УДК 517.5

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Upper estimates are obtained for the values of best bilinear approximations in the Lebesque spaces of periodic functions of several variables from the Besov-type classes. It is shown that, in special cases, these estimates are order exact.

Отримано оцінки зверху для величин найкращих білінійних наближень у просторах Лебега періодичних функцій багатьох змінних, що належать до класів типу Бєсова. Показано, що в окремих випадках ці оцінки є точними за порядком.

1. Определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство с элементами $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $\mathbb{R}^m_+ := \{x\in\mathbb{R}^m\colon\, x_i\geq 0,\ i=\overline{1,m}\}$, $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{Z}^m_+ = \{k=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m\colon\, k_j\geq 0,\ j=\overline{1,m}\}$, $\mathbb{N}^m = \{k=(k_1,\ldots,k_d)\colon\, k_j=1,2,\ldots,$ $j=\overline{1,m}\}$ (при $m=1$ пишем соответственно $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{N}$), $\pi_m := \prod_{j=1}^m[0,2\pi) = \{x\in\mathbb{R}^m\colon\, x_j\in[0,2\pi),\ j=\overline{1,m}\}$; если $\Omega\subset\mathbb{Z}^m$, то $|\Omega|$ обозначает количество точек конечного множества Ω. $L_p(\pi_m)$, $1\leq p\leq\infty$, — пространства измеримых 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)$ с конечными нормами

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m}\int\limits_{\pi_m}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1\leq p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^m}|f(x)|, \qquad p=\infty.$$

Определим смешанную l-ю разность функции f с шагом h_j по переменной x_j, $j=\overline{1,m}$: для $h=(h_1,\ldots,h_m)\in\mathbb{R}^m$ и $l\in\mathbb{N}$

$$\Delta^l_h f(x) := \Delta^l_{h_m}\ldots\Delta^l_{h_1} f(x_1,\ldots,x_m),$$

где

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \Delta_{h_j}\Delta^{l-1}_{h_j} f(x), \qquad \Delta^0_{h_j} f(x) := f(x)$$

и

$$\Delta_{h_j} f(x) \equiv \Delta^1_{h_j} f(x) = f(x_1,\ldots,x_j+h_j,\ldots,x_m) - f(x).$$

Известно, что

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+l}C^k_l f(x_1,\ldots,x_j+kh_j,\ldots,x_m),$$

где C^k_l — биномиальные коэффициенты.

Пусть далее для $t=(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m_+$

$$\omega_l(f,t)_p := \sup_{\substack{|h_i|\leq t_i\\ i=\overline{1,m}}}\|\Delta^l_h f\|_p$$

— полный смешанный p-модуль гладкости функции f порядка l.

Будем говорить, что функция $f \in L_p(\pi_m)$, $1 \le p \le \infty$, принадлежит пространству $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, если для нее конечна полунорма

$$|f|_{B^r_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_m} \left(\prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j} \omega_l(f,t)_p \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{m} \dfrac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t_j > 0} \prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j} \omega_l(f,t)_p \,, & \theta = \infty, \end{cases}$$

где $l > \max\{r_i,\, i = \overline{1,m}\}$.

Норму на линейных пространствах $B^r_{p,\theta}$ определим по формулам

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^r_{p,\theta}}.$$

Пространства $B^r_{p,\theta}$, с одной стороны, являются обобщениями известных изотропных пространств О. В. Бесова [1] (в случае $\theta = \infty$ — пространств С. М. Никольского [2]), а с другой — входят в шкалу пространств SB смешанной гладкости, введенных Т. И. Амановым [3].

В [4] пространства $B^r_{p,\theta}$ охарактеризованы в терминах так называемой декомпозиционной нормировки принадлежащих им функций, основанной на их разложении в ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$, $(k,x) := k_1x_1 + \ldots + k_mx_m$. Именно эта нормировка используется в дальнейшем, в частности, в доказательстве принадлежности той или иной функции пространству $B^r_{p,\theta}$, либо некоторому классу этого пространства.

Сформулируем результат из [4] в принятых ниже определениях и обозначениях.

Обозначим

$$L^0_p(\pi_m) := \left\{ f \in L_p(\pi_m) \colon \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0,\, j = \overline{1,m} \right\}.$$

Для вектора $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,m}$, положим

$$\rho(s) := \{k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j},\, j = \overline{1,d}\}$$

и для $f \in L_p(\pi_m)$ обозначим

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$.

Пусть $p \in (1,\infty)$. В [4] доказано, что для полунормы $|f|_{B^r_{p,\theta}}$ функции $f \in B^r_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_m)$ справедливы соотношения

$$|f|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^m_+} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{1}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$|f|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{(s,r)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\,, \tag{2}$$

а также показано, что на множестве $B^r_{p,\theta}\cap L^0_p(\pi_m)$ полунорма $|\cdot|_{B^r_{p,\theta}}$ на самом деле является нормой.

Здесь и далее для выражений A и B соотношение $A\asymp B$ означает, что существуют положительные величины C_1 и C_2, не зависящие от одного существенного по контексту параметра в выражениях A и B (например, в верхних соотношениях — от функции f) и такие, что $C_2B\le A\le C_1B$. Если же только $C_2B\le A$ $(A\le C_1B)$, то пишем $A\gg B$ $(A\ll B)$.

Так называемые порядковые (точные по порядку) соотношения (1) и (2) с некоторой их модификацией имеют место и для случаев $p=1$ и $p=\infty$. Для того чтобы записать их, введем дополнительные обозначения.

