УДК 517.923

А. А. Мохонько (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ТЕОРЕМЕ МАЛЬМКВИСТА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

The statement of Malmquist's theorem (1913) about the growth of meromorphic solutions of the differential equation $f' = \dfrac{P(z, f)}{Q(z, f)}$, where $P(z, f)$, $Q(z, f)$ are polynomials in all variables, is proved for the case of solutions with isolated singularity at infinity.

Твердження теореми Мальмквіста (1913) про ріст мероморфних розв'язків диференціального рівняння $f' = \dfrac{P(z, f)}{Q(z, f)}$, де $P(z, f)$, $Q(z, f)$ — поліноми по всіх змінних, доводиться для випадку розв'язків з ізольованою особливою точкою в нескінченності.

Используем обозначения теории мероморфных функций [1]. Символы Ландау $o(\ldots)$, $O(\ldots)$ рассматриваются при $r \to \infty$. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f' = \frac{P(z, f)}{Q(z, f)} = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1}(z) f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2}(z) f^j}, \tag{1}$$

где $p_{jq}(z)$ — многочлены. Если в (1) $\deg_f P \le 2$, $\deg_f Q = 0$, то получаем уравнение Риккати $f' = a_2(z) f^2 + a_1(z) f + a_0(z)$, где $a_i(z)$ — рациональные функции.

Известна следующая теорема Мальмквиста [2; 3, с. 67, 68]: если уравнение (1) не есть уравнение Риккати, то любое его мероморфное решение является рациональной функцией. Утверждение, эквивалентное теореме Мальмквиста, можно сформулировать в терминах неванлинновских характеристик [4] (историю вопроса и библиографию см. в [5, 6]): *пусть однозначная мероморфная функция* $f(z)$, $z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$, *— решение дифференциального уравнения* (1); *если* (1) *не есть уравнение Риккати, то рост решения не превышает роста коэффициентов:*

$$T(r, f) = O\left(\sum_{j,q} T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r).$$

В настоящей статье эта теорема распространяется на решения с логарифмической особой точкой в ∞, а затем на решения с изолированной особой точкой.

Уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не могут иметь в интегралах подвижных трансцендентных и существенно особых точек [3, с. 54], однако могут иметь неподвижные трансцендентные и существенно особые точки. Например, интеграл уравнения $2zff' = 1$ имеет вид $f(z) = \sqrt{\ln(z/C)}$, $C = \text{const}$; функция $f(z) = \exp\left(\ln^2 z\right)$ — решение уравнения $zf' = 2f \ln z$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1), где

$$p_{jq}(z) = h_{jq}(z) z^{a_{jq}} (\ln z)^{b_{jq}}, \quad h_{jq}(z) = c_{jq} + o(1), \quad c_{jq} \in \mathbb{C}, \quad c_{t1}, c_{s2} \ne 0, \tag{2}$$

a_{jq}, $b_{jq} \in \mathbb{R}$, $p_{jq}(z)$, $z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$, — аналитические функции. Будем предполагать, что асимптотические соотношения (2) выполняются равномерно по θ в любой угловой области, а именно: $(\forall\, \alpha, \beta: -\infty < \alpha < \beta < +\infty)$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$: $h_{jq}(z) = c_{jq} + v_{jq}(z)$, $|v_{jq}(z)| < \varepsilon$, $z \in \{z = re^{i\theta}: d \le r < +\infty,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$, $v_{jq}(z)$ — некоторая аналитическая функция.

Через A_l обозначим множество аналитических в $G = \{z: r_0 \le |z| < \infty\}$ функций, для которых ∞ является единственной особой точкой — логарифмической особой точкой. Множество A_l является коммутативным кольцом без делителей нуля (целостным кольцом). Через M_l обозначим поле частных кольца A_l (каждое целостное кольцо можно погрузить в некоторое поле [7 с. 52, 58]): $A_l \subset M_l$. Если $f \in A_l$, то будем говорить, что $f(z)$, $z \in G$, — функция с изолированной логарифмической особой точкой в ∞. Если $f \in M_l$, то функция $f(z)$, $z \in G$, называется мероморфной функцией с логарифмической особой точкой (ниже дано эквивалентное определение мероморфной функции с логарифмической особой точкой, основанное на понятии аналитического продолжения).

