathcal{N}_- := D_{-,+}\mathcal{N}_+$, а cl,$--$ позначає замикання в $\mathcal{H}_{--}$.

Теорема 3. *Якщо підпростір* $\mathcal{M}_+$ *є щільним в* $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$, *і додатково виконується умова* (3.3), *то переріз* $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$ *також є щільним в* $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \tilde{\mathcal{M}}_+. \tag{3.4}$$

Зокрема, підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ *є щільним в* $\mathcal{H}_0$, *якщо розмірність* $\mathcal{N}_+$ *скінченна*: $\dim \mathcal{N}_+ < \infty$.

Доведення. Використовуючи означення підпростору $\tilde{\mathcal{M}}_+$ у вигляді

$$\tilde{\mathcal{M}}_+ = \{\varphi \in \mathcal{H}_{++} \mid (\varphi, \psi)_+ = 0, \ \psi \in \mathcal{N}_+\},$$

згідно з властивостями A-шкали маємо

$$(\varphi, \psi)_+ = \langle \varphi, \omega \rangle_{+,-} = \langle \varphi, \omega \rangle_{++,--},$$

де $\omega = D_{-,+}\psi$, $\psi \in \mathcal{N}_+$. Звідси випливає

$$(\mathcal{N}_-)^{\mathrm{cl},--} = \tilde{\mathcal{N}}_- := \{\omega \in \mathcal{H}_{--} \mid \langle \varphi, \omega \rangle_{++,--} = 0,\ \varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+\}. \tag{3.5}$$

Далі, оскільки $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, то на підставі (3.1) і завдяки умові (3.3) маємо $\tilde{\mathcal{N}}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$. Тому $\mathcal{H}_0 \sqsupset \tilde{\mathcal{M}}_+$ згідно з теоремою 2.

Завершуючи доведення, зауважимо, що із співвідношення $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$ умова (3.3) випливає автоматично, якщо $\dim \mathcal{N}_0 = \dim \mathcal{N}_+ < \infty$.

Зрозуміло, що теорема 3 залишиться справедливою, якщо умову (3.3) записати у вигляді $(\mathcal{N}_-)^{\mathrm{cl},--} \cap \mathcal{H}_- = \mathcal{N}_-$.

4. Про оператор $\breve{A}$. Нехай $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$ позначає оснащений гільбертів простір, який є асоційованим з самоспряженим оператором $A \geq 1$ у тому сенсі, що $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ в нормі $\|\cdot\|_+ = \|A\cdot\|_0$. При цьому оператор A^2 збігається із звуженням $D_{-,+}: \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ на $\mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{H}_4(A)$: $A^2 = D_{-,+} \mid \mathcal{H}_{++}$. Припустимо, що позитивний простір $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$ у такий спосіб, що підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$. Розглянемо новий оснащений простір

$$\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+, \tag{4.1}$$

де $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$. Ми хочемо побудувати самоспряжений оператор $\breve{A}$, який асоційований з ланцюжком (4.1) в такий спосіб, що область визначення $\mathcal{D}(\breve{A})$ збігається з $\breve{\mathcal{H}}_+$.

Нагадаємо, що негативний простір $\breve{\mathcal{H}}_-$ визначається як поповнення $\mathcal{H}_0$ в новій нормі:

$$\|f\|_-^{\breve{}} := \sup_{\|\varphi\|_+=1} |(f, \varphi)_0|, \qquad \varphi \in \mathcal{M}_+. \tag{4.2}$$

При цьому для довільного фіксованого $f \in \mathcal{H}_0$ виконується нерівність

$$\|f\|_-^{\breve{}} \leq \|f\|_-, \tag{4.3}$$

де

$$\|f\|_- := \sup_{\|\varphi\|_+=1} |(f, \varphi)_0|, \qquad \varphi \in \mathcal{H}_+.$$

Зрозуміло, що простір $\mathcal{H}_0$ щільно і неперервно вкладається як в $\mathcal{H}_-$, так і в $\breve{\mathcal{H}}_-$. Але було б помилкою думати, що з (4.3) випливає вкладення $\mathcal{H}_-$ в $\breve{\mathcal{H}}_-$ як власної підмножини.