Пусть $V_l(u)$, $l\in\mathbb{N}$, $u\in\mathbb{R}$, обозначает ядро Валле Пуссена

$$V_l(u):=1+2\sum_{k=1}^{l}\cos ku+2\sum_{k=l+1}^{2l}\frac{2l-k}{l}\cos ku.$$

Для $f,g\in L_1(\pi_m)$ определим оператор свертки по формуле

$$(f*g)(x)=(2\pi)^{-m}\int\limits_{\pi_m} f(y)g(x-y)dy.$$

Если $f\in L_p(\pi_m)$, а

$$A_s(x):=2^m\prod_{j=1}^{m}(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j)),$$

$s=(s_1,\dots,s_m)$, $s_j\in\mathbb{Z}_+$, $j=\overline{1,m}$, $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ (при $s_j=0$ полагаем $V_{2^{s_j-1}}(x_j)=$ $=0$), то положим

$$\mathbb{A}_sf(x)=(f*A_s)(x).$$

Таким образом, для каждого s с помощью оператора $\mathbb{A}_s$ определяются кратные средние функции $f\in L_p(\pi_m)$

$$A_s(f,x):=\mathbb{A}_sf(x),$$

которые в силу известных свойств оператора свертки можно записать в виде тригонометрического полинома с определенными коэффициентами, зависящими от f. Заметим, что размерность пространства таких полиномов по всем $f\in L_p(\pi_m)$ равна $2^{|s|_1}$. Здесь и далее для $s\in\mathbb{Z}^m$ $|s|_1:=|s_1|+\ldots+|s_m|$.

Итак, при $p=1$ и $p=\infty$ для $f\in B^r_{p,\theta}\cap L^0_p(\pi_m)$ справедливы соотношения (см. замечание 2.1 [4], а также [3])

$$|f|_{B^r_{p,\theta}}\asymp\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^m_+}2^{(s,r)\theta}\|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{3}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$|f|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}^m_+} 2^{(s,r)} \|A_s(f,\cdot)\|_p \,. \tag{4}$$

Заметим, что соотношения (3) и (4) имеют место и при $1 < p < \infty$.

Теперь дадим определение исследуемой в работе аппроксимативной характеристики.

Пусть $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $d \in \mathbb{N}$, — множество функций $f(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, 2π-периодических по каждой из $2d$ переменных с конечной смешанной нормой

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} := \|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\|_{q_2},$$

где справа норма функции $f(x,y)$ вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$, $1 \leq q_1 \leq \infty$, как норма функции с переменной $x \in \mathbb{R}^d$ (при фиксированном $y \in \mathbb{R}^d$), а затем от полученного результата как норма функции с переменной $y \in \mathbb{R}^d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$, $1 \leq q_2 \leq \infty$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ определим величину наилучшего билинейного приближения порядка M ($M \in \mathbb{N}$) по формуле

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{\substack{u_j(x), v_j(y) \\ j=\overline{1,M}}} \|f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x) v_j(y)\|_{q_1,q_2}, \tag{5}$$

где $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1,M}$. При $M = 0$ будем считать, что $\tau_0(f(x,y))_{q_1,q_2} :=$ $:= \|f(x,y)\|_{q_1,q_2}$.

Если $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, то полагаем

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{6}$$

В случае, когда $q_1 = q_2 = q$, вместо $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ и $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ пишем соответственно $\tau_M(f)_q$ и $\tau_M(F)_q$.

В завершение этого пункта отметим, что в качестве приближаемого множества F рассматривается единичный шар пространства $B^r_{p,\theta}$, а точнее, множество

$$\mathbb{B}^r_{p,\theta} := \{f \in L^0_p(\pi_m) \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \leq 1\}.$$

2. О билинейных приближениях. Приближения функций многих переменных линейными комбинациями произведений функций меньшего числа переменных называются билинейными. Одной из наиболее важных характеристик таких приближений является величина $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$. Интерес в получении оценок величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для различных классов F продиктован как их применением к решению задач теории функций и функционального анализа, так и местом, которое билинейные приближения занимают в нелинейной аппроксимации. Краткие исторические сведения об этом приведены в [5]. Там же даны ссылки на работы, в которых содержится библиография по задачам билинейного приближения.

Для некоторых классов F 2π-периодических по всем переменным гладких функций задача о нахождении порядковых оценок величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ решена в [5, 6].

В других случаях (например, когда $F = W^r_p$ и $F = H^r_p$ — классы функций смешанной гладкости) В. Н. Темлякову [7] удалось получить лишь оценки сверху, которые в отдельных ситуациях, как показано, являются точными по порядку.

В дополнение к результатам из [7] в настоящей работе получены оценки сверху в случае, когда $F = B^r_{p,\theta}$, т. е. для величин $\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$, при различных значениях параметров p, q и θ, $1 \le p, q, \theta \le \infty$, и вектора $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_i > 0$, $i = \overline{1, m}$.

3. Вспомогательные утверждения. В этом пункте формулируются классические результаты — теорема Литтлвуда – Пэли об эквивалентном представлении нормы функций в пространстве $L_p(\pi_m)$ и неравенство С. М. Никольского о соотношении норм полиномов в пространствах $L_p(\pi_m)$ и $L_q(\pi_m)$, $p \ne q$. Приводятся также некоторые результаты, установленные В. Н. Темляковым, существенно используемые в доказательстве теорем. Они касаются оценок величин $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ для функций f полиномиального вида.

Сначала введем необходимые обозначения.