Пусть $f(z)$, $z \in G$, — мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞. Выберем произвольные α, β; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Положим $k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha}$. Рассмотрим угловую область $g_{\alpha\beta} = \{z = re^{i\theta}: \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 < r_0 \le r < +\infty\}$ и соответствующую однозначную ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, функции $f(z)$, $z \in G$. Неванлинновские характеристики ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, определяются следующим образом [1, с. 40]:

$$A_{\alpha\beta}(r, f) = \frac{k}{\pi} \int_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{t^{k+1}} - \frac{t^{k-1}}{r^{2k}} \right) \left[\ln^+ |f(te^{i\alpha})| + \ln^+ |f(te^{i\beta})| \right] dt,$$

$$B_{\alpha\beta}(r, f) = \frac{2k}{\pi r^k} \int_{\alpha}^{\beta} \ln^+ |f(re^{i\theta})| \sin(k(\theta - \alpha))\, d\theta, \tag{3}$$

$$C_{\alpha\beta}(r, f) = 2k \int_{r_0}^{r} c_{\alpha\beta}(t, f) \left(\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{t^{k-1}}{r^{2k}} \right) dt,$$

где

$$c_{\alpha\beta}(t, f) = c_{\alpha\beta}(t, \infty) = \sum_{r_0 < |\rho_n| \le t,\ \alpha \le \psi_n \le \beta} \sin(k(\psi_n - \alpha)),$$

а $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, рассматриваемые с учетом кратности,

$$S_{\alpha\beta}(r, f) = A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f) + C_{\alpha\beta}(r, f). \tag{4}$$

В статье [8] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть мероморфная функция* $f(z)$, $z \in G$, *с логарифмической особой точкой в* ∞ $(f \in M_l)$ *является решением уравнения* (1), *коэффициенты* p_{jq} *которого определены в* (2). *Если* (1) *не является уравнением Риккати* $f' = p_{21}(z) f^2 + p_{11}(z) f + p_{01}(z)$, *то рост решения не превышает роста коэффициентов, т. е. для любой ветви* $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, *выполняется*

$$S_{\alpha\beta}(r, f) = O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq}) \right) + O(1) = O(1). \tag{5}$$

Теорему А можно уточнить, если рассматривать решения, принадлежащие кольцу A_l, $A_l \subset M_l$. А именно, будет доказана такая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z)$, $z \in G$, *с изолированной логарифмической особой точкой в* ∞ ($f \in A_l$, $A_l \subset M_l$) *является решением уравнения* (1), (2). *Если* (1) *не является линейным уравнением вида* $f' = p_{11}(z)f + p_{01}(z)$, *то для любой ветви* $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, *выполняется соотношение* (5).

Аналогичное свойство имеют и решения, имеющие изолированную особую точку любой природы (существенно особую, алгебраическую, логарифмическую, полюс).

Напомним определение неванлинновских характеристик однозначной мероморфной функции $f(z)$, $z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$. Через $n(r, f)$ обозначим число полюсов функции f в кольце $\{z : r_0 \le |z| \le r\}$. Для $x \ge 0$ обозначим $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$. Тогда [1, с. 23]

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi,$$

$$N(r, f) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, f)}{t} dt, \qquad T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \tag{6}$$

Аналогично определяются неванлинновские характеристики $m(r, f)$, $N(r, f)$, $T(r, f)$ для ν-значных функций $f(z)$, $z \in G$, имеющих в ∞ алгебраическую точку ветвления (см. [9]).

