УДК 513.835

Ю. Б. Зелинский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О КРАТНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ

We prove that either the proper mapping of a domain of n-dimensional manifold onto a domain of another n-dimensional manifold of degree k should be the interior mapping or a point in the image exists that possesses not less than $|k|+2$ original preimages. If the restrictions f on the interior of domain is the zero-dimensional mapping, than in the second case mentioned above, a set of points of image possessing not less than $|k|+2$ original preimages contains a subset of complete dimensionality n.

In addition, we construct an example of the mapping of two-dimensional domain such that this mapping is gomeomoprphic on a boundary, zero-dimensional, of infinite multiplicity, and whose restrictions on sufficiently large part of the branch set is a gomeomorphism.

Доведено, що або власне відображення області n-вимірного многовиду на область іншого n-вимірного многовиду степеня k буде внутрішнім відображенням, або існує точка в образі, яка має не менше ніж $|k|+2$ прообрази. Якщо ж обмеження f на внутрішність області є нульвимірним відображенням, то у другому випадку множина точок образу, що мають не менше ніж $|k|+2$ прообрази, містить підмножину повної розмірності n.

Крім цього, побудовано приклад відображення двовимірної області, гомеоморфного на межі, нульвимірного, що має нескінченну кратність і обмеження якого на досить велику частину множини розгалуження є гомеоморфізмом.

В работе [1] установлено, что или непрерывное отображение замкнутой области на n-мерном многообразии, которое на границе области имеет нечетную степень отображения, является гомеоморфизмом, или существует точка в образе области, прообраз которой содержит не менее трех точек. Если ограничение f на внутренность области — нульмерное отображение, то во втором случае множество точек образа, имеющих не менее трех прообразов, содержит подмножество полной размерности n.

В настоящей работе показано, что или собственное отображение области n-мерного многообразия на область другого n-мерного многообразия степени k является внутренним отображением, или существует точка в образе, имеющая не меньше чем $|k|+2$ прообраза. Если же ограничение f на внутренность области — нульмерное отображение, то во втором случае множество точек образа, имеющих не менее чем $|k|+2$ прообраза, содержит подмножество полной размерности n.

Кроме того, построен пример отображения двумерной области, гомеоморфного на границе, нульмерного, имеющего бесконечную кратность и ограничение которого на довольно большую часть множества ветвления является гомеоморфизмом.

Определение 1. *Если X и Y — локально компактные пространства, то отображение $f: X \to Y$ называется собственным, если прообраз произвольного компакта, принадлежащего Y, есть компакт в X.*

Определение 2. *Точка x называется точкой взаимной однозначности, если $x = f^{-1}(x)$.*

Лемма 1. *Пусть $f\colon \overline{D} \to \overline{D_1}$ — непрерывное отображение замкнутых ограниченных областей, такое, что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда или ограничение $f|D$ — гомеоморфизм, или существует точка в образе, имеющая не меньше двух прообразов; если же ограничение $f|D$ — нульмерно, то во втором случае множество точек, имеющих не меньше двух прообразов, имеет полную размерность, т. е. содержит открытое в D_1 подмножество.*

Доказательство. Естественно предположить, что ограничение $f|D$ — нульмерно и не является гомеоморфизмом, иначе очевидно выполнено одно из утверждений леммы. В силу того, что нульмерное отображение не понижает размерности, существует точка $y \in \operatorname{int} f(D)$ такая, что $f^{-1}y$ содержит не менее двух точек. Пусть точки x_1 и x_2 принадлежат $f^{-1}y$.

Рассмотрим непересекающиеся окрестности этих точек $U(x_1)$ и $U(x_2)$; ясно, что образы $f(U(x_1))$ и $f(U(x_2))$ имеют общие точки (по крайней мере, точку y).

Если множество $f(U(x_1)) \cap f(U(x_2))$ содержит открытое множество V, то оно и будет искомым, поскольку каждая его точка имеет как минимум два прообраза: один в $U(x_1)$, другой в $U(x_2)$. Если же внутренность пересечения $f(U(x_1)) \cap f(U(x_2))$ пуста, то для произвольной окрестности $V(y)$ точки y ограничение f на множество $W_1 = f(U(x_1)) \cap f^{-1}(V(y))$ не может быть открытым в точке x_1 отображением и отображаться на всю окрестность $V(y)$, однако в силу собственности f ограничение его на множество W_1 замкнуто. Следовательно, образ $f(W_1)$ будет замкнутым подмножеством окрестности $V(y)$.