Твердження 1. *Замикання тотожного відображення*

$$O : \mathcal{H}_- \ni f \ \to \ f \in \breve{\mathcal{H}}_-, \qquad f \in \mathcal{H}_0,$$

є неперервним і має нетривіальний нуль-підпростір:

$$\operatorname{Ker} O^{\mathrm{cl}} = \mathcal{N}_-, \qquad \mathcal{N}_- = I_{-,+}\mathcal{N}_+,$$

де cl *позначає замикання.*

Доведення. Неперервність відображення O випливає безпосередньо з (4.3). Покажемо, що кожен $\eta_- \in \mathcal{N}_-$ є нуль-вектором для O^{cl}. Нехай послідовність $f_n \in \mathcal{H}_0$ збігається в $\mathcal{H}_-$ до фіксованого $\eta_- \in \mathcal{N}_-$. Тоді завдяки (4.3) ця послідовність буде збіжною в $\breve{\mathcal{H}}_-$ також. Але у просторі $\breve{\mathcal{H}}_-$ ця послідовність збігається до нуля. Це випливає з того, що

$$(f_n, \varphi)_0 = \langle f_n, \varphi\rangle_{-,+} \to \langle \eta_-, \varphi\rangle_{-,+} = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{M}_+,$$

оскільки $\mathcal{N}_- \perp \mathcal{M}_+$ і $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$. Отже, $\eta_- \in \operatorname{Ker} O^{\mathrm{cl}}$.

Зауважимо, що жоден вектор $0 \neq f \in \mathcal{H}_0$ не належить до $\operatorname{Ker} O^{\mathrm{cl}}$. Простір $\mathcal{H}_0$ вкладається в $\breve{\mathcal{H}}_-$ без дефекту.

Твердження 2. *Для кожного* $0 \neq f \in \mathcal{H}_0$

$$\|f\|_-^{\breve{}} = \|P_{\mathcal{M}_-} f\|_- \neq 0, \tag{4.4}$$

де $P_{\mathcal{M}_-}$ *позначає ортогональний проектор на* $\mathcal{M}_-$ *в* $\mathcal{H}_-$.

Доведення. Справедливість рівності в (4.4) випливає з означення норми у просторі $\breve{\mathcal{H}}_-$ (див. (4.2)) та співвідношення

$$(f, \varphi)_0 = \langle f, \varphi\rangle_{-,+} = \langle P_{\mathcal{M}_-} f, \varphi\rangle_{-,+}, \qquad \varphi \in \mathcal{M}_+,$$

в якому використано ортогональність підпросторів $\mathcal{M}_- \perp \mathcal{N}_+$ у сенсі дуального скалярного добутку. Зазначимо, що для всіх $0 \neq f \in \mathcal{H}_0$

$$P_{\mathcal{M}_-} f \neq 0, \tag{4.5}$$

оскільки з $P_{\mathcal{M}_-} f = 0$ випливає, що $f \in \mathcal{N}_-$, але $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$ завдяки $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$ (див. теорему 1).

З твердження 2 випливає, що звуження відображення O^{cl} на підпростір $\mathcal{M}_- := D_{-,+}\mathcal{M}_+$ є унітарним оператором. Отже, простори $\breve{\mathcal{H}}_-$, $\mathcal{M}_-$ унітарно еквівалентні.

Отже, незважаючи на те, що норми у просторах $\breve{\mathcal{H}}_-$ і $\mathcal{H}_-$ задовольняють нерівність (4.3), а простір $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$ є правильною частиною простору $\mathcal{H}_+$, простір $\mathcal{H}_-$ не міститься в $\breve{\mathcal{H}}_-$ як частина: $\breve{\mathcal{H}}_- \not\supseteq \mathcal{H}_-$.

Нехай $\breve{D}_{-,+} : \breve{\mathcal{H}}_+ \to \breve{\mathcal{H}}_-$ позначає канонічний унітарний ізоморфізм в оснащеному просторі Гільберта (4.1). Розглянемо оператор

$$L := \breve{D}_{-,+} \,|\, \mathcal{D}(L), \qquad \mathcal{D}(L) := \{\varphi \in \breve{\mathcal{H}}_+ \,|\, \breve{D}_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0\}. \tag{4.6}$$

Неважко переконатися (див. нижче доведення теореми 4), що оператор L є симетричним і його область значень збігається з усім простором $\mathcal{H}_0$. Тому він є самоспряженим оператором в $\mathcal{H}_0$ з областю визначення $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+$.