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z)$, $z \in G$, *с изолированной особой точкой в* ∞ *является решением уравнения* (1), (2). *Если* (1) *не является линейным уравнением, то рост решения не превышает роста коэффициентов, т. е. либо для любой ветви* $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, *выполняется соотношение* (5), *либо* (*если* $f(z)$, $z \in G$, — *однозначная голоморфная или* ν*-значная алгеброидная функция*) *выполняется соотношение*

$$T(r, f) = O\left(\sum_{j,q} T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r) = O(\ln r), \quad r \to +\infty. \tag{7}$$

Уточним, как мы понимаем операции над многозначными функциями. Рассмотрим круг $g = \{z : |z - r_0| < \varepsilon\}$, где $r_0, \varepsilon > 0$ (ε — достаточно малое). Выберем какие-нибудь правильные элементы [10, с. 480] $\exp\left(a_{jq}\ln_0 z\right)$, $(\ln_0 z)^{b_{jq}}$, $z \in g$, соответственно функций $z^{a_{jq}} = \exp\left(a_{jq}\ln z\right)$, $(\ln z)^{b_{jq}}$. Из свойств этих функций следует, что выбранные элементы можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой в области $G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$. Предположим, что существует правильный элемент $f_0(z)$, $z \in g$, такой, что при подстановке $f_0(z)$, $\exp\left(a_{jq}\ln_0 z\right)$, $(\ln_0 z)^{b_{jq}}$, $z \in g$, в (1), (2) вместо соответственно f, $z^{a_{jq}}$, $(\ln z)^{b_{jq}}$ получаем тождество при $z \in g$. Мы предполагаем, что элемент $f_0(z)$, $z \in g$, можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой $z = \lambda(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $\lambda(t_0) = r_0$, $\lambda(t_1) = z_1$, принадлежащей G, причем результатом продолжения является либо правильный элемент $f_1(z)$, $z \in \{z : |z - z_1| < \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 > 0$, либо элемент, имеющий в точке z_1 неразветвленный полюс (элемент вида $\sum_{j=-s}^{+\infty} a_j (z - z_1)^j$, $s \in \mathbb{N}$). Предположим, что для любого $z_1 \in G$ существует бесконечное множество различных элементов указанного вида с центром z_1, которые являются непосредственными аналитическими продолжениями элемента $f_0(z)$, $z \in g$. Множество всех таких элементов обозначим через $f(z)$, $z \in G$. Будем говорить, что $f(z)$, $z \in G$, — мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞, $f \in M_l$. В частности, если при всех аналитических продолжениях элемента $f_0(z)$, $z \in g$, в области G результатом продолжения является правильный элемент, то $f(z)$, $z \in G$, имеет в ∞ изолированную логарифмическую особую точку $(f \in A_l)$.

Выберем произвольные α, β; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Пусть, например, $\alpha > 0$. Рассмотрим кривую $z = r_0 e^{it} = \mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$, $\mu(0) = r_0$, $\mu(\alpha) = r_0 e^{i\alpha}$. Аналитически продолжим элементы $f_0(z)$, $\exp\left(a_{jq} \ln_0 z\right)$, $(\ln_0 z)^{b_{jq}}$, $z \in g$, вдоль кривой $\mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$. В результате продолжения получим элементы $f_\alpha(z)$, $\exp\left(a_{jq} \ln_\alpha z\right)$, $(\ln_\alpha z)^{b_{jq}}$ с центром в точке $r_0 e^{i\alpha}$. Далее аналитически продолжим эти элементы вдоль всевозможных кривых $z = r(t) e^{i\theta(t)}$, $t \in [t_1, t_2]$, где $r(t)$, $\theta(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, — непрерывные функции, такие, что $r_0 \le r(t) < +\infty$, $\alpha \le \theta(t) \le \beta$, $t_1 \le t \le t_2$. Множество всех элементов, полученных в результате таких продолжений, будем обозначать соответственно через

$$\begin{gathered} f(z), \qquad z \in g_{\alpha\beta} = \left\{ z = re^{i\theta} \colon \alpha \le \theta \le \beta,\ r_0 \le r < +\infty \right\}, \\ z^{a_{jq}}, \quad z \in g_{\alpha\beta}, \qquad (\ln z)^{b_{jq}}, \quad z \in g_{\alpha\beta}; \end{gathered} \tag{8}$$