Пусть G, G_1, G_2 — некоторые конечные множества в $\mathbb{Z}^d$. Через $T(G, d)$ обозначим множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{k \in G} c_k e^{i(k,x)},\ k = (k_1, \ldots, k_d),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

а через $T(G_1, G_2, 2d)$ — множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x, y) = \sum_{\substack{k^1 \in G_1 \\ k^2 \in G_2}} c_{k^1,k^2} e^{i((k^1,x)+(k^2,y))},\ k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d),\ j = 1, 2 \ \text{ и } \ x, y \in \mathbb{R}^d.$$

В случае, когда $G = C^d(n) := \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le n,\ j = \overline{1, d}\}$, вместо $T(G, d)$ будем писать $T(C^d(n))$, а если $G = P^d(N) := \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d :\ |k_j| \le N_j,\ j = \overline{1, d}\}$, $N = (N_1, \ldots, N_d)$, $N_j \in \mathbb{Z}^d_+$, то $T(P^d(N))$.

Следующие утверждения формулируются в принятых обозначениях.

Теорема А (Литтлвуда – Пэли [8, с. 65])**.** *Пусть $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что для каждой функции $f \in L^0_p(\pi_m)$ выполняются неравенства*

$$c_1 \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le c_2 \|f\|_p\,.$$

Теорема Б [2]. *Пусть $N = (N_1, \ldots, N_d)$, $N_j \in \mathbb{Z}^d_+$ и $t \in T(P^d(N))$. Тогда при $1 \le q < p \le$ $\le \infty$ имеет место неравенство*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} N_j^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q\,.$$

Лемма А [7]. *Пусть $1 \le p \le q < \infty$ и $f \in T(P^{2d}(N))$. Тогда для всех целых M таких, что $0 \le M \le V(N) := \prod_{j=1}^{2d} N_j$, выполняется неравенство*

$$\tau_M(f)_q \ll V(N)^\beta \min\{1, M^{-\beta}\} \|f\|_p\,,$$

где $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$.

Лемма Б [7]. *Пусть e_1 и e_2 — некоторые множества d-мерных векторов, компоненты которых — натуральные числа, и $E_j = \bigcup\limits_{s \in e_j} \rho(s)$. Тогда при $q \in (1, \infty)$ для любой функции*

$f(x,y) \in T(E_1, E_2, 2d)$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдутся функции $u_i \in T(E_1, d)$, $v_i \in T(E_2, d)$ такие, что

$$\|f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y)\|_q \ll \tau_n(f)_q\,.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $Q_n = \bigcup\limits_{|s|_1 \le n} \rho^+(s)$, где $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, а $\rho^+(s) = \rho(s) \cap \mathbb{N}^d$. Отметим, что $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Лемма B [7]. *Пусть μ, $\nu \in \mathbb{N}$, $f \in T(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$ и $M \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\tau_M(f)_q \ll \min\{1, M^{-1}\}|Q_\mu|^{\frac{1}{2}}\,|Q_\nu|^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_2\,,\ 2 \le q < \infty, \tag{7}$$

$$\tau_M(f)_\infty \ll \min\{1, M^{-1}\}|Q_\mu|^{\frac{1}{2}}\,|Q_\nu|^{\frac{1}{2}}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} \times$$

$$\times \left(\log\left(1 + \frac{|Q_\mu|}{M+1}\right)\log\left(1 + \frac{|Q_\nu|}{M+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2\,. \tag{8}$$

3. Основные результаты. Излагаемые ниже результаты касаются оценок сверху величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ для классов $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ функций $2d$ переменных в случае, когда $q_1 = q_2 = q$, а все координаты вектора r одинаковы, т. е. $r = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^{2d}_+$, $r_1 > 0$.

Теорема 1. *Пусть $1 \le \theta < \infty$. Тогда при $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ справедливы оценки*

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll \begin{cases} M^{-2r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{2\left(r_1 + \frac{1}{\theta'}\right)}, & p = q = \infty \quad \textit{или} \quad p = q = 1, \\ M^{-2r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\big(\log^{d-1} M\big)^{2\left(r_1 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+\right)}, & 1 \le p \le q \le 2, \end{cases}$$

а при $r_1 > 1$

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{1,\theta})_q \ll \begin{cases} M^{-2r_1 + \frac{1}{2}}\big(\log^{d-1} M\big)^{2\left(r_1 + 1 + \left(1 - \frac{2}{\theta}\right)_+\right)}, & q = \infty, \\ M^{-2r_1 + \frac{1}{2}}\big(\log^{d-1} M\big)^{2r_1 + \left(1 - \frac{2}{\theta}\right)_+}, & 2 \le q < \infty, \end{cases}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$ и $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $t = (t_1, \ldots, t_d)$, $s_j, t_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$. Положим

$$A_{s,t}(x,y) = 2^{2d}\prod_{j=1}^{d}(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))\prod_{j=1}^{d}(V_{2^{t_j}}(y_j) - V_{2^{t_j-1}}(y_j)) =$$

$$= A_s(x)A_t(y)$$

и для $f \in L_q(\pi_{2d})$

$$\mathbb{A}_{s,t}f(x,y) = (f * A_{s,t})(x,y).$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq d)$ определим функции

$$f_1^n(x,y) = \sum_{t \in \mathbb{Z}_+^d} \sum_{|s|_1 \leq n} \mathbb{A}_{s,t} f(x,y),$$

$$f_2^n(x,y) = \sum_{|t|_1 \leq n} \sum_{|s|_1 > n} \mathbb{A}_{s,t} f(x,y), \tag{9}$$

$$f_3^n(x,y) = \sum_{|t|_1 > n} \sum_{|s|_1 > n} \mathbb{A}_{s,t} f(x,y).$$

Равенства (9) понимаются в смысле сходимости рядов к функциям $f_j^n(x,y)$ в $L_q(\pi_{2d})$, а частичные суммы этих рядов определяются множествами индексов s и t, $\max\{s_j, t_j,\ j = \overline{1,d}\} \leq k$, $k = n, n+1, \ldots$. В таком случае, очевидно, что

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{3} f_j^n(x,y), \tag{10}$$

причем функции $f_1^n(x,y)$ и $f_2^n(x,y)$, в свою очередь, могут быть представлены в виде

$$f_j^n(x,y) = \sum_{i=1}^{2^d|Q_n|} u_i^j(x) v_i^j(y) \tag{11}$$

с некоторыми функциями $u_i^j, v_i^j \in L_q(\pi_d)$, $j = 1, 2$.