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай область визначення самоспряженого в* $\mathcal{H}_0$ *оператора* $A \geq 1$ *розкладено в ортогональну суму* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. *Припустимо, що підпростір* $\mathcal{M}_+$ *є щільним в* $\mathcal{H}_0$, *а* $\mathcal{N}_- := D_{-,+}\mathcal{N}_+$ *задовольняє* *умову* (3.3). *Тоді оператор* L, *визначений у* (4.6), *допускає наступний явний опис у термінах* A-*шкали та оператора* A:

$$\mathcal{D}(L) = P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}, \quad LP_{\mathcal{M}_+}\varphi = A^2\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{D}(A^2), \tag{4.7}$$

де $P_{\mathcal{M}_+}$ — *ортогональний проектор на* $\mathcal{M}_+$ *в* $\mathcal{H}_+$. *Більш того, оператор* L *є розширенням за Фрідріхсом симетричного оператора*

$$\dot{L} := A^2 |\tilde{\mathcal{M}}_+, \quad \tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}. \tag{4.8}$$

При цьому область визначення оператора

$$\breve{A} := L^{1/2}$$

в точності збігається з підпростором $\mathcal{M}_+$:

$$\mathcal{D}(\breve{A}) = \mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+. \tag{4.9}$$

Доведення. Покажемо, що відображення

$$L: P_{\mathcal{M}_+}\varphi \to A^2\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}_{++},$$

є симетричним оператором в $\mathcal{H}_0$. Справді, для усіх $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{++}$ маємо

$$(LP_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi)_0 = (A^2\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi)_0 = \langle D_{-,+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-,+} =$$
$$= \langle P_{\mathcal{M}_-}D_{-,+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-,+} = \langle D_{-,+}P_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-,+} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, D_{-,+}P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{+,-} =$$
$$= \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_-}D_{-,+}\psi\rangle_{+,-} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, D_{-,+}\psi\rangle_{+,-} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, A^2\psi\rangle_{+,-} =$$
$$= (P_{\mathcal{M}_+}\varphi, LP_{\mathcal{M}_+}\psi)_0.$$

З цього випливає, що L є самоспряженим оператором, оскільки його областю значень є увесь гільбертів простір: $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(A^2) = \mathcal{H}_0$.

Доведемо тепер, що оператор L, визначений в (4.7), збігається з оператором L у (4.6). Для цього спочатку покажемо, що ці оператори збігаються на множині $\tilde{\mathcal{M}}_+$, а потім переконаємось, що L є розширенням за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{L}$ (див. (4.8)). Як проміжний результат доведемо, що відображення $\breve{D}_{-,+}$, $D_{-,+}$ збігаються на підпросторі $\tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$ і при цьому їх значення належать $\mathcal{H}_0$:

$$\breve{D}_{-,+}\varphi = D_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0, \quad \varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+. \tag{4.10}$$

Очевидно також, що $P_{\mathcal{M}_+}\tilde{\mathcal{M}}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+$. З цього випливає включення $\tilde{\mathcal{M}}_+ \subset \mathcal{D}(\dot{L})$ та рівність $\dot{L}\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^2\tilde{\mathcal{M}}_+$. Для доведення (4.10) нагадаємо, що $\mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{H}_4(A) = \mathcal{D}(A^2)$, а $\tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$. Отже, вектор $f := D_{-,+}\varphi = A^2\varphi \in \mathcal{H}_0$ для кожного $\varphi \in \mathcal{H}_{++}$. Далі, розглянемо для фіксованого $\varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$ два функціонали:

$$l_\varphi(\psi) := \langle D_{-,+}\varphi, \psi\rangle_{-,+}, \quad \psi \in \mathcal{H}_+,$$

та

$$\breve{l}_\varphi(\psi) := \langle \breve{D}_{-,+}\varphi, \psi\breve{\rangle}_{-,+}, \quad \psi \in \mathcal{M}_+.$$