$g_{\alpha\beta}$ — угловая область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. Если $\beta - \alpha < 2\pi$, то согласно теореме о монодромии [10, с. 488] функции (8) — однозначные аналитические функции в области $g_{\alpha\beta} \subset \mathbb{C}$. Если $\beta - \alpha \ge 2\pi$, то область $g_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как односвязную область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. В этой области также применима теорема о монодромии. Поэтому функции (8) — однозначные аналитические функции на куске римановой поверхности $g_{\alpha\beta}$.

Справедлива следующая теорема [11]: *пусть*

$$F = \frac{P(f)}{Q(f)} = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1} f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2} f^j}, \quad d = \max(t, s),$$

f, $p_{jq} \in M_l$, p_{t1}, $p_{s2} \ne 0$, причем $P(f)$, $Q(f)$ взаимно просты, как многочлены от f над полем M_l. Тогда

$$S_{\alpha\beta}(r, F) = d S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq}) \right) + O(1). \tag{9}$$

Если f, $p_{jq} \in M$, M — поле однозначных мероморфных или алгеброидных в области G функций, причем $P(f)$, $Q(f)$ взаимно просты, как многочлены от f над полем M, то

$$T(r, F) = d T(r, f) + O\left(\sum_{j,q} T(r, p_{jq}) \right) + O(\ln r). \tag{10}$$

Нам понадобится следующая лемма (см. [8], формула (14)).

Лемма 1. *Пусть $f(z)$, $z \in \{ z = re^{i\theta} \colon \alpha_1 \le \theta \le \beta_1,\ r_0 \le r < +\infty \}$, — мероморфная функция. Если $\alpha_1 \le \alpha < \beta \le \beta_1$, то*

$$S_{\alpha_1\beta_1}(r, f) \geq S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1). \tag{11}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Как следует из теоремы А, если уравнение (1), (2) имеет решение $f \in A_l \subset M$ и уравнение (1) не является уравнением Риккати (а следовательно, и линейным уравнением), то для любой ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, выполняется соотношение (5).

Пусть теперь (1) — уравнение Риккати, т. е. имеет вид

$$f' = p_{21}(z) f^2 + p_{11}(z) f + p_{01}(z). \tag{12}$$

Покажем, что если в (12) коэффициент $p_{21}(z) \not\equiv 0$, то также выполняется соотношение (5).

Применяя к (12) формулу (9), получаем

$$S_{\alpha\beta}(r, f') = 2S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{2} S_{\alpha\beta}(r, p_{j1})\right) + O(1). \tag{13}$$

Известно [12] (теорема 1), что мероморфное решение $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ дифференциального уравнения (1) с коэффициентами $p_{jq}(z)$ вида (2) имеет конечный порядок роста p.

Пусть A, B такие, что $A < \alpha < \beta < B$. Рассмотрим однозначные ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ и $f(z)$, $z \in g_{AB} = \{ z = re^{i\theta} : A \leq \theta \leq B,\ r_0 \leq r < +\infty \}$ функции $f(z)$, $z \in G$. Пусть $\{c_q\}$ — множество всех нулей и полюсов ветви $f(z)$, $z \in g_{AB}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим окружность с центром c_q радиуса $\delta_q = \left|c_q\right|^{-p-1-\varepsilon/2}$. Через E обозначим множество точек области g_{AB} римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$, лежащих внутри всех этих окружностей. Тогда [12] (лемма 4) $(\exists\, d = d(A, B, \varepsilon) > 0)$:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < |z|^{2p+2+\varepsilon}, \quad z \in g_{AB} \setminus E, \quad |z| \geq d,$$
$$\sum \delta_q = \sum \left|c_q\right|^{-p-1-\varepsilon/2} < K = \text{const} < +\infty, \quad c_q \in \{c_q\}. \tag{14}$$