Для заданного $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq d)$ пусть $M \in \mathbb{N}$ такое, что

$$2^{d+1}|Q_m| \leq M < C|Q_m|, \tag{12}$$

где C — произвольная фиксированная постоянная, $C > 2^{d+1}$. Тогда с учетом (10) и (11) можем записать

$$\tau_{2M}(f)_q \leq \tau_M(f_3^m)_q,\ f \in L_q(\pi_{2d}),\ 1 \leq q \leq \infty. \tag{13}$$

Таким образом, согласно (13) оценка сверху величины $\tau_M(f)_q$ сводится к оценке $\tau_M(f_3^m)_q$ с m и M, связанными соотношением (12).

Для $f \in \mathbb{B}_{p,\theta}^r$ рассмотрим сначала случаи $p = q = 1$ и $p = q = \infty$. Исходя из (13), в силу неравенства Минковского имеем

$$\tau_{2M}(f)_q \leq \tau_M(f_3^m)_q \leq \left\| \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \mathbb{A}_{s,t} f \right\|_q \leq \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q =$$

$$= \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} 2^{r_1(|s|_1 + |t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q 2^{-r_1(|s|_1 + |t|_1)} =: J_1. \tag{14}$$

Дальнейшую оценку величины J_1 проведем для двух случаев: $\theta \in (1, \infty)$ и $\theta = 1$.

Воспользуемся неравенством Гельдера: для произвольных числовых последовательностей $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ при $1 < \gamma < \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1.$$

Итак, если $\theta \in (1, \infty)$, то в силу (15), учитывая (3), можем записать

$$J_1 \ll \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{-r_1\theta'(|s|_1+|t|_1)}\right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{-r_1\theta'(|s|_1+|t|_1)}\right)^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{16}$$

Поскольку для $l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}^d$ и $\alpha > 0$

$$\sum_{|l|_1>m} 2^{-\alpha|l|_1} \asymp \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha j} j^{d-1} \asymp 2^{-\alpha m} m^{d-1}, \tag{17}$$

из (16), учитывая (12), имеем

$$J_1 \ll 2^{-2r_1 m} m^{\frac{2(d-1)}{\theta'}} \asymp M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{\theta'}\right)}. \tag{18}$$

Сопоставляя (18) и (14), получаем

$$\tau_M(f)_q \ll M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{\theta'}\right)}.$$

В случае $\theta = 1$ имеем

$$J_1 \leq 2^{-2r_1 m} \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{r_1(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-2r_1 m} \|f\|_{B^r_{p,1}} \ll 2^{-2r_1 m} \asymp M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2r_1}$$

и, как следствие (14),

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2r_1}.$$

Очевидно, что такая же по порядку оценка справедлива и для $\tau_M(f)_q$.

При получении оценки сверху величины $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ в случае $1 \le p \le q \le 2$, $q \ne 1$, отправным снова является соотношение (13).

Итак, пусть $f \in \mathbb{B}^r_{p,\theta}$, числа M и m, как и ранее, связаны неравенствами (12), а s и t — d-мерные векторы с целыми неотрицательными координатами.

Определим числа

$$M_{s,t} = [C2^{m+\alpha(2m-|s|_1-|t|_1)}m^{1-d}],$$

где $[\,a\,]$ — целая часть числа $a \in \mathbb{R}$, а α и C — положительные постоянные, значения которых далее уточняются. Тогда согласно (17) имеем

$$\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M_{s,t} \le C \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{m+\alpha(2m-|s|_1-|t|_1)}m^{1-d} =$$

$$= C2^{m+2\alpha m}m^{1-d} \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)} \asymp 2^m m^{d-1} \asymp M,$$

а при определенном выборе постоянной $C > 0$

$$\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M_{s,t} \le M. \tag{19}$$

Поэтому, используя простое следствие теоремы Литтлвуда – Пэли, а именно, неравенство

$$\|g\|_q \ll \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^d_+} \|\delta_s(g,\cdot)\|_q^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}}, \tag{20}$$

в котором $g \in L^0_q(\pi_m)$, $q^* := \min\{q, 2\}$, с учетом замечания в [8, с. 100], применяя лемму Б, можем записать

$$\tau^q_M(f^m_3)_q \ll \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} \tau^q_{M_{s,t}}(\mathbb{A}_{s,t}f)_q\,. \tag{21}$$

Но поскольку в силу леммы А

$$\tau_{M_{s,t}}(\mathbb{A}_{s,t}f)_q \ll M^{-\beta}_{s,t}2^{\beta(|s|_1+|t|_1)}\|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p$$

$\left(\text{здесь и далее } \beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$, то (21) влечет неравенство

$$\tau^q_M(f^m_3)_q \ll \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M^{-\beta q}_{s,t}2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\|\mathbb{A}_{s,t}f\|^q_p := J^q_2. \tag{22}$$

Оценку величины J_2 разобьем на два случая: $\theta \in [1, q]$ и $\theta \in (q, \infty)$.