Функціонал $l_\varphi(\psi)$ є неперервним на $\mathcal{H}_0$ та $l_\varphi(\psi) = (f, \psi)_0 = (f, \psi)_+$ для усіх $\psi \in \mathcal{M}_+$. Функціонал $\breve{l}_\varphi(\psi)$ також є неперервним на $\mathcal{H}_0$, оскільки $\mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+$, та

$$\breve{l}_\varphi(\psi) = (\varphi, \psi)_+ = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_{++}, \mathcal{H}_0}, \qquad \left| \breve{l}_\varphi(\psi) \right| \le c \|\psi\|_0,$$

де $c = \|\varphi\|_{++}$. Отже, $\breve{l}_\varphi(\psi) = (\breve{f}, \psi)_0$ з деяким $\breve{f} \in \mathcal{H}_0$. Ми стверджуємо, що $f = \breve{f}$. Справді, згідно з побудовою $(f, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+ = (\breve{f}, \psi)_0$ для усіх $\psi \in \mathcal{M}_+$. Тому вектори f та $\breve{f}$ збігаються, оскільки підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$. Отже, (4.10) встановлено.

Доведемо, що оператор L з (4.6) є розширенням за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{L}$. Нагадаємо, що область визначення $\mathcal{D}(\dot{L}) = \tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільною в $\mathcal{H}_0$. Насправді з умови (3.3) випливає, що підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільним в $\mathcal{M}_+$. Справді, якщо $\phi \in \mathcal{M}_+$ та $\phi \perp \tilde{\mathcal{M}}_+$, то $D_{-,+}\phi \perp \mathcal{N}_-$ і $D_{-,+}\phi \perp \tilde{\mathcal{N}}_-$. Отже, $\phi \equiv 0$, оскільки $\tilde{\mathcal{N}}_- = \mathcal{N}_-$ завдяки (3.3). Докладніше, нехай $\mathcal{M}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{M}}_+^\perp$ та $\phi \in \tilde{\mathcal{M}}_+^\perp$. Тоді $\omega := D_{-,+}\phi \in \tilde{\mathcal{M}}_-^\perp$, де $\tilde{\mathcal{M}}_-^\perp = \mathcal{M}_- \ominus \tilde{\mathcal{M}}_-$. Тому маємо

$$\langle \omega, \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{-,+} = 0 = \langle \omega, \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{--,++} \quad \Rightarrow \quad \omega \in \tilde{\mathcal{N}}_- = \mathcal{N}_-.$$

Але це можливо, лише якщо $\phi = 0$, оскільки $\phi \in \mathcal{M}_+$ та $D_{-,+}\phi \perp \mathcal{N}_-$. Отже, $\mathcal{M}_+ \sqsupseteq \tilde{\mathcal{M}}_+$.

Далі, очевидно, що оператор $\dot{L}$ з областю визначення $\mathcal{D}(\dot{L}) = \tilde{\mathcal{M}}_+$ є замкненим в $\mathcal{H}_0$, тому що підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є замкненим в $\mathcal{H}_{++}$. Ми стверджуємо, що його область значень також є щільною в $\breve{\mathcal{H}}_-$. Тепер зауважимо, що на підставі (4.10) область значень оператора $\dot{L}$ збігається з підпростором $\tilde{\mathcal{M}}_- = A^2\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^2(\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}) = \mathcal{M}_- \cap \mathcal{H}_0$, який є щільним в $\breve{\mathcal{H}}_-$ завдяки тому, що $\breve{D}_{-,+} : \breve{\mathcal{H}}_+ \to \breve{\mathcal{H}}_-$ — унітарний оператор.

Якщо $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$, то простір $\breve{\mathcal{H}}_+$ є поповненням $\tilde{\mathcal{M}}_+$ відносно скалярного добутку $(\varphi, \psi)_{\breve{\mathcal{H}}_+} := (\dot{L}\varphi, \psi)_0 = (A\varphi, A\psi)_0 = (\varphi, \psi)_+$, $\varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Тому оператор L є самоспряженим розширенням симетричного оператора $\dot{L}$. За проведеною побудовою це є розширенням за Фрідріхсом оператора $\dot{L}$, оскільки ми вже встановили виконання щільного і неперервного вкладення: $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$.