Для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим интервал $\left[\left|c_q\right| - \delta_q,\ \left|c_q\right| + \delta_q\right]$. Пусть Δ — множество точек, принадлежащих этим интервалам. Из (14) следует, что E — множество кругов с конечной суммой радиусов, $\operatorname{mes}\Delta < 2K$.

Можно считать, что лучи $\Lambda(\alpha) = \{ z = re^{i\alpha} : r \geq d \}$, $\Lambda(\beta) = \{ z = re^{i\beta} : r \geq d \}$ не пересекаются с E, когда d — достаточно большое $(E \cap (\Lambda(\alpha) \cup \Lambda(\beta)) = \varnothing)$. Действительно, поскольку E — множество кругов с конечной суммой радиусов, то $(\exists\, \alpha_1 : A < \alpha_1 < \alpha)\ (\exists\, d = d(A, \alpha) > 0)$ такое, что луч $\Lambda(\alpha_1) = \{ z : z = re^{i\alpha_1} : r \geq d \}$ не пересекает круги из множества E, $(\Lambda(\alpha_1) \cap E = \varnothing)$ [13] (формула (31)). Аналогично существует $\beta_1, \beta < \beta_1 < B$, такое, что луч $\Lambda(\beta_1) = \{ z = re^{i\beta_1} : r \geq d \}$ не пересекает круги из E, $(\Lambda(\beta_1) \cap E = \varnothing)$. Поэтому вместо ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, можно рассматривать ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha_1\beta_1}$, где $A < \alpha_1 \leq \alpha < \beta \leq \beta_1 < B$.

Если $r \notin \Delta$, то, учитывая (14) и то, что $k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} > 0$, $\sin(k(\theta - \alpha)) \geq 0$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, получаем $\left|\dfrac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right| < r^{2p+2+\varepsilon}$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$,

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \ln^+\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right| \sin k(\theta-\alpha)\,d\theta <$$

$$< 2k\pi^{-1}(2p+2+\varepsilon)r^{-k}\ln r(\beta-\alpha) = o(1), \quad r\to+\infty, \quad r\notin\Delta. \qquad (15)$$

На лучах $\Lambda(\alpha)$, $\Lambda(\beta)$ выполняется оценка (14). Поэтому

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left[\ln^+\left|\frac{f'\left(te^{i\alpha}\right)}{f\left(te^{i\alpha}\right)}\right| + \ln^+\left|\frac{f'\left(te^{i\beta}\right)}{f\left(te^{i\beta}\right)}\right|\right]\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{k}{\pi}\left(\int\limits_{r_0}^{d}\ldots+\int\limits_{d}^{r}\ldots\right) < O(1) + \frac{2k}{\pi}\int\limits_{d}^{r}\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\frac{(2p+2+\varepsilon)\ln t\,dt}{t} = O(1). \qquad (16)$$

Далее, выполняются оценки [1, с. 45] (формула (6.9))

$$B_{\alpha\beta}(r, f') = B_{\alpha\beta}\left(r, f\frac{f'}{f}\right) \le B_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}\left(r, f\frac{f'}{f}\right),$$

$$A_{\alpha\beta}(r, f') = A_{\alpha\beta}\left(r, f\frac{f'}{f}\right) \le A_{\alpha\beta}(r, f) + A_{\alpha\beta}\left(r, f\frac{f'}{f}\right).$$

Поэтому, учитывая (15), (16), получаем

$$\begin{gathered} B_{\alpha\beta}(r, f') \le B_{\alpha\beta}(r, f) + o(1), \quad r\notin\Delta, \quad r\to+\infty, \\ A_{\alpha\beta}(r, f') \le A_{\alpha\beta}(r, f) + O(1). \end{gathered} \qquad (17)$$