Если $\theta \in [1, q]$, то с учетом неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\nu_2}\right)^{\frac{1}{\nu_2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\nu_1}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \infty, \tag{23}$$

которое выполняется для произвольной последовательности $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ [9, с. 43], получаем

$$J_2 \leq \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M_{s,t}^{-\beta\theta} 2^{\beta\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta 2^{-(r_1-\beta)\theta(|s|_1+|t|_1)} M_{s,t}^{-\beta\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$\ll \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta 2^{-(r_1-\beta)\theta(|s|_1+|t|_1)} 2^{-m\beta\theta-\alpha\beta\theta(2m-|s|_1-|t|_1)} m^{(d-1)\theta\beta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-m\beta-2\alpha m\beta} m^{(d-1)\beta} \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta 2^{-(r_1-\beta-\alpha\beta)(|s|_1+|t|_1)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} := J_3. \tag{24}$$

Далее, учитывая, что по условию теоремы в рассматриваемом случае $r_1 > \beta$, и выбирая число $\alpha > 0$ в определении чисел $M_{s,t}$ так, чтобы выполнялось неравенство $r_1 - \beta - \alpha\beta > 0$, имеем

$$J_3 \leq 2^{-m\beta-2\alpha m\beta} m^{(d-1)\beta} 2^{-(r_1-\beta-\alpha\beta)2m} \left(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-2mr_1+\beta m} m^{(d-1)\beta} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \ll 2^{-m(2r_1-\beta)} m^{(d-1)\beta} \asymp$$

$$\asymp M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2r_1}. \tag{25}$$

Сопоставляя соотношение (13) с (22), (24) и (25), можем записать

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2r_1}, \tag{26}$$

и такая же оценка остается справедливой и для $\tau_M(f)_q$.

Пусть теперь $\theta \in (q, \infty)$. Тогда, используя неравенство Гельдера (15) с показателем $\gamma = \dfrac{\theta}{q}$, получаем

$$J_2 \le \left(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} 2^{r_1 \theta (|s|_1 + |t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \left(2^{-r_1 q (|s|_1 + |t|_1)} M_{s,t}^{-\beta q} 2^{\beta q (|s|_1 + |t|_1)} \right)^{\frac{\theta}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \left(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \left(2^{-r_1 q (|s|_1 + |t|_1)} 2^{-\beta m q} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times 2^{-\alpha \beta q (2m - |s|_1 - |t|_1)} 2^{\beta q (|s|_1 + |t|_1)} m^{(d-1)\beta q} \right)^{\frac{\theta}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\beta m - 2m\alpha\beta} m^{(d-1)\beta} \left(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} 2^{-(|s|_1 + |t|_1)(r_1 - \alpha\beta - \beta) \frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\beta m - 2m\alpha\beta} m^{(d-1)\beta} 2^{-2m(r_1 - \alpha\beta - \beta)} m^{2(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} = 2^{-2mr_1 + m\beta} m^{(d-1)\left(\beta + \frac{2}{q} - \frac{2}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp M^{-2r_1 + \beta} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{27}$$

Сопоставляя (13) с (22) и (27), находим

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1 + \beta} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)}, \tag{28}$$

и такая же оценка, очевидно, справедлива и для $\tau_M(f)_q$.

Из соотношений (26) и (28), с учетом сделанных после них замечаний, следует оценка

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll M^{-2r_1 + \beta} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \tag{29}$$

в случае $1 \le p \le q \le 2$, $q \ne 1$, $1 \le \theta < \infty$.

Перейдем к установлению оценок величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{1,\theta})_q$ при $2 \leq q \leq \infty$ и отметим, что общая схема рассуждений аналогична той, которая применялась в предыдущих случаях.

Пусть сначала $q \in [\,2, \infty\,)$. Для $m \in \mathbb{N}$ представим функцию f_3^m в разложении (10) функции $f \in \mathbb{B}^r_{1,\theta}$ в виде

$$f_3^m(x,y) = \sum_{\substack{\mu>m \\ \nu>m}} f_{\mu,\nu}(x,y), \tag{30}$$

где для натуральных чисел μ и ν

$$f_{\mu,\nu}(x,y) = \sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} \mathbb{A}_{s,t} f(x,y), \tag{31}$$

а $\theta_k := \{s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d : |s|_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Далее, для числа M, удовлетворяющего неравенствам (12), полагаем

$$M_{(\mu,\nu)} = [M 2^{\alpha(2m-\mu-\nu)-1}] \tag{32}$$

(значение $\alpha > 0$ будет определено позже). При этом заметим, что

$$\sum_{\substack{\mu>m \\ \nu>m}} M_{(\mu,\nu)} \leq 1 + M \sum_{\substack{\mu\geq m \\ \nu\geq m}} 2^{\alpha(2m-\mu-\nu)-1} \leq M. \tag{33}$$

Тогда из (13), учитывая (33), имеем

$$\tau_{2M}(f)_q \leq \sum_{\substack{\mu>m \\ \nu>m}} \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q, \tag{34}$$

и исходная задача сводится к надлежащей оценке величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q$, использующей, в свою очередь (в качестве промежуточной) оценку величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2$, т. е. к случаю $q = 2$.

Покажем сначала, что

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2 \ll \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\mathbb{B}^\rho_{1,\theta})_2 2^{-\rho_1(\mu+\nu)}, \tag{35}$$

где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$, $\rho_i = \dfrac{r_i}{2}$, $i = \overline{1,d}$.