Нарешті, рівність (4.9) є правильною, оскільки поповнення множини $\mathcal{D}((\breve{A})^2) = \mathcal{D}(L)$ за нормою $\|\cdot\|_{\breve{+}} := \|L^{1/2}\cdot\|_0$ збігається з $\mathcal{M}_+$. Справді, оскільки $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільним у $\mathcal{M}_+$, то досить лише нагадати, що $(L\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+$, $\varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Отже, за означенням L маємо

$$(L\varphi, \psi)_0 = (L^{1/2}\varphi, L^{1/2}\psi)_0 = (A^2\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+ = ((\breve{A}^2)^2\varphi, \psi)_0$$

для усіх φ, $\psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Таким чином, $\mathcal{M}_+ = \mathcal{H}_1(L)$ і, отже, $\mathcal{M}_+ = \mathcal{H}_2(\breve{A}) = \mathcal{D}(\breve{A}) = \breve{\mathcal{H}}_+$. Це завершує доведення теореми.

5. Загальна конструкція. У цьому пункті ми побудуємо оператор типу $\breve{A}$ (який будемо позначати через $\breve{D}$) у випадку, коли щільний в $\mathcal{H}_0$ підпростір

$\mathcal{M}_+$ є нетривіальною частиною простору $\mathcal{H}_k$ з A-шкали при довільному значенні $k > 0$.

Отже, нехай $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_k$, $k > 0$, розкладено в ортогональну суму $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. Припустимо, що $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$. Поряд з

$$\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{H}_{-k} \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_k \equiv \mathcal{H}_+$$

розглядаємо оснащений простір

$$\breve{\mathcal{H}}_- \equiv (\mathcal{M}_+)_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \equiv \breve{\mathcal{H}}_+$$

і асоційований з ним оператор $\breve{D} : \breve{\mathcal{H}}_+ = \mathcal{D}(\breve{D}) \to \mathcal{H}_0 = \mathcal{R}(\breve{D})$, який є самоспряженим в $\mathcal{H}_0$. Встановимо зв'язок між $\breve{D}$ та оператором $A^{k/2}$, для якого $\mathcal{H}_k$ є областю визначення: $A^k : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_0$.

Лема 1. *Для кожного щільного в $\mathcal{H}_0$ підпростору $\mathcal{M}_+$ із $\mathcal{H}_k$ відображення*

$$L : P_{\mathcal{M}_+}\varphi \to A^k\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{H}_{2k}$$

($P_{\mathcal{M}_+}$ позначає ортогональний проектор в $\mathcal{H}_+$ на $\mathcal{M}_+$) є самоспряженим оператором в $\mathcal{H}_0$.

Доведення. Відображення L є коректно означеним оператором. Справді, якщо $P_{\mathcal{M}_+}\varphi = 0$, то $\varphi \in \mathcal{N}_+ = \mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{M}_+$. Але $\mathcal{N}_+ \cap \mathcal{H}_+ = \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$, оскільки $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$ (див. теорему 1). Отже, $\varphi = 0$.

Далі, переконаємось, що відображення L з областю визначення $\mathcal{D}(L) = P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{2k}$ є симетричним оператором в $\mathcal{H}_0$. Справді,

$$(LP_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi)_0 = (A^k\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi)_0 = \langle \boldsymbol{A}^k\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-2k,2k} =$$

$$= \langle P_{\mathcal{M}_-}\boldsymbol{A}^k\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-2k,2k} = \langle \boldsymbol{A}^k P_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-2k,2k} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, \boldsymbol{A}^k P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{+,-} =$$

$$= \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_-}\boldsymbol{A}^k\psi\rangle_{2k,-2k} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, \boldsymbol{A}^k\psi\rangle_{2k,-2k} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, \boldsymbol{A}^k\psi\rangle_0 =$$

$$= (P_{\mathcal{M}_+}\varphi, LP_{\mathcal{M}_+}\psi)_0,$$

де $P_{\mathcal{M}_-}$ — ортопроектор в $\mathcal{H}_{-2k}$ на підпростір $\mathcal{M}_- := D_{-,+}\mathcal{M}_+$, а $\boldsymbol{A}^k$ — замикання оператора $A^k : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_{-2k}$; тут було використано співвідношення $\boldsymbol{A}^k P_{\mathcal{M}_+} = P_{\mathcal{M}_-}\boldsymbol{A}^k$. Тепер самоспряженість L випливає з того, що його область значень $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(A^k) = \mathcal{H}_0$.