Поскольку функция $f(z)$, $z\in G$, с изолированной логарифмической особой точкой не имеет полюсов, то (см. (3))

$$C_{\alpha\beta}(r, f) = C_{\alpha\beta}(r, f') \equiv 0, \quad r\ge r_0. \qquad (18)$$

Из (18), (17), (4) следует

$$S_{\alpha\beta}(r, f') \le S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1), \quad r\notin\Delta. \qquad (19)$$

Учитывая (13), (19), имеем

$$\begin{gathered} S_{\alpha\beta}(r, f) \ge 2S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{2} S_{\alpha\beta}\left(r, p_{j1}\right)\right) + O(1), \\ S_{\alpha\beta}(r, f) = O\left(\sum_{j=0}^{2} S_{\alpha\beta}\left(r, p_{j1}\right)\right) + O(1), \quad r\notin\Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta<+\infty. \end{gathered} \qquad (20)$$

Из (2) – (4) следует

$$S_{\alpha\beta}\left(r, p_{jq}\right) = O(1). \qquad (21)$$

Отсюда с учетом (20) получаем

$$S_{\alpha\beta}(r, f) = O(1), \quad r\notin\Delta. \qquad (22)$$

Покажем, что в (22) исключительное множество Δ можно опустить. Существует неубывающая непрерывная функция $\mathring{S}_{\alpha\beta}(r, f)$ такая, что [1, с. 43]

$$\mathring{S}_{\alpha\beta}(r, f) = S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1). \qquad (23)$$

Из (22), (23) получаем $\mathring{S}_{\alpha\beta}(r, f) = O(1)$, $r \notin \Delta$, $\operatorname{mes}\Delta < \infty$. Поскольку $\mathring{S}_{\alpha\beta}(r, f)$ — неубывающая функция, из предыдущего следует $\mathring{S}_{\alpha\beta}(r, f) < C = \text{const}$ $\forall\ r \geq$ $\geq r_0$. Поэтому с учетом (23)

$$S_{\alpha\beta}(r, f) \ < \ \text{const} \quad \forall\, r \geq r_0. \tag{24}$$

Отсюда и из (21) следует соотношение (5).

Если бы луч $\Lambda(\alpha) = \{z = re^{i\alpha} : r \geq d\}$ или луч $\Lambda(\beta) = \{z = re^{i\beta} : r \geq d\}$ при любом d пересекал множество E (см. (14)), то, как отмечалось выше, мы рассматривали бы ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha_1\beta_1}$, $A < \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 < B$, и аналогично предыдущему доказали бы оценку $S_{\alpha_1\beta_1}(r, f) = O(1)$. Поскольку $\alpha_1 < \alpha < \beta <$ $< \beta_1$, из (11) следует $S_{\alpha\beta}(r, f) < S_{\alpha_1\beta_1}(r, f) + O(1) = O(1)$. Поэтому оценка (5) справедлива для любой ветви.

Осталось рассмотреть случай, когда в (12) $p_{21}(z) \equiv 0$. В этом случае (12), (1) является линейным уравнением $f' = p_{11}(z) f + p_{01}(z)$, где $p_{j1}(z)$ определены в (2).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для функции $f(z)$, $z \in G$, с изолированной особой точкой в ∞ возможны три предположения: 1) функция имеет в ∞ логарифмическую особую точку (этот случай рассмотрен в теореме 1); 2) $f(z)$, $z \in G$, — однозначная голоморфная функция; 3) $f(z)$, $z \in G$, является ν-значной алгеброидной функцией, причем $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^{n/\nu}$, $z \in G$, $\nu > 1$, $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть теперь решением уравнения (1), (2) является либо однозначная голоморфная функция $f(z)$, $z \in G$, либо ν-значная функция $f(z) =$ $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^{n/\nu}$, $z \in G$.