Отсюда следует, что отображение f индуцирует тривиальное отображение групп когомологий

$$f_1^*\colon H^n(\overline{V}(y), \partial V) \to H^n(\overline{W_1}, \partial \overline{W_1}).$$

Кроме того, образ множества W_1 содержит внутренние точки. Выберем одну из таких точек y_0 и некоторую окрестность $G(y_0)$ этой точки, лежащую внутри $V(y)$. Внутри этого множества не может быть плотного множества точек, имеющих по одному прообразу. Иначе согласно теореме 2 [2] ограничение f на $f^{-1}(G(y_0))$ было бы гомеоморфизмом. Но тогда ограничение отображения f на множество $f^{-1}(G(y_0))$ индуцирует изоморфизм групп когомологий

$$f_3^*\colon H^n\left(\overline{G(y_0)}, \overline{\partial G(y_0)}\right) \to H^n\left(\overline{f^{-1}G(y_0)}, \overline{\partial f^{-1}G(y_0)}\right),$$

что противоречит коммутативной диаграмме групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc}
H^n\left(\overline{G(y_0)}, \overline{\partial G(y_0)}\right) & \xleftarrow{\approx i^*} & H^n\left(\overline{V}, \overline{V \setminus G}\right) & \xrightarrow{\approx i_1^*} & H^n(\overline{V}, \partial V) \approx Z \\
\approx\downarrow f_3^* & & \approx\downarrow f_2^* & & \approx\downarrow f_1^* \\
H^n\left(\overline{f^{-1}G(y_0)}, \overline{\partial f^{-1}G(y_0)}\right) & \xleftarrow{\approx j^*} & H^n\left(\overline{W}, \overline{W \setminus f^{-1}(G)}\right) & \xrightarrow{\approx j_1^*} & H^n(\overline{W}, \partial W),
\end{array}$$

в которой изоморфизмы i^*, i_1^*, j^*, j_1^* получаются как гомоморфизмы, соответствующие теоремам о вырезании [3]. С одной стороны, f_1^* — тривиальный гомоморфизм, а с другой — $f_1^* = j_1^*(j^*)^{-1} f_3^* i^*(i_1^*)^{-1}$ — изоморфизм ненулевой группы. Следовательно, внутри $V(y)$ существует открытое всюду плотное множество точек, имеющих не меньше двух прообразов.

Лемма доказана.

Следствие. *Если $f: \overline{D} \to \overline{D_1}$ — нульмерное отображение нулевой степени, то в образе существует открытое множество, каждая точка которого имеет не менее двух прообразов.*

Лемма 2. *Пусть $f: \overline{D} \to \overline{D_1}$ — непрерывное отображение областей степени k, такое, что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда множество точек образа, имеющих не менее $|k|$ прообразов, содержит открытое всюду плотное в образе множество.*

Доказательство. Пусть существует открытое в образе подмножество V точек, каждая из которых имеет менее $|k|$ точек в прообразе. Тогда f — конечнократное отображение, в каждой точке которого существует локальная степень отображения, и поэтому множество ветвления B_f (множество точек, в которых f не будет локальным гомеоморфизмом) имеет размерность не выше $n-1$ [4] и образ $f(B_f)$ нигде не плотен в образе. Следовательно, существует точка $y \in V \setminus f(B_f)$ такая, что в каждой точке прообраза $x \in f^{-1}y$ отображение f является локальным гомеоморфизмом и степень отображения не может быть равной k, так как прообразов точки y меньше $|k|$, и в каждой точке $x \in f^{-1}y$ локальная степень $|\gamma(x)| = 1$.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $f: \overline{D} \to \overline{D_1}$ — непрерывное отображение областей степени k, такое, что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда или f — внутреннее отображение, или существует точка, имеющая не меньше чем $|k| + 2$ прообраза. Если же f — нульмерное отображение, то во втором случае множество точек, имеющих не менее чем $|k| + 2$ прообраза, имеет полную размерность.*

Доказательство. Как и в лемме 1, не нарушая общности можно считать, что f — нульмерное отображение. Дальнейшее доказательство проведем по индукции. При $k = 0$ теорема доказана в лемме 1, при $|k| = 1$ — в [1]. Предположим, что теорема доказана для $|k| = m$, и докажем ее для $|k| = m + 1$.

Пусть каждая точка некоторого открытого множества в образе имеет ровно $|k|$ прообразов. Тогда аналогично лемме 2 в каждой точке прообраза локальная степень $|\gamma(x)| = 1$. Более того, во всех точках она должна иметь один знак, иначе согласно „принципу аргумента” для локальной степени получим противоречие. Но тогда $f|_{f(V)}^{-1}$ — внутреннее отображение. Если $f|_{f(V)}^{-1}$ не является внутренним на всех компонентах, то разобьем прообраз V на объединение двух множеств. Пусть W_1 — объединение компонент прообраза, где ограничение f — внутреннее отображение. Тогда $f|_{W_1}: W_1 \to V$ — внутреннее отображение кратности $|k_1|$, где $|k_1| \le |k|$. Оно имеет в V плотное открытое множество точек, для каждой из которых существует ровно $|k_1|$ прообразов. Ограничение f на множество $W_2 = f^{-1}(V) \setminus W_1$ не является внутренним и имеет степень $k_2 = k - k_1$. Тогда согласно предположению индукции существует открытое подмножество $U \subset V$, имеющее для каждой точки $y \in U$ не менее $|k_2| + 2$ прообраза. Следовательно, для некоторого открытого подмножества $U_0 \subset U$ каждая точка имеет $|k_1|$ прообраз в W_1 и не менее чем $|k_2| + 2$ прообраза в W_2 и всего не менее чем

$$|k_1| + |k_2| + 2 \geq |k_1 + k_2| + 2 \geq |k| + 2$$

прообраза.