Лему доведено.

Розглянемо в $\mathcal{H}_0$ поряд з L ще й оператор $\breve{L}$, породжений канонічним унітарним ізоморфізмом $\breve{D}_{-,+}$, який відображає $\breve{\mathcal{H}}_+$ в $\breve{\mathcal{H}}_-$:

$$\breve{L} := \breve{D}_{-,+} \mid \mathcal{D}(\breve{L}), \qquad \mathcal{D}(\breve{L}) := \{\breve{\varphi} \in \breve{\mathcal{H}}_+ \mid \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi} \in \mathcal{H}_0\}.$$

Лема 2. *За умови $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$ оператори L та $\breve{L}$ збігаються.*

Доведення. Нехай $\breve{\varphi} \in \mathcal{D}(\breve{L}) \subset \mathcal{M}_+ \equiv \breve{\mathcal{H}}_+$. Тоді $\mathcal{H}_0 \ni \breve{f} = \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi}$ і

$$\langle \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi}, \psi\rangle_{-,+}^{\breve{}} = (\breve{\varphi},\psi)_{+}^{\breve{}} = (\breve{f}, \psi)_0, \qquad \psi \in \mathcal{M}_+.$$

Оскільки $\mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+$ є підпростором в $\mathcal{H}_+$, то $(\breve{\varphi},\psi)_{+}^{\breve{}} = (\breve{\varphi},\psi)_+ = (A^{k/2}\breve{\varphi}, A^{k/2}\psi)_0$. Взагалі, вектор $\breve{\varphi}$ не належить до області визначення оператора A^k, але завдяки рівності $(\breve{\varphi},\psi)_+ = (\breve{f}, \psi)_0$ і внаслідок щільності підпростору $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{H}_0$ існує вектор $\varphi \in \mathcal{H}_+$ такий, що $\breve{f} = A^k\varphi$. Отже, маємо

$$(\breve{\varphi},\psi)_+ = (\breve{f}, \psi)_0 = (A^k\varphi, \psi)_0 = \langle D_{-,+}\varphi, \psi\rangle_{-,+} =$$

$$= (\varphi,\psi)_{-,+} = (P_{\mathcal{M}_+}\varphi, \psi)_{-,+}, \qquad \psi \in \mathcal{M}_+.$$

Це означає, знову внаслідок щільності $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{H}_0$, що $\breve{\varphi} = P_{\mathcal{M}_+}\varphi$ і $\breve{L}\breve{\varphi} = \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi} = \breve{f} = A^k\varphi = LP_{\mathcal{M}_+}\varphi$.

Лему доведено.

Введемо підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{2k}$.

Твердження 3. *На підпросторі* $\tilde{\mathcal{M}}_+$ *оператори* L *та* A^k *діють однаково*:

$$L|\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^k|\tilde{\mathcal{M}}_+.$$

Доведення. Цей факт випливає з леми 2, оскільки

$$P_{\mathcal{M}_+}\tilde{\mathcal{M}}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+.$$

Отже,

$$L|\tilde{\mathcal{M}}_+ = \breve{L}|\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^k|\tilde{\mathcal{M}}_+,$$

і, більш того, за умови $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$ оператор L є самоспряженим розширенням щільно визначеного симетричного оператора

$$\dot{L} := A^k|\tilde{\mathcal{M}}_+.$$

Зауважимо, що щільність $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{H}_0$ гарантує умова типу (3.3).

Твердження 4. *Якщо* $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$, *то оператор* L *є розширенням за Фрідріхсом симетричного оператора* $\dot{L}$.

Доведення. На підставі попереднього твердження квадратична форма $\gamma(\varphi,\psi) := (\dot{L}\varphi, \psi)_0$ збігається з формою $(A^k\varphi, \psi)_0 = (\varphi,\psi)_{\mathcal{M}_+}$ на векторах φ, $\psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Завдяки щільності підпростору $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{M}_+$ замикання форми γ збігається із скалярним добутком $\mathcal{M}_+$. Тому $\breve{L}$ є розширенням за Фрідріхсом оператора $\dot{L}$. Але ми вже встановили, що $L = \breve{L}$.