В самом деле, (35) является следствием цепочки соотношений

$$\|f_{\mu,\nu}\|_{B^\rho_{1,\theta}} \asymp \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{\rho_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f_{\mu,\nu}\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f_{\mu,\nu}\|_1^\theta 2^{(\rho_1-r_1)\theta(|s|_1+|t|_1)} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{(\rho_1 - r_1)(\mu+\nu)} \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{r_1\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f_{\mu,\nu}\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{(\rho_1 - r_1)(\mu+\nu)} \|f_{\mu,\nu}\|_{B^r_{1,\theta}} = 2^{-\frac{r_1}{2}(\mu+\nu)} \|f_{\mu,\nu}\|_{B^r_{1,\theta}}.$$

Но согласно рассмотренному выше случаю $1 < q \le 2$ можем записать

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\mathbb{B}^\rho_{1,\theta})_2 \ll M_{(\mu,\nu)}^{-2\rho_1+\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M_{(\mu,\nu)})^{2\rho_1 + \left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}.$$

Объединяя это соотношение с (35) и учитывая также, что $\rho_1 = \dfrac{r_1}{2}$, приходим к неравенству

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2 \ll 2^{-\frac{r_1}{2}(\mu+\nu)} M_{(\mu,\nu)}^{-r_1+\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M_{(\mu,\nu)})^{r_1 + \left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}. \qquad (36)$$

Далее, для оценки величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q$ при $2 < q < \infty$ используем вначале соотношение (7), затем $\|f_{\mu,\nu}\|_2$ оцениваем сверху в соответствии с леммой Б и, наконец, применяем оценку (36). Таким образом, получаем

$$\tau_{2M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q \ll M_{(\mu,\nu)}^{-1} 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2 \ll$$

$$\ll M_{(\mu,\nu)}^{-r_1-\frac{1}{2}} 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{r_1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} (\log^{d-1} M_{(\mu,\nu)})^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}. \qquad (37)$$

Сопоставляя (37) с (34), с учетом значений чисел $M_{(\mu,\nu)}$ приходим к неравенству

$$\tau_{2M}(f)_q \le \sum_{\substack{\mu>m \\ \nu>m}} M_{(\mu,\nu)}^{-r_1-\frac{1}{2}} 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{r_1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} (\log^{d-1} M_{(\mu,\nu)})^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} \sum_{\substack{\mu>m \\ \nu>m}} 2^{-\left(r_1+\frac{1}{2}\right)\alpha(2m-\mu-\nu)} 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)(1-r_1)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} 2^{-(2r_1+1)\alpha m} \sum_{\substack{\mu>m \\ \nu>m}} 2^{\left(r_1\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}-\frac{r_1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}}. \qquad (38)$$

Теперь, выбирая α так, чтобы выполнялось неравенство $r_1\alpha + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{r_1}{2} < 0$, т. е. $\alpha < \dfrac{r_1-1}{2r_1+1}$, из (38) находим

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} 2^{m(1-r_1)} m^{d-1} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} M^{1-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1-1} \log^{d-1} M =$$

$$= M^{-2r_1+\frac{1}{2}}(\log^{d-1} M)^{2r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}, \tag{39}$$

и эта оценка имеет место (принимая во внимание также (36)) при всех $q,\ 2 \le q < \infty$, и для $\tau_M(f)_q$.

Для доказательства (39) в случае $q = \infty$ достаточно использовать в предыдущих выкладках в качестве промежуточной оценки вместо (7) соотношение (8).

Теорема доказана.

В следующей теореме получены оценки величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ в случае $2 \le p \le q \le \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le \theta < \infty$ *и* $r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тогда при* $2 \le p \le q < \infty$

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll M^{-2r_1}(\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \tag{40}$$

и при $2 \le p < \infty$

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_\infty \ll M^{-2r_1}(\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}. \tag{41}$$

Доказательство. Как и при установлении оценок сверху в теореме 1, отправным является разложение (10), в котором функции f_j^n определены по формулам (9) с заменой $\mathbb{A}_{s,t}f(x,y)$ на

$$\delta_{s,t}f(x,y) = \sum_{\substack{k\in\rho(s)\\ l\in\rho(t)}} \widehat{f}(k,l)e^{i((k,x)+(l,y))}. \tag{42}$$

Тогда при оценке $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ за исходное примем соотношение, подобное (34), т. е.

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \sum_{\mu,\nu=m+1}^{\infty} \tau_{M(\mu,\nu)}(\overline{f}_{\mu,\nu})_q \qquad \forall f\in L_q(\pi_{2d}), \tag{43}$$

где M и m связаны неравенствами (12), функции $\overline{f}_{\mu,\nu}$ определены по формуле

$$\overline{f}_{\mu,\nu}(x,y) = \sum_{\substack{s\in\theta_\mu\\ t\in\theta_\nu}} \delta_{s,t}f(x,y), \tag{44}$$

а числа $M_{(\mu,\nu)}$ — те же, что и в (32): $M_{(\mu,\nu)} = [M2^{\alpha(2m-\mu-\nu)-1}]$.

Для дальнейшей оценки правой части (43), когда $f\in\mathbb{B}^r_{p,\theta}$, понадобится оценка величин $\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p$. Рассмотрим два случая: $1\le\theta\le p^*$ и $p^*<\theta$, где $p^* = \min\{p,2\}$. Сначала, в силу неравенства (20), можем записать

$$\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p = \left\|\sum_{\substack{s\in\theta_\mu\\ t\in\theta_\nu}} \delta_{s,t}f\right\|_p \ll \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu\\ t\in\theta_\nu}} \|\delta_{s,t}f\|_p^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} =$$

$$= \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{r_1 p^*(\mu+\nu)} \|\delta_{s,t} f\|_p^{p^*} 2^{-r_1 p^*(\mu+\nu)} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{45}$$