В [3, с. 67] из-за сложности доказательства приводится только формулировка теоремы Мальмквиста [2]. Простое доказательство теоремы можно получить методом Йосиды [4], используя формулу (10). Выполним в (1) замену $f =$ $= u^{-1} + \kappa$, где κ — такая константа, что $P(z, \kappa) \not\equiv 0$, $Q(z, \kappa) \not\equiv 0$. В результате получим

$$u' \ = \ \frac{R(z, u)}{V(z, u)}, \tag{25}$$

где R, V — многочлены относительно u с коэффициентами $P_{jq}(z)$ вида (2), являющимися линейными комбинациями коэффициентов $p_{jq}(z)$ уравнения (1), (2). Степени R, V относительно u соответственно равны t и $t-2$ (если $t-2 \geq s$) и $s+2$ и s (если $t-2 < s$). Пусть, для определенности, $t-2 < s$. Тогда $\deg_u R/V = s+2$. Применяя к (25) формулу (10), получаем

$$T(r, u') \ = \ (s+2)T(r, u) + O\Big(\sum T(r, P_{jq})\Big) + O(\ln r). \tag{26}$$

Поскольку коэффициенты $P_{jq}(z)$ являются линейными комбинациями коэффициентов $p_{jq}(z)$ уравнения (1), (2), из свойств характеристики $T(r, f)$ следует [1, с. 45] (формулы (6.5) – (6.7)) $T(r, P_{jq}) = O\Big(\sum T(r, p_{jq})\Big) + O(1)$. Отсюда с учетом (26) имеем

$$T(r, u') \ = \ (s+2)T(r, u) + O\Big(\sum T(r, p_{jq})\Big) + O(\ln r). \tag{27}$$

Так как функция $u(z)$, $z \in G$, не имеет точек ветвления, отличных от ∞, полюсы функций $u'(z)$, $z \in G$, и $u(z)$, $z \in G$, расположены в одних и тех же точках. Каждому полюсу порядка m функции $u(z)$ соответствует полюс порядка $m+1$ производной $u'(z)$. Поэтому $n(r,u') \le 2n(r,u)$ [1, с. 131],

$$N(r,u') \le 2N(r,u). \tag{28}$$

Для однозначной мероморфной функции $u(z)$, $z \in G$, и для ν-значной функции $u(z)$, $z \in G$, справедлива лемма о логарифмической производной [1, с. 122] (теорема 1.3), [9]:

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) = o(T(r,u)), \qquad r \notin \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < \infty,$$

поэтому [1, с. 44] (формула (6.1))

$$m(r,u') = m\left(r, u\frac{u'}{u}\right) \le m(r,u) + m\left(r, \frac{u'}{u}\right) = m(r,u) + o(T(r,u)), \quad r \notin \Delta.$$

Отсюда, учитывая (28), получаем

$$\begin{aligned} T(r,u') &= N(r,u') + m(r,u') \le 2N(r,u) + m(r,u) + o(T(r,u)) \le \\ &\le (2+o(1))T(r,u), \qquad r \notin \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < \infty. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (27), (29) следует

$$\begin{gathered} (2+o(1))T(r,u) \ge (s+2)T(r,u) + O\left(\sum T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r), \quad r \notin \Delta, \\ (s+o(1))T(r,u) = O\left(\sum T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r), \quad r \notin \Delta. \end{gathered} \tag{30}$$

Если $s > 0$, а значит, уравнение (1) не является уравнением Риккати (а тем более линейным уравнением), то (30) можно записать следующим образом:

$$T(r,u) = O\left(\sum T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r), \quad r \notin \Delta. \tag{31}$$

Учитывая (2), (6), получаем

$$T(r, p_{jq}) = O(\ln r). \tag{32}$$

Из (31), (32) следует, что существует $M = \text{const} > 0$ такое, что

$$T(r,u) < M \ln r, \qquad r \notin \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < K = \text{const}. \tag{33}$$