Введемо оператор

$$\breve{D} := \breve{L}^{1/2} = L^{1/2}.$$

Безпосередньо з лем 1, 2 та тверджень 3, 4 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 5. *За умови* $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$ *самоспряжений в* $\mathcal{H}_0$ *оператор* $\breve{D}$ *має своєю областю визначення підпростір* $\mathcal{M}_+$ *і збігається з квадратним ко-*

ренем від розширення за Фрідріхсом щільно визначеного симетричного оператора $\dot{L} := A^k \,|\, \tilde{\mathcal{M}}_+$.

Доведення. Лише зазначимо, що рівність $\mathcal{D}(\breve{D}) = \mathcal{M}_+$ є наслідком щільності $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{M}_+$.

Насамкінець зауважимо, що значення квадратичних форм

$$\breve{\gamma}(\varphi,\psi) := (\breve{L}\varphi,\psi)_0 = (\breve{D}\varphi,\breve{D}\psi)_0 = (\varphi,\psi)_{\breve{+}},$$

$$\gamma(\varphi,\psi) := (A^k\varphi,\psi)_0 = (A^{k/2}\varphi, A^{k/2}\psi)_0 = (\varphi,\psi)_+$$

однакові на $\tilde{\mathcal{M}}_+$. Але ці форми мають різні замкнені розширення у просторі $\mathcal{H}_0$, з якими асоційовані різні самоспряжені оператори, і тому $\breve{D} \neq A^{k/2}$. При цьому зрозуміло, що останні оператори не можуть бути рівними на будь-якій щільній в $\mathcal{H}_0$ множині, незважаючи на те, що $\breve{L}$ та A^k збігаються на множині, яка є щільною в $\mathcal{H}_0$.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
3. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – Berlin etc.: Springer, 1988. – 568 p.
4. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Square power of singularly perturbed operators // Math. Nachr. – 1995. – **173**. – P. 5 – 24.
5. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* On negative eigenvalues of generalized Laplace operator // Repts Math. Phys. – 2000. – **45**, № 2. – P. 307 – 325.
6. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Singular rank one perturbations of self-adjoint operators and Krein theory of self-adjoint extensions // Potent. Anal. – 1999. – **11**. – P. 279 – 287.
7. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. – 265 p.
8. *Albeverio S., Kurasov P.* Rank one perturbations, approximations and self-adjoint extensions // J. Funct. Anal. – 1997. – **148**. – P. 152 – 169.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
10. *Karwowski W., Koshmanenko V., Ôta S.* Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // Positivity. – 1998. – **77**, № 2. – P. 18 – 34.
11. *Koshmanenko V. D.* Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 11. – P. 1559 – 1566.
12. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
13. *Koshmanenko V.* Singular quadratic forms in perturbation theory. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 308 p.
14. *Gesztesy F., Simon B.* Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. – 1995. – **128**. – P. 245 – 252.
15. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20(62)**, № 3. – С. 431 – 495.
16. *Karwowski W., Koshmanenko V.* Generalized Laplace operator in $L_2(\mathbf{R}^n)$ // Stochast. Process., Phys. and Geom.: New Interplays. II. Can. Math. Soc. (Conf. Proc.). – 2000. – **29**. – P. 385 – 393.
17. *Koshmanenko V. D.* Singular perturbations defined by forms // Lect. Notes Phys. Appl. Self-adjoint Extens. in Quant. Phys. / Eds P. Exner, P. Šeba. – 1987. – **324**. – P. 55 – 66.
18. *Koshmanenko V.* Singular operator as a parameter of self-adjoint extensions // Operator Theory. Adv. and Appl. (Proc. Krein Conf. (Odessa, 1997)). – 2000. – **118**. – P. 205 – 223.
19. *Koshmanenko V. D.* Regular approximations of singular perturbations of $\mathcal{H}_{-2}$-class // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, № 5. – P. 626 – 637.
20. *Posilicano A.* A Krein-like formula for singular perturbations of self-adjoint operators and applications // J. Funct. Anal. – 2001. – **183**. – P. 109 – 147.

Одержано 17.01.2005