Теорема доказана.

Замечание. Применение минимальных носителей коцикла [5] и использованная при этом техника позволяют аналогично показать, что теорема остается справедливой, если отображение f будет многозначным отображением с ациклическими образами.

Дальнейшая наша цель — построение бесконечнократного отображения квадрата на квадрат, тождественного на части множества ветвления, которое включает в себя декартово произведение отрезка на канторово множество.

Пусть $\Theta(x)$ — канторова лестница [6], заданная на отрезке [0, 1]. Рассмотрим отображение отрезка

$$f(x) = \begin{cases} 3x/2, & 0 \leq x \leq 1/3; \\ (3x - \Theta(3x-1))/2, & 1/3 \leq x \leq 2/3; \\ (3x-1)/2, & 1/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Легко убедиться, что функция f возрастает на открытом всюду плотном подмножестве отрезка [0, 1], а в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$ принимает одинаковые значения. Тогда согласно [7] существует множество второй категории точек в образе, имеющих бесконечное число прообразов.

Перейдем к построению отображения квадрата. Разделим квадрат $[0, 1] \times \times [0, 1]$ по оси Ox на три равных прямоугольника. В среднем прямоугольнике выберем два непересекающихся ромба A_1, A_2 с диагоналями, параллельными осям координат. Одна пара диагоналей соединяет точки (1/3, 1/4) и (2/3, 1/4), (1/2, 1/8) и (1/2, 3/8) соответственно, а другая — (1/3, 3/4) и (2/3, 3/4), (1/2, 5/8) и (1/2, 7/8) соответственно. Пусть $\varphi(x)$ — линейный гомеоморфизм отрезка на вертикальную диагональ ромба. Тогда суперпозиция $\psi_1 = \varphi f \varphi^{-1}$ отображает эту диагональ на себя непрерывным отображением, имеющим массивное множество бесконечнократных точек. Распространим отображение ψ_1 на весь ромб как естественное продолжение на надстройку (рассматриваем ромб как надстройку вертикальной диагонали). Аналогичное отображение построим и для второго ромба. Заметим, что на границах ромбов построенные отображения ψ_1, ψ_2 являются гомеоморфизмами. Далее по аналогии рассмотрим оставшиеся два прямоугольника $0 \leq x \leq 1/3$ и $2/3 \leq x \leq 1$ при $0 \leq y \leq 1$. Разделим каждый прямоугольник на три равных квадрата по вертикали. В каждом из полученных шести квадратов зададим аналогичные, уменьшенные в три раза копии отображений ψ_1 и ψ_2. Повторяя далее процесс деления и построения отображений ψ счетное число раз, получим отображение некоторого счетного числа ромбов в себя. Дополним эту систему отображений до отображения квадрата тождественным гомеоморфизмом в точках, где еще отображение неопределено.

Полученное таким образом отображение:

1) имеет в образе открытое множество точек бесконечной кратности;

2) каждая точка декартового произведения канторова множества K на отрезок [0, 1] $Q = K \times [0, 1]$ отображается тождественно, отображение f не гомеоморфное только в интервалах смежности к канторовому множеству отрезка оси Ox;

3) каждая точка множества Q принадлежит множеству ветвления отображения f (система ромбов по построению имеет предельными точками все точки множества);

4) отображение f — гомеоморфизм на границе квадрата.

В связи с полученным в работе результатом и результатами работы [1] интересен вопрос о минимальной кратности отображения конкретной области, если известна степень отображения на границе. В частности, какова минимальная кратность отображения n-мерного листа Мебиуса в n-мерный шар, если отображение на границе является гомеоморфизмом или отображением степени один? Существует ли такое отображение при $n \geq 3$, имеющее кратность не выше трех?

1. *Зелинский Ю. Б.* О некоторых проблемах Косинского // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 4. – С. 510–516.
2. *Трохимчук Ю. Ю., Бондарь А. В.* О локальной степени нульмерного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений. – 1969. – Вып. 1. – С. 221–241.
3. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
4. *Church P. T., Hemmingsen E.* Light open mappings on manifolds // Duke Math. J. – 1961. – **27**, № 4. – P. 351–372.
5. *Зелинский Ю. Б.* Применение теории пучков к исследованию непрерывных отображений // Десятая математическая школа (Кацивели / Нальчик, 1972). – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 260–269.
6. *Натансон И. П.* Теория функций действительного переменного. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
7. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения областей евклидова пространства // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 2. – С. 196–211.

Получено 22.06.2004