В случае $1 \leq \theta \leq p^*$, используя неравенство (23), из (45) получаем

$$\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p \ll 2^{-r_1(\mu+\nu)} \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{r_1(\mu+\nu)\theta} \|\delta_{s,t} f\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1(\mu+\nu)} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \leq 2^{-r_1(\mu+\nu)}. \tag{46}$$

Если же $p^* < \theta$, то применяя к правой части (45) неравенство Гельдера (15) с показателем $\gamma = \dfrac{\theta}{p^*}$, находим

$$\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p \ll \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{r_1(\mu+\nu)\theta} \|\delta_{s,t} f\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{-r_1(\mu+\nu)\frac{\theta p^*}{\theta - p^*}} \right)^{\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \left(\sum_{\substack{s\in\theta_\mu \\ t\in\theta_\nu}} 2^{-r_1(\mu+\nu)\frac{\theta p^*}{\theta - p^*}} \right)^{\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-r_1(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{47}$$

Таким образом, объединяя (46) и (47), можем записать

$$\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p \ll 2^{-r_1(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \qquad p^* = \min\{p, 2\}. \tag{48}$$

Далее, применяя к оценке $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\overline{f}_{\mu,\nu})_q$ лемму В (учитывая вид функции $\overline{f}_{\mu,\nu}$), а также (48) с $p^* = 2$, находим:

(а) в случае $2 \leq p \leq q < \infty$

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\overline{f}_{\mu,\nu})_q \ll M^{-1}_{(\mu,\nu)} 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} \|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_2 \ll$$

$$\ll M^{-1}_{(\mu,\nu)} 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} 2^{-r_1(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= M^{-1}_{(\mu,\nu)} 2^{-\left(r_1-\frac{1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}; \tag{49}$$

(б) в случае $2 \leq p < \infty$, $q = \infty$

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\overline{f}_{\mu,\nu}) \ll M_{(\mu,\nu)}^{-1} 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} 2^{-r_1(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= M_{(\mu,\nu)}^{-1} 2^{-(r_1-\frac{1}{2})(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)(1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+)}. \tag{50}$$

Соотношение (49) с учетом (43) влечет соответствующую оценку сверху для $\tau_{2M}(f)_q$, $f \in \in \mathbb{B}^r_{p,\theta}$, при $2 \le p \le q < \infty$:

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \sum_{\mu,\nu=m+1}^{\infty} M_{(\mu,\nu)}^{-1} 2^{-\left(r_1-\frac{1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \ll$$

$$\ll \sum_{\mu,\nu=m+1}^{\infty} M^{-1} 2^{-\alpha(2m-\mu-\nu)} 2^{-\left(r_1-\frac{1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} =$$

$$= M^{-1} 2^{-2\alpha m} \sum_{\mu,\nu=m+1}^{\infty} 2^{-\left(r_1-\frac{1}{2}-\alpha\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}. \tag{51}$$

Выбрав $\alpha > 0$ в определении чисел $M_{(\mu,\nu)}$ так, чтобы выполнялось неравенство $r_1 - \dfrac{1}{2} - \alpha > 0$ $\left(\text{это можно сделать, поскольку по условию теоремы } r_1 > \dfrac{1}{2}\right)$, из (51), учитывая (12), получаем

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-1} 2^{-2\alpha m} 2^{-2m\left(r_1-\frac{1}{2}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2mr_1} m^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}, \tag{52}$$

такая же оценка справедлива и для $\tau_M(f)_q$.

Наконец, при $2 \le p < \infty$, $q = \infty$, сопоставляя оотношения (50) и (43), по аналогии с предыдущим случаем находим

$$\tau_M(f)_\infty \ll 2^{-2mr_1} m^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \asymp M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}. \tag{53}$$

Из соотношений (52) и (53) следуют требуемые оценки сверху в теореме 2 для $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$.

Теоремами 1 и 2 не охвачен случай $1 \le p < 2 < q \le \infty$. Оценки сверху величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ в этом случае установлены в следующем утверждении.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le \theta < \infty$, $1 \le p < 2 < q \le \infty$ *и* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тогда*

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll M^{-2r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)+\eta(p)}, \quad 2 < q < \infty,$$

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_\infty \ll M^{-2r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)+\eta(p)},$$

где

$$\eta(p)=\begin{cases}0 & \textit{при}\ \ \dfrac{1}{p}<r_1\le\dfrac{3}{2p}-\dfrac{1}{4},\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p} & \textit{при}\ \ r_1>\dfrac{3}{2p}-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1 и 2. Основное отличие состоит в использовании вместо лемм Б и В следующего утверждения.

Лемма Г [7]. *Пусть* $g\in T(Q_\mu,Q_\nu,2d)$, $\mu,\nu,d\in\mathbb{N}$. *Тогда при* $1<p<2<q<\infty$ *и* $M\in\mathbb{Z}_+$

$$\tau_M(g)_q\ll\begin{cases}\min\{1,M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}2^{\frac{1}{p}(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{p}}\|g\|_p\,,\\[2ex] \min\{1,M^{-\frac{2}{p}}\}2^{(\frac{3}{2p}-\frac{1}{4})(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{p}}\|g\|_p\,.\end{cases}\tag{54}$$

При $1<p<2$, $q=\infty$

$$\tau_M(f)_\infty\ll$$

$$\ll\begin{cases}\min\{1,M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}2^{\frac{1}{p}(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)}\left(\log\left(1+\dfrac{|Q_\mu|}{M+1}\right)\log\left(1+\dfrac{|Q_\nu|}{M+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_p\,,\\[2ex] \min\{1,M^{-\frac{2}{p}}\}2^{\left(\frac{3}{2p}-\frac{1}{4}\right)(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)}\left(\log\left(1+\dfrac{|Q_\mu|}{M+1}\right)\log\left(1+\dfrac{|Q_\nu|}{M+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_p\,.\end{cases}\tag{55}$$