Пусть $r > K$. Поскольку $\operatorname{mes}\Delta < K$, то $\exists\, r_1 \in [r, r+K]$, $r_1 \notin \Delta$. Функция $T(r,u)$, $r \ge r_0$, — возрастающая [1, с. 33] (теорема 4.3), поэтому, учитывая (33), имеем

$$T(r,u) < T(r_1,u) < M \ln r_1 < M\ln(2r) < 2M\ln r \quad \forall\, r \ge \max(K, \ln 2).$$

Следовательно,

$$T(r,u) = O(\ln r), \quad r \ge r_0. \tag{34}$$

Поскольку $u = \dfrac{1}{f-\kappa}$, $\kappa = \text{const}$, то, применяя первую основную теорему Неванлинны [1, с. 27] (теорема 4.1), получаем $T(r,u) = T\left(r, \dfrac{1}{f-\kappa}\right) = T(r,f) + O(1)$. Отсюда и из (31), (34) следует (7).

Пусть $s = 0$. По предположению $t - 2 < s$. Следовательно, $0 \le t < s + 2 = 2$, поэтому $s = 0$, $t = 1$. Таким образом, уравнение (1) является линейным уравнением $f' = p_{11}(z)f + p_{01}(z)$, где $p_{j1}(z)$ определены в (2). Аналогично исследуется случай $t - 2 \ge s$.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция с изолированной существенно особой точкой в ∞ (например, целая трансцендентная функция) или ν-значная аналитическая функция с алгебраической точкой ветвления в ∞. Запишем ее аргумент в показательной форме; функция $f\left(re^{i\theta}\right)$, $r_0 \le r < < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$, имеет по θ период 2π (соответственно, период $2\pi\nu$). Это позволяет рассматривать функцию $f\left(re^{i\theta}\right)$ с существенно особой точкой (с алгебраической точкой ветвления) в ∞ как разновидность функции с логарифмической особой точкой в ∞, имеющей по θ период 2π (соответственно, период $2\pi\nu$) (см. выше определение функции $f \in M_l$, основанное на понятии аналитического продолжения). Поэтому оценка (5) роста решения с логарифмической особой точкой применима также к решениям с существенно особой или алгебраической точкой ветвления. Достаточно в (5) взять $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ и рассматривать характеристику $S_{0,2\pi}(r, f)$.

Если же оценивать рост решения с помощью характеристики $T(r, f)$, то нужно дополнительно предположить, что коэффициенты $p_{jq}(z)$ (см. (2)) принадлежат полю функций, в котором применима формула (10): необходимо считать, что в (2) показатели степеней $a_{jq} \in \mathbb{Q}$, $b_{jq} = 0$.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. *Malmquist J.* Sur les fonctions á un nombre fini de branches défínes par les équations différentielles du premier order // Acta Math. – 1913. – **36**. – P. 297 – 343.
3. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
4. *Yosida K.* A generalization of a Malmquist's theorem // Jap. J. Math. – 1933. – **9**. – P. 253 – 256.
5. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1991. – **85**. – С. 5 – 186.
6. *Laine I.* Nevanlinna theory and complex differential equations. – Berlin; New York: Walter Gruyter, 1993. – 400 p.
7. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
8. *Мохонько А. А.* Теорема Мальмквиста для решений дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 476 – 483.
9. *Valiron G.* Sur la dérivée des fonctions algébroides // Bull. Soc. math. France. – 1931. – **59**, № 1–2. – P. 17 – 39.
10. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
11. *Мохонько А. З.* Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 3. – С. 214 – 218.
12. *Mokhon'ko A. Z., Mokhon'ko V. D.* On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity // Math. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 203 – 218.
13. *Мохонько А. З.* О мероморфных решениях алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 4. – С. 514 – 523.

Получено 23.02.2004