***Доказательство теоремы* 3.** Если $f\in\mathbb{B}^r_{p,\theta}$, а функции $\overline{f}_{\mu,\nu}$ и числа $M_{(\mu,\nu)}$ определены соответственно формулами (44) и (32), то, используя соотношение (54), с учетом (48) вначале находим

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\overline{f}_{\mu,\nu})_q\ll M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{p}(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{p}}\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p\ll$$

$$\ll M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}2^{\left(\frac{1}{p}-r_1\right)(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}\tag{56}$$

при $2<q<\infty$ и $\dfrac{1}{p}<r_1<\dfrac{3}{2p}-\dfrac{1}{4}$ и

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\overline{f}_{\mu,\nu})_q\ll M_{(\mu,\nu)}^{-\frac{2}{p}}2^{\left(\frac{3}{2p}-\frac{1}{4}\right)(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{p}}\|\overline{f}_{\mu,\nu}\|_p\ll$$

$$\ll M_{(\mu,\nu)}^{-\frac{2}{p}}2^{\left(\frac{3}{2p}-\frac{1}{4}-r_1\right)(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}\tag{57}$$

при $r_1>\dfrac{3}{p}-\dfrac{1}{4}$.

Сопоставляя (56) и (43), с учетом значений чисел $M_{(\mu,\nu)}$ получаем

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \sum_{\mu,\nu=m+1}^{\infty} M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-d\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)(2m-\mu-\nu)} 2^{\left(\frac{1}{p}-r_1\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} =$$

$$= M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\alpha m-\frac{2\alpha m}{p}} \sum_{\mu,\nu=m+1}^{\infty} 2^{(\mu+\nu)\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{p}-r_1\right)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}. \qquad (58)$$

Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{1}{p}-r_1 < 0$ $\Big($это можно сделать вследствие условия $r_1 > \dfrac{1}{p}\Big)$. Тогда, выполняя элементарные преобразования в правой части (58) с учетом (12), находим

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \qquad (59)$$

для $f \in \mathbb{B}^r_{p,\theta}$ при $1<p<2<q$, $\dfrac{1}{p}<r_1\leq \dfrac{3}{2p}-\dfrac{1}{4}$.

Аналогично в случае $r_1 > \dfrac{3}{2p}-\dfrac{1}{4}$, используя неравенство (57) вместо (56), получаем

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}. \qquad (60)$$

Соотношения (59) и (60) влекут оценки величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})$ в теореме 3 при всех p и q, $1<p<$ $<2<q<\infty$.

Аналогичным образом получаем оценки сверху и в случае $1<p<2$, $q=\infty$, используя на начальном этапе соотношение (55) и принимая во внимание, что $|Q_m| \asymp 2^m m^{d-1}$.

В заключительной части отметим один случай соотношений между параметрами p и q, когда можно показать, что оценки сверху величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})$, установленные в теоремах 1 – 3, являются точными по порядку. С этой целью предварительно сформулируем несколько утверждений $\big($следствий из результатов работы [10] об оценках снизу величин $\tau_M(\overline{\mathbb{B}}^r_{p,\theta})\big)$. Здесь $\overline{\mathbb{B}}^r_{p,\theta}$ — класс функций $g(x,y)$ $2d$ переменных вида $g(x,y)=f(x-y)$, где $f(t)$, $t=(t_1,\ldots,t_d)$, как функция d переменных, принадлежит классу $\mathbb{B}^{2r}_{p,\theta}$ (т. е. классу из пространства $B^{2r}_{p,\theta}$ при $m=d$ в его исходном определении). Чтобы зафиксировать последнее, будем полагать, что $f \in \mathbb{B}^{2r}_{p,\theta}(d)$ вместо $f \in \mathbb{B}^r_{p,\theta}$.

Покажем, что $\|g\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \|f\|_{B^{2r}_{p,\theta}(d)}$.

В самом деле, пусть $u=(u_1,\ldots,u_{2d})=(s_1,\ldots,s_d,t_1,\ldots,t_d)\in\mathbb{Z}^{2d}_+$, $r=(r_1,\ldots,r_1)\in\mathbb{R}^{2d}_+$ и $\overline{r}=(r_1,\ldots,r_1)\in\mathbb{R}^d_+$ — векторы с положительными координатами. Тогда

$$\|g\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{u\in\mathbb{N}^{2d}} 2^{(u,r)\theta}\|A_u(g,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\sum_{t\in\mathbb{N}^d} 2^{(s,\overline{r})\theta}2^{(t,\overline{r})\theta}\|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{(s,2r)\theta}\|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теперь на основании изложенного и вследствие оценок величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$, установленных в [10], приходим к следующим утверждениям.

***Следствие* 1.** *Пусть* $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta < \infty$ *и* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тогда при* $2 \leq q < \infty$

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \gg M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log^{d-1} M)^{2r_1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{\theta}}.$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $1 \leq \theta < \infty$ *и* $r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тогда при* $2 \leq p < q \leq \infty$

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \gg M^{-2r_1}(\log^{d-1} M)^{2r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Сопоставляя теорему 2 и следствие 2, можем утверждать справедливость такой теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $r_1 > \dfrac{1}{2}$, $2 \leq p < q < \infty$. *Тогда*

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,2})_q \asymp M^{-2r_1}(\log^{d-1} M)^{2r_1}.$$

1. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)_*}_{p,\theta}B$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
5. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского – Бесова // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 685 – 697.
6. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 – 252.
7. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **181**. – С. 250 – 267.
8. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
10. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.

Получено 16.